

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

ATTI

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEL LINGUE

ANNO 1881

SESSIE PRIMA

RENDICONTI

Il presente volume contiene i rendiconti della prima sessione dell'anno 1881.

LUGLIO 1882



Stampato in Roma presso la tipografia di S. Maria della Pace, nel 1882.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1920.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo).

Analisi. — *Sulla funzione iterata di una razionale intera.*
Nota II del Socio S. PINCHERLE ⁽¹⁾.

1. In una precedente Nota dal medesimo titolo ⁽²⁾, si sono date le proprietà del campo Ω del piano della variabile complessa x , definito dal fatto che i punti di Ω sono mandati all'infinito dall'iterazione, indefinitamente ripetuta, dell'operazione S che sostituisce ad x il polinomio razionale intero

$$(1) \quad \alpha(x) \equiv x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m.$$

Si sono pure indicate le proprietà del contorno Γ di questo campo. Ci proponiamo ora di studiare, fra altre, una funzione che, in questo campo, è atta a dare l'iterata generale della $\alpha(x)$ e permette quindi la costruzione effettiva del gruppo continuo S^v ad un parametro. Tale studio verrà fatto nell'ipotesi che la funzione $\alpha(x)$ si trovi nel caso A (I, 9) in cui il punto $x=0$, e di conseguenza le radici di $\alpha(x)$ e della derivata $\alpha'(x)$, non appartengono ad Ω .

2. Si indicherà con (\mathcal{J}) l'insieme — o spazio funzionale — delle funzioni analitiche regolari entro tutto Ω e nulle all'infinito. Ogni elemento

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1920.

(2) Questa Nota (4 giugno 1920) verrà qui richiamata con I, seguito dal numero del paragrafo.

di (3) è dunque sviluppabile fuori del cerchio C_0 (I, 6) in serie della forma

$$(2) \quad f(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

Se $f(x)$ appartiene ad (3), vi appartiene anche Sf .

3. Essendo R il numero definito ad I, 4, e preso $|x| = r > R$, si ha, q essendo positivo maggiore d'uno ed $x_1 = Sx$ ($x_n = S^n x$):

$$|x_1| = r_1 > qr^{m-1}.$$

Sia ora M il massimo valore assoluto di $f(x)$ sulla circonferenza $|x| = r$ ed M_1 il massimo valore assoluto di Sf sulla medesima circonferenza: potendosi supporre senza restrizione $qr^{m-2} > 2$, si avrà, tenuto conto del valore maggiorante Mr^n di c_n ,

$$(3) \quad M_1 < \frac{2M}{qr^{m-2}}.$$

In base a questa disuguaglianza, una serie

$$(4) \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n S^n f$$

risulta assolutamente ed uniformemente convergente per ogni $|x| \geq r$, e per ogni sistema di coefficienti k_n paragonabile assintoticamente ad una progressione geometrica ed anche ad una progressione ultrageometrica a^{b^n} con a e b maggiori dell'unità e $b < m - 1$. Ciò consegue subito dalla (3) applicata ad $S^n f$ invece che ad f e dalla (4') della Nota I. E poichè, comunque preso x in Ω , si può determinare un \bar{n} tale che, per $n > \bar{n}$, sia $|x_n| > R$, così la convergenza della (4) ha luogo in tutto Ω ; la $g(x)$ appartiene essa pure ad (3).

4. Scegliendo le k_n in modo da soddisfare a relazioni ricorrenti, la (4) darà soluzione di corrispondenti equazioni funzionali. Il caso più semplice si ha assumendo le k_n come termini k^n di una progressione geometrica; la

$$(5) \quad g(x) = \sum_0^{\infty} k^n S^n f$$

soddisfa all'equazione

$$(6) \quad g(x) - k S g(x) = f(x),$$

e, poichè la (5) è funzione intera in k , la (6) appartiene al tipo Volterra, in guisa che l'equazione omogenea

$$(7) \quad g(x) - k g(\alpha(x)) = 0$$

non ammette soluzione nello spazio funzionale (3): l'impossibilità della (7) in questo spazio è, del resto, resa manifesta dalla (3).

5. a) Si consideri il quoziente

$$(8) \quad \frac{x^m}{\alpha(x)} = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_m}{x^m}},$$

indi si prenda $|x| \geq r$, con r abbastanza grande:

1°) da superare il numero R definito ad I, 4;

2°) da rendere convergente lo sviluppo di (8) in serie di potenze di $\frac{1}{x}$, che si può scrivere

$$\frac{x^m}{\alpha(x)} = 1 + \beta(x),$$

dove $\beta(x)$ è elemento di (\mathfrak{J}) , poichè $\alpha(x)$ appartiene al caso A;

3°) da rendere il massimo valore assoluto M di $\beta(x)$ inferiore alla unità.

Formando allora

$$(9) \quad (1 + \beta(x))^{1/m},$$

questa è pure sviluppabile in serie di potenze di $1/x$, per $|x| > r$, ed è un ramo ad un valore di funzione analitica entro tutto Ω , se si fissa che, per $x = \infty$, essa abbia il valore 1: infatti, per ogni curva chiusa descritta da x in Ω , essendo i punti di diramazione della (9) tutti fuori di Ω , essa riprende il medesimo valore. Ponendo

$$(1 + \beta(x))^{1/m} = 1 + \gamma_1(x),$$

anche $\gamma_1(x)$ è elemento di (\mathfrak{J}) .

b) È facile vedere che essendo il massimo valore assoluto M di $\beta(x)$, per $|x| > r$, inferiore all'unità, il massimo valore assoluto M_1 di $\gamma_1(x)$ è non maggiore di M . Ma, essendo $\gamma_1(x)$ elemento di (\mathfrak{J}) , il massimo valore assoluto di $S\gamma_1(x)$ sarà (n. 3) inferiore a

$$(10) \quad \frac{2M_1}{q^{r^{m-2}}},$$

e quindi, posto

$$(1 + S\gamma_1(x))^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{\alpha^m(x)}{\alpha_2(x)} \right)^{\frac{1}{m^2}} = 1 + \gamma_2(x),$$

anche il massimo valore assoluto M_2 di $\gamma_2(x)$ sarà inferiore a (10). Così continuando, posto

$$\left(\frac{\alpha_{n-1}^m(x)}{\alpha_n(x)} \right)^{\frac{1}{m^n}} = 1 + \gamma_n(x),$$

il massimo valore assoluto M_n di $\gamma_n(x)$ è legato a quello M_{n-1} di $\gamma_{n-1}(x)$ da

$$(11) \quad M_n < \frac{2M_{n-1}}{qr_{n-1}^{m-2}}.$$

6. Si consideri ora il prodotto infinito

$$(12) \quad \omega(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{n-1}^m(x)}{\alpha_n(x)} \right)^{\frac{1}{m^n}} = \frac{1}{x} \prod_1^{\infty} (1 + \gamma_n(x)).$$

La serie $\sum \gamma_n(x)$, avendo per maggiorante la $\sum M_n$, per la quale valgono le (11), è assolutamente ed uniformemente convergente per $|x| > r$; lo stesso è dunque, nel medesimo campo, del prodotto infinito $\omega(x)$, che vi rappresenta di conseguenza un ramo ad un valore e regolare di funzione analitica. Ma il prodotto (12) si può scrivere

$$\frac{1}{x} \prod_1^{p-1} \prod_p^{\infty} :$$

ora, presa un'area \mathcal{A} finita e tutta interna ad Ω , si può (I, 3) prendere β abbastanza grande perchè, per ogni x di \mathcal{A} ed ogni $n \geq p$, sia $|x_n| > r$, r essendo definito al n. 5, a). Ne viene che il prodotto \prod_p^{∞} è, per tutta l'area \mathcal{A} , nelle condizioni di convergenza assoluta ed uniforme già considerate, e quindi lo stesso è di $\omega(x)$. Quindi la $\omega(x)$ è ramo di funzione analitica regolare entro tutto Ω , e ad un valore, per essere fuori di Ω i punti di diramazione dei fattori di $\omega(x)$, cioè le radici delle $\alpha_n(x)$.

7. La $\omega(x)$ può anche porsi sotto la forma

$$(13) \quad \omega(x) = \frac{1}{\alpha_p^{m^p}(x)} \left(\frac{\alpha_p^m(x)}{\alpha_{p+1}(x)} \right)^{\frac{1}{m^{p+1}}} \left(\frac{\alpha_{p+1}^m(x)}{\alpha_{p+2}(x)} \right)^{\frac{1}{m^{p+2}}} \dots,$$

onde segue che la $\omega(x)$ soddisfa all'equazione funzionale

$$(14) \quad \omega(\alpha(x)) = \omega^m(x).$$

Da questa,

$$(15) \quad \log \omega(\alpha(x)) = m \log \omega(x):$$

quindi l'equazione (7), che non può essere soddisfatta nello spazio funzionale (\mathcal{J}) , diviene possibile mediante l'aggiunzione di $\log x$ a questo spazio.

8. La funzione $\omega(x)$, di cui si è stabilita l'esistenza e la regolarità nel campo Ω , che è nulla per $x = \infty$ ed appartiene di conseguenza ad (\mathcal{J}) , gode delle seguenti proprietà:

a) È $|\omega(x)| < 1$ entro tutto Ω . Infatti, posto $\omega(x) = u$, si ha, per la (14),

$$\omega(x_1) = u^m, \dots \omega(x_n) = u^{m^n} \dots;$$

ma le x_n tendono all'infinito, ed $\omega(x_n)$ in corrispondenza tende a zero; onde è $|u| < 1$.

b) La $\omega(x)$ non si annulla in Ω , se non per $x = \infty$. Se infatti per $x = \bar{x}$ fosse $\omega(\bar{x}) = 0$, ne verrebbe, per la (14), $\omega(\bar{x}_n) = 0$, e quindi $x = \infty$ sarebbe punto limite di radici di ω , contro il fatto che ω è regolare per $x = \infty$.

c) La $\omega(x)$ non riprende uno stesso valore in due punti di Ω . Essendo ω regolare e nulla di prim'ordine per $x = \infty$, si può determinare un r tale che, per $|x| > r$, $\omega(x)$ non prenda due volte uno stesso valore. Ma allora per due punti x, y di Ω non può essere $\omega(x) = \omega(y)$, poichè ne verrebbe $\omega(x_n) = \omega(y_n)$, dove n si può fare abbastanza grande per rendere $|x_n| > r$, $|y_n| > r$.

d) Sia x un punto di Ω , $x'_{11}, x'_{12}, \dots x'_{1m}$ i suoi primi antecedenti; sia $\omega(x) = u$. Le $\omega(x'_{ij})$ saranno, per la (14), altrettante radici m^{sim}_i di u , e, per $j = 1, 2, \dots m$, daranno tutte le radici m^{sim}_i , in seguito a c). Se ora

$$(16) \quad x'_1, x'_2, \dots x'_n, \dots$$

è una successione qualunque di successivi antecedenti di x , i moduli della successione

$$(17) \quad \omega(x'_1), \omega(x'_2), \dots \omega(x'_n), \dots$$

tenderanno all'unità. In particolare, si può scegliere x'_n in modo che $\omega(x'_n)$ abbia per argomento $\frac{2\pi}{m^n}$; le (17) tendono allora all'unità.

e) Qualunque sia il numero \bar{u} di modulo minore d'uno, l'equazione $\omega(x) = \bar{u}$ ammette in Ω una radice. Infatti, per essere $x = \infty$ uno zero di prim'ordine per $\omega(x)$, si può determinare un numero positivo ϱ tale che, per $|u| < \varrho$, si possa, dalla $\omega(x) = u$, ricavare

$$(18) \quad \frac{1}{x} = u + g_2 u^2 + g_3 u^3 + \dots;$$

e se è $|\bar{u}| < \varrho$, questa dà il valore richiesto per x . Se è invece $1 > |\bar{u}| > \varrho$, si può sempre determinare l'intero p in modo che sia $|\bar{u}^{m^p}| < \varrho$; determinato \bar{x} tale che $\omega(\bar{x}) = \bar{u}^{m^p}$, uno degli antecedenti p^{sim}_i di \bar{x} sarà radice di $\omega(x) = \bar{u}$. Questa radice, per c), è unica.

9. Ponendo

$$(19) \quad \omega(x) = u, \quad \text{o, invertendo,} \quad x = \xi(u),$$

si stabilisce una rappresentazione conforme del campo Ω del piano x sul cerchio $|u| < 1$ del piano u . Questa corrispondenza è biunivoca (8, c); al centro del cerchio corrisponde il punto $x = \infty$. Alla sostituzione $Sx = \alpha(x)$ corrisponde in u la trasformazione $Tu = u^m$. Alle circonferenze $|u| = c$, $0 < c < 1$, corrispondono in Ω le curve equimodulari

$$(20) \quad |\omega(x)| = c;$$

queste, al tendere di c all'unità, tendono al contorno Γ di Ω .

La trasformazione T genera il gruppo continuo ad un parametro

$$T^v u = u^{m^v}$$

(v reale qualunque) di cui le circonferenze $|u| = c$ ed i raggi $\arg. u = c$ costituiscono sistemi di imprimitività; le traiettorie sono spirali logaritmiche di polo 0. La trasformata S di T mediante $\omega(x)$ dà il gruppo $S^v(x) = \alpha_v(x)$, che definisce l'iterata di $\alpha(x)$ di indice reale qualsivoglia v ; l'espressione analitica di questa iterata è

$$(21) \quad \alpha_v(x) = \xi(\omega^{m^v}(x)).$$

Le curve (20) costituiscono, per il gruppo S^v , un sistema di imprimitività, e così le curve $\arg. \omega(x) = \text{cost.}$ Le traiettorie del gruppo S^v sono le trasformate, mediante le (19), delle spirali logaritmiche di polo $u = 0$ del piano u .

10. La funzione ξ , inversa di ω , è definita dalla equazione funzionale

$$(22) \quad \alpha(\xi(u)) = \xi(u^m)$$

e dalla condizione di avere un polo di prim'ordine per $u = 0$. Posto dunque

$$\xi(u) = \frac{1}{u} + g_0 + g_1 u + \dots,$$

si può, da (22), determinare i coefficienti g_0, g_1, \dots

Se ora ciò si applica all'esempio particolare $\alpha(x) = x^2 - 2$, si trova, con calcolo assai facile,

$$g_0 = g_2 = g_3 = \dots = 0, \quad g_1 = 1,$$

onde

$$\xi(u) = u + \frac{1}{u}.$$

Da ciò il carattere elementare dell'iterazione di indice qualunque di $x^2 - 2$, carattere che è posto in rilievo nella Nota comparsa in questi Rendiconti della seduta del 4 aprile 1920.

zione delle u' ; la $\bar{\sigma}$, pensata come forma quadratica nei du' , avrà il discriminante

$$(2) \quad \mathcal{A}(\bar{\sigma}) = \mathcal{A}(\sigma) \left[\frac{d(u)}{d(u')} \right]^2,$$

ove con $\frac{d(u)}{d(u')}$ si indica lo jacobiano delle u rispetto alle u' .

D'altra parte, posto $\xi'_i = \frac{\partial \xi}{\partial u'}$, e indicando [per analogia con (1)] con σ' la forma (quadratica nei du')

$$(3) \quad \sigma' = (\xi, \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_r, d^2\xi),$$

sarà

$$(4) \quad \sigma' = \bar{\sigma} \frac{d(u)}{d(u')} = \sigma \frac{d(u)}{d(u')};$$

cosicchè, per il suo discriminante $\mathcal{A}(\sigma')$, varrà, in virtù di (2), la

$$(5) \quad \mathcal{A}(\sigma') = \mathcal{A}(\sigma) \left[\frac{d(u)}{d(u')} \right]^{r+2}.$$

Perciò, in virtù delle (4) e (5), sarà

$$\frac{\sigma'}{\sqrt[r+2]{\mathcal{A}(\sigma')}} = \frac{\sigma}{\sqrt[r+2]{\mathcal{A}(\sigma)}}.$$

Cioè la forma

$$(6) \quad F = \frac{\sigma}{\sqrt[r+2]{\mathcal{A}(\sigma)}}$$

ha significato intrinseco (indipendente dalla scelta delle coordinate curvilinee u). Evidentemente il suo discriminante $\mathcal{A}(F_2)$ è dato dalla

$$\mathcal{A}(F_2) = \frac{\mathcal{A}(\sigma)}{\sqrt[r+2]{\mathcal{A}(\sigma)}^r} = \frac{r+2}{\sqrt[r+2]{\mathcal{A}(\sigma)}}^2$$

cosicchè la (6) si può scrivere anche (analogamente a quanto è fatto in loc. cit., ser. $r = n$)

$$(6)_{bis} \quad F_2 = \frac{1}{\sqrt[r+2]{\mathcal{A}(F_2)}} \sigma = \frac{1}{\sqrt[r+2]{\mathcal{A}(F_2)}} (\xi, \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_r, d^2\xi).$$

Definita così la F_2 , si può definire F_3 come nel loc. cit., sviluppando poi in modo perfettamente analogo la teoria.

La differenza essenziale sta in ciò: che, mentre per le superficie di S_3 o ipersuperficie di S_{n+1} le forme F_2, F_3 sono determinate a meno di uno

domanda, consideriamo dei determinanti di ordine $n + 2$, di cui la prima riga è formata dalla x , da sue derivate o differenziali, e le altre righe se ne ottengono sostituendo alla x ordinatamente le y, \dots, w . Indicheremo nel seguito un tale determinante, dando gli elementi della sua prima riga. Consideriamo ora un determinante, la cui prima colonna abbia per elementi le x, y, \dots, w , altre colonne successive abbiano per elementi tutte le loro derivate parziali fino a quelle di un certo ordine k (dove k è un intero da determinare), ed altre colonne abbiano per elementi differenziali della x o delle sue precedenti derivate: con l'avvertenza che, se una colonna ha per elementi certi differenziali di una derivata di ordine h , vi siano altre colonne che hanno per elementi i differenziali di ogni altra derivata di ordine h . Riuscirò più chiaro, dando un esempio per il caso $r = 2$, in cui i primi determinanti da studiare sarebbero i seguenti:

$$\begin{array}{ll} (x, x_1, x_2, d^2 x) & \text{(se } n = 2) \\ (x, x_1, x_2, dx_1, dx_2) & \text{(se } n = 3) \\ (x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}) & \text{(se } n = 4) \\ (x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}, d^3 x) & \text{(se } n = 5) \\ (x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}, d^2 x_1, d^2 x_2) & \text{(se } n = 6) \\ & \text{ecc.} \end{array}$$

ove gli indici 1, 2 indicano derivazioni rispetto u_1, u_2 .

Tutti questi determinanti restano moltiplicati per ϱ^{n+2} , se si moltiplicano le coordinate omogenee per ϱ ; e, indicando con J lo jacobiano di un cambiamento di variabili, restano moltiplicati per una potenza di J (negli esempi precedenti per J, J^2, J^3, J^4, J^5) quando si effettui tale cambiamento.

Si potrebbe, come nella Mem. cit. pel caso $n = 3$, moltiplicare le precedenti espressioni per un fattore tale che esse abbiano significato intrinseco, cioè restino inalterate per un cambiamento di variabili coordinate u . Esse [traune nel caso $n = 4$, in cui all'espressione precedente si sostituirà la seguente, che ha già significato intrinseco:

$$\frac{(x, x_1, x_2, dx_1, dx_2, d^3 x)}{\sqrt{(x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22})}}$$

uguagliate a zero, definiscono un sistema di curve invariante per collineazioni, di cui pare agevole dare una definizione geometrica. Ciascuna di esse si può assumere come una prima forma differenziale (che negli esempi precedenti è del primo ordine) corrispondente a V_r . Bisognerebbe trovarne altre in modo che, come nel caso delle ipersuperficie, ne restassero individuati i coefficienti di un sistema di equazioni alle derivate parziali, a cui soddisfacessero tutte e sole le combinazioni lineari delle coordinate di un punto di V_r .

Prescindendo dalla complicazione di dover svolgere trattazioni distinte a seconda dei valori numerici di n, r , si presenta un'altra grave difficoltà: che cioè non pare facile di poter evitare forme di *ordine superiore al primo*. Ci si potrebbe però chiedere se, almeno nei casi in cui, come negli esempî precedenti, si è trovata una forma del solo primo ordine, si possano ridurre, col suo sussidio, al primo ordine le eventuali altre forme di ordine superiore al primo, che si presentassero in tali ricerche (ciò che avviene nel caso $r = n \geq 2$). Così, per es., se si presentasse una forma del tipo

$$F = A(du \, d^2v - dv \, d^2u) + B,$$

ove A, B sono forme del primo ordine, è ben chiaro che allo studio della F non si può sostituire quello delle forme A, B , che non hanno significato intrinseco, cioè indipendente dalla scelta delle coordinate u, v . Ma, se noi potessimo scrivere la F nella forma

$$F = A_1(du \, \delta^2v - dv \, \delta^2u) + B_1,$$

ove le δ^2u, δ^2v formassero, come le du, dv , un sistema controvariante, allo studio della F potremmo sostituire quello delle A_1, B_1 del solo *primo* ordine. Qualche studio su tali differenziali *controvarianti* sarà svolto in una prossima Nota.

Mineralogia. — *Cassiterite e titanite di Baveno*. Nota del Socio ETTORE ARTINI ⁽¹⁾.

Qualche tempo fa l'ing. G. Codara, intelligente e appassionato collezionista di minerali, in una escursione alle cave di granito di Baveno e Feriolo, ebbe modo di notare, in un masso di granito bianco della Cava Adami, presso la estremità occidentale della zona coltivata, una geodina nella quale brillava un cristallino di un minerale che egli riconobbe subito essere differente da tutti quelli finora noti in questa classica località. Riusciti vani i tentativi di staccare dal masso tutta la geode, o parte di essa, l'ing. Codara ne estrasse il cristallino, che gentilmente poi mi offerse in dono, perchè lo potessi studiare e descrivere. Un esame sommario mi persuase subito che si trattava di *cassiterite*, specie minerale nuova per Baveno, e perciò interessante, tanto che ritenni utile una nuova visita alla località, nella speranza di trovarne altri esemplari. L'escursione, fatta in compagnia del primo scopritore, non fu interamente fortunata, perchè non ci permise di trovare altri nitidi cristallini, ma non fu nemmeno interamente vana;

(¹) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1920.

infatti in altra geodina di un masso della stessa cava riuscii ad osservare e a staccare alcuni granuli bruni, lucenti, senza distinta forma cristallina, anzi con tutta l'apparenza di essere stati rotti e guasti da urti, ma con tali caratteri esterni da lasciar ritenere molto probabile che si trattasse ancora di cassiterite. I saggi chimici fatti poi in laboratorio, sia sopra uno di questi granuli, sia sopra alcune scheggioline staccate dal cristallo prima trovato, nel punto dove esso in origine era attaccato alla matrice, non lasciarono più dubbio: si tratta veramente e sicuramente di cassiterite.

È dunque un'altra specie minerale che si aggiunge alla già abbastanza lunga serie di quelle osservate nel granito di Baveno, nel quale del resto la sua presenza non deve menomamente sorprendere. Nelle druse pegmatiche di Baveno sono infatti già noti altri minerali di origine francamente protopneumatolitica ⁽¹⁾; e se a differenza di quanto si osserva nel granito elbano, la tormalina è qui scarsa, anzi, nelle geodi, rarissima, l'apatite pure è di una rarità estrema, e il topazio non è ancora stato trovato, comune e caratteristica è invece la fluorite; e non occorre richiamare quale importanza si annetta generalmente all'azione del fluore come mineralizzatore nella formazione della cassiterite.

Il cristallino raccolto dall'ing. Codara ha una lunghezza di mm. 5, e uno spessore massimo di mm. 4; esso è un geminato multiplo, un poco incompleto, di tipo affatto simile a quello di cinque individui, descritto e figurato da Haidinger ⁽²⁾. Il sostegno del gruppo è dato da un individuo più sviluppato, con abito distintamente prismatico, intorno al quale sono aggruppati, ad una estremità, gli altri individui, meno sviluppati e in parte molto imperfetti, geminati rispetto al primo secondo le quattro facce della bipiramide {101}.

Le forme osservate sono le seguenti:

{001}, {100}, {210}, {320}, {430}, {11.10.0}* . {110}, {111}, {101}, {321}.

La base è ristrettissima. Tra le forme prismatiche sono prevalenti, e a sviluppo quasi uguale, {320} e {110}, quest'ultima però con facce molto imperfette, per forte striatura secondo l'asse verticale. Ristrette, ma nitide e brillanti, le facce di {210} e di {100}; quanto alla forma {11.10.0}, che sarebbe nuova per la cassiterite, fu osservata con una sola faccetta, molto piccola, tra {110} e {430}, così che il suo simbolo è da ritenersi incerto. Delle bipiramidi, {111} è ampia, ma a facce smosse, e raramente misurabili, mentre {101} è ristretta, e talvolta lineare; caratteristico lo sviluppo rela-

⁽¹⁾ J. Koenigsberger, *Paragenesis der natürlichen Kieselsäuremineralien*, in Doelter, *Handbuch der Mineralchemie*, II, pag. 27.

⁽²⁾ *Handbuch der bestimmenden Mineralogie*, 1845, pag. 266.

tivamente notevole delle facce di {321}, che per lo più si prestano bene alla misurazione.

Nella tabella che segue sono riportati i valori ottenuti dalla misura di alcuni angoli tra i migliori, confrontati coi valori calcolati dalla costante di Becke ⁽¹⁾:

$$a : c = 1 : 0.67232.$$

SPIGOLI MISURATI	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI CALCOLATI
	Numero	Limiti	Medie	
(210).(100)	8	26.22' — 27.6'	26.45'	26.34'
(320).(100)	8	33.18 — 34.15	33.36	33.41
(430).(100)	5	36.23 — 37.4	36.45	36.52
(11.10.0).(100)	1	—	42.18	42.16
(110).(100)	2	44.29 — 45.41	45.5	45.—
(111).(110)	2	46.3 — 46.40	46.21 ¹ / ₂	46.27
(101).(100)	1	—	55.50	56.5
(101).(011)	1	—	45.59	46.28
(111).(101)	4	28.30 — 29.43	29.5	29.10
(321).(231)	3	20.36 — 21.18	20.54	20.53
(321).(321)	3	61.29 — 61.46	61.37	61.42
(321).(320)	8	22.24 — 22.43	22.30	22.25
(321).(110)	1	—	25.29	24.59
(321).(210)	3	23.12 — 23.24	23.20	23.28
(321).(111)	2	25.21 — 25.24	25.22 ¹ / ₂	25.43
(321).(101)	1	—	41.36	41.47
(100).(<u>100</u>)	1	—	67.27	67.50
(<u>320</u>).(<u>320</u>)	1	—	55.28	55.19
(<u>321</u>).(<u>321</u>)	3	12.55 — 13.6	12.59	12.56

Anche di un altro minerale sono in grado di affermare per la prima volta la presenza nelle druse del granito di Baveno, ed è la *titanite*. Di questa specie possiedo tre esemplari, che devo alla cortesia di quell'acuto osservatore ch'è l'ing. E. Bazzi, direttore dell'Istituto geo-mineralogico italiano. Si tratta di piccolissimi e imperfetti cristallini brunici, o leggermente grigio-violetti, per lo più aggruppati su quarzo o su ortoclasio; un solo esemplare presentava, adagiati su ortoclasio roseo minutamente cristallizzato, con albite e calcite, due cristallini di titanite abbastanza distinti, bruni, di poco più che un millimetro di lunghezza per meno di mezzo mm. di spessore. Uno di questi, staccato, mi permise qualche misura, poco pre-

⁽¹⁾ *Ueber die Krystallform des Zinnsteins*. Tscherm. Min. Mitth., 1877, 244.

cisa, a dir vero, ma sufficiente per identificarne la forma, che risulta dalla seguente combinazione:

$$\{100\} \{021\} \{111\} \{\bar{1}11\} \{102\}.$$

La $\{102\}$, a facce molto curve e imperfette, non è misurabile; dalle altre ottenni i valori seguenti:

	mis.	medie	calc. ⁽¹⁾
$(100) . (111) =$	$34^{\circ}55'$		
	34.49	$34^{\circ}52'$	$35^{\circ}31\frac{1}{2}'$
$(111) . (1\bar{1}1) =$	44.18		
	43.30	43.54	43.49
$(100) . (11\bar{1})$	60.46		60.53
$(111) . (021)$	42.17		41.34

L'abito è alquanto allungato secondo lo spigolo $[111.1\bar{1}1]$.

Alcuni saggi ottici e chimici hanno confermato il riconoscimento fatto per via morfologica.

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale*. Nota I del Socio CARLO DE STEFANI ⁽²⁾.

I.

Generalità.

Da moltissimi anni, percorrendo il suolo della Liguria fra Genova e Savona, mi indugiavo a ricercare se e come si sarebbe potuta determinare l'età precisa di quei terreni cristallini. Davo dietro a qualunque traccia che potesse rivelarmi l'esistenza di fossili; ne raccoglievo pazientemente in moltissimi luoghi; nè m'ingannavo. Soltanto per vari anni facevo a tavolino un lavoro di Sisifo: prendevo quelle tracce, volta volta, per Radiolarie, *Fusulinæ*, *Orbitoides*, *Nummulites*, Idrozoi, *Dasycladacee*, e finivo per rinunciare ad ogni determinazione. Solo da due anni mi sono accorto che si trattava di spongiari; e, sebbene, per le circostanze guerresche, più non sia tornato sui luoghi, ne ho trovato tracce anche in alcuni esemplari di roccia nei quali non ne avevo sospettate.

Sono assolutamente da escludere idrozoi e *Stromatoporidae*, per la regolarità del tessuto, per la sua natura originariamente e prevalentemente silicea e per ogni altro carattere.

(1) Dalle costanti di Des Cloizeaux, accettate universalmente.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1920.

La serie dei terreni di quella regione, secondo me, è la seguente, a partire dal basso:

- 1) granito di Sella e del Sansobbia;
- 2) *gneiss* di Ferrania;
- 3) quarziti, puddinghe di Voltaggio. Arenzano, valle del Sansobbia etc. riferite da molti al trias inferiore;
- 4) calcari *grezzoni* del *Muschelkalk*, a cui superiormente stanno calcari grossolanamente marmorei e dolomiti, per i quali aderisco alle determinazioni del Repossi considerandoli come
- 5) *Hauptdolomit* del trias superiore *Carnico*;
- 6) calcari con selce, terrosi e cavernosi: arenarie che attribuii in addietro, all'*infralias*;
- 7) schisti cristallini, con calcari marmorei che il Rovereto attribuisce al trias superiore; calcari screziati, calceschisti, schisti anfibolici, diabasi, gabbri con glaucofane o no, anfiboliti, serpentine, etc.

Nella regione questi stanno *ovunque* sopra, mai sotto, ai calcari triassici. Attribuiti prima al permiano, per alcune radiolarie trovate da Rovereto e Parona nei diaspri di Montenotte, sono poi stati portati al giura; ma io li attribuisco all'eocene superiore, perchè, come altrove ho detto, stanno nella diretta continuazione dell'eocene superiore delle valli della Polcevera e della Scrivia. Darò in altra circostanza gli spaccati stratigrafici dimostranti i loro rapporti coi calcari delle località che non ho preso in considerazione in passato.

Il non comprendere tutte le cause per le quali quei terreni calcarei e silicei sono diventati così altamente cristallini, non è una buona ragione per farli saltare arbitrariamente da un piano geologico all'altro.

È specialmente in questi terreni, ma anche in quelli che attribuiivo all'*infralias*, e nei calcari triassici e nel così detto trias inferiore, che ho trovato gli spongiarî.

Alcune conclusioni che trarrò, oltre al fatto del ritrovamento, si possono dire molto importanti, specialmente in vista di osservazioni future; ma non posso per ora dire che i più dei problemi in istudio rimangano con ciò risolti.

Si tratta di *Silicospongiae* e principalmente di *Hexactinellidae dictyoninae* le quali, fra tutti gli spongiarî, meglio si prestano alla conservazione.

Non mancano però, come accennerò via via, altri tipi di *Silicospongiae*.

Si trovano tanto nei calcari, quanto negli scisti. Nei primi sono convertite in gran parte in calcare: non è molto frequente la conservazione nella silice colloide primitiva; bensì questa si è spesso disidratata passando facilmente a quarzo ialino. Le migliori conservazioni, oltre che nella

silice colloide, sono in limonite, già pirite pur talora intatta, ed in pulviscolo carbonioso che l'Heckel attribuisce a residuo della parte organica.

Di determinare specie, generi o famiglie non è il caso; per fare ciò, occorrono insieme la forma esterna e l'intreccio interno: la prima manca ed il secondo è mal conservato e d'altra parte non potrebbe servire se non a determinare l'ordine, il sottordine e, al più, la tribù. Pure è certo che il numero delle specie, se non delle famiglie, deve essere ragguardevole.

I parenchimali, indispensabili pur essi nella determinazione dei generi e delle specie, mancano, come di solito, nei fossili, oppure, occorrendo fortissimi ingrandimenti, non si riesce a sceverarli bene dalle parvenze di parecchi componenti minerali, per esempio del rutilo o di certi raggruppamenti della sericite che simulano *Scopulae*, *Ctavulae*, *Oxyhexaster* etc. I componenti minerali sono quasi costanti nei calcari come negli schisti della serie cristallina, salvo la mancanza della calcite in parecchi di questi ultimi; sono dunque calcite, opale, quarzo abbondante con inclusioni acquее carboniose ma talora includente microscelere exactiniche, pirite, limonite pseudomorfa, ematite in rari casi, pulviscolo carbonioso, sericite comunissima, clorite d'ordinario rara, rutilo talora abundantissimo negli schisti e raro nei calcari, zircone raro, apatite più frequente nei calcari, rarissima tormalina negli schisti, e, in questi, casuali frammenti di *plagioclasio*.

Queste rocce furono in origine minutamente o grossolanamente framentizie, e frantumati sono in gran parte dei casi gli spongiiarii silicei sedentarii sul fondo dei mari.

I microrganismi calcarei, che, precipitando dall'alto insieme con minuscole particelle inorganiche eventualmente sospese, dovettero riempirne e romperne il delicatissimo intreccio, resistettero meno alle azioni metamorfiche e non poterono conservarsi.

Già dall'esterno, sulle superfici esposte alle intemperie, macroscopicamente, con forte lente, si osserva la rete *exactinica*, compressa talora e spostata e non di rado rotta, ma apparentemente non costituita da frammenti di specie diverse: la qual cosa può comprendersi perchè il profondo mare non dava luogo a movimenti di trasporto confusionario.

Perciò pure, in linea generale, mi sembra possa ritenersi che i residui fossili degli spongiiarii si trovino nella loro posizione originale con la cavità gastrale allungata normale agli strati.

L'esame diretto al microscopio con ingrandimento di 40 a 60 diam., a conferma dell'esame esterno, è il più adattato per un buon riconoscimento preliminare. Le sezioni un pò grosse, come pure quelle eccessivamente sottili, salvo rari casi, non sono le più adatte allo studio; quelle sottili, spesso, meglio che per trasparenza, si esaminano con ingrandimenti sotto 90 diam., con luce diretta o debolmente riflessa.

Ho provato a sciogliere preparati calcarei un po' grossi nell'acido clori-

drico allungato; il quarzo salino che rimane, formando come tante efflorescenze verticali ed orizzontali, presenta un po' grossolanamente l'interno della spugna e, qua o là, brevi tratti d'intreccio microsclerico intatto; talora viene subito a galla qualche velo d'intreccio siliceo colloide perfetto che poi si scioglie. Con scarso risultato provai la soluzione in acido acetico per non intaccare la silice colloide, e, viceversa, l'azione della potassa caustica per intaccarla.

Fra i residui della soluzione rimangono piccole particelle dell'intreccio limonitico. La colorazione di sottili sezioni con l'*orange* e con l'*eosina*, compenetranti le sostanze colloidali, mi provò che parti dell'intreccio con la superstita silice idrata passano direttamente al quarzo. I canali interni delle spicule si vedono assai di rado: talora sono ingranditi. Le megasclere hanno spesso i contorni corrosi: l'intreccio limonitico a forte ingrandimento si presenta come sbavato.

Riassumerò le centinaia di sezioni che ho fatto e darò le indicazioni speciali principiando dagli strati quarzitici immediatamente sottostanti al calcare fossilifero triassico.

Matematica. — *Di alcune varietà abeliane.* Nota I di GIUSEPPE MARLETTA, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO (*).

Una classe di varietà abeliane, a $p > 1$ dimensioni, degna di rilievo è quella C della quale ciascuna varietà ammette una trasformazione birazionale, in se stessa, periodica e rappresentata analiticamente da una sostituzione lineare, sui parametri della varietà, avente per moltiplicatori p radici dell'unità distinte e appartenenti tutte ad uno stesso esponente.

Per $p = 2$ ogni varietà della classe C o è una superficie iperellittica armonica o equianarmonica ⁽¹⁾, ovvero è una superficie, almeno due volte singolare, appartenente ad uno qualunque di due tipi già caratterizzati ⁽²⁾, o infine è una superficie isomorfa alla superficie di Jacobi-Humbert o di Jacobi-Bolza ⁽³⁾. Per $p = 3$ sono stati già determinati ⁽⁴⁾ i quattro tipi possibili, dei quali due non erano noti.

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1920.

(1) G. Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XLI (1916), pp. 263-380], parte II, n.º 6 e 7.

(2) G. Bagnera e M. De Franchis, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle Scienze, detta dei XL, serie 3ª, tomo XV (1908), pp. 251-343], n.º 39 e 40; e Scorza, loc. cit. in (1), parte II, n.º 45 e 46.

(3) Loc. cit. in (1), parte II, § 6 e n. 54; e loc. cit. in (2), n.º 25 e 26.

(4) C. Raciti [Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LIV (1919), pp. 443-449].

In questo breve lavoro esamino il problema per p qualunque, facendo delle osservazioni, d'indole generale, che credo utili, specialmente per p dispari o addirittura numero primo. Infine studio accuratamente l'ipotesi $p=5$ che conduce a quattro varietà abeliane, tre delle quali sono pure nuove, e costituiscono i primi esempi di varietà abeliane, a 5 dimensioni, pure e con l'indice di moltiplicabilità 9, cioè col massimo indice di moltiplicabilità compatibile con l'ipotesi che la varietà sia pura e a 5 dimensioni.

1. Sia Γ una varietà abeliana ⁽⁵⁾ a $p > 1$ dimensioni; essa ammetta, in se stessa, una trasformazione birazionale periodica T rappresentata analiticamente da una sostituzione lineare i cui moltiplicatori siano p radici dell'unità distinte e tutte appartenenti ad uno stesso esponente r .

È noto ⁽⁶⁾ che l'equazione caratteristica $D(\varrho) = 0$ della sostituzione riemanniana S della matrice di Riemann cui appartiene Γ , sostituzione legata a T , si scinde in due determinate equazioni $\Delta(\varrho) = 0$ e $\bar{\Delta}(\varrho) = 0$, aventi per radici rispettivamente i moltiplicatori sopradetti e i numeri complessi a questi coniugati. Or siccome questi moltiplicatori appartengono, per ipotesi, all'esponente r , anche le radici di $\bar{\Delta}(\varrho) = 0$ apparterranno a questo stesso esponente; ne segue che le radici di $D(\varrho) = 0$ sono ⁽⁷⁾ tutte le radici primitive r^{esimo} dell'unità, onde ⁽⁸⁾ si ha

$$m\varphi(r) = 2p.$$

Ma i p moltiplicatori sono, per ipotesi, tutti distinti, quindi è $\varphi(r) \geq p$, e di conseguenza o $\varphi(r) = p$ ovvero $\varphi(r) = 2p$.

Supporremo sempre che sia $\varphi(r) = 2p$, ipotesi che non implica alcuna restrizione per p dispari.

2. Sia dunque r un numero tale che si abbia $\varphi(r) = 2p$. L'equazione caratteristica $D(\varrho) = 0$ è quindi l'equazione, di grado $2p$, alle radici primitive r^{esimo} dell'unità; ma questa equazione è priva di radici multiple, quindi due qualunque moltiplicatori di T non sono ⁽⁹⁾ numeri complessi coniugati.

⁽⁵⁾ Seguendo il prof. G. Scorza, chiamerò *varietà abeliana* a p dimensioni una varietà (necessariamente algebrica) che ammette una rappresentazione parametrica mediante funzioni abeliane a p variabili indipendenti u_1, u_2, \dots, u_p , appartenenti a una stessa tabella di periodi primitivi $\omega \equiv |\omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \dots, \omega_{j,2p}|$ ($j = 1, 2, \dots, p$), la rappresentazione essendo tale che ad ogni punto della varietà corrisponda, a meno di periodi, un solo gruppo di valori per le variabili u_j . Per $p = 1$ la varietà sarà una curva ellittica; per $p = 2$ la varietà verrà chiamata superficie *iperellittica*.

⁽⁶⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁾, parte I, n. 22.

⁽⁷⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁾, parte I, n. 25.

⁽⁸⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽⁷⁾.

⁽⁹⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽⁶⁾.

3. Siano $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ p radici primitive p^{esimo} distinte dell'unità due qualunque numeri complessi non coniugati; assunte come moltiplicatori della trasformazione T , la varietà abeliana Γ appartiene ⁽¹⁰⁾ ad una matrice riemanniana isomorfa alla matrice

$$\omega = \begin{vmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \dots & \mu_1^{2p-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_2^{2p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \mu_p & \mu_p^2 & \dots & \mu_p^{2p-1} \end{vmatrix}$$

matrice, questa, che è ⁽¹¹⁾ riemanniana. È poi evidente che la varietà abeliana appartenente ad ω , ammette una trasformazione birazionale periodica avente i moltiplicatori $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$.

4. È noto ⁽¹²⁾ che ogni radice dell'equazione caratteristica di un'omografia è anche radice dell'equazione minima di questa (e viceversa); quindi, giacchè l'equazione $D(\varphi) = 0$ è (n. 2) di grado $2p$ e a radici tutte distinte, l'equazione minima dell'omografia relativa alla (n. 1) sostituzione riemanniana S è anch'essa di grado $2p$, onde la matrice ω ha il rango $2p$.

Si osservi inoltre che ⁽¹³⁾ la matrice ω o è impura e priva di assi isolati, ovvero è pura con gl'indici di singolarità e di moltiplicabilità rispettivamente eguali a $p-1$ e $2p-1$.

6. Se ω è impura, i suoi assi puri essendo tutti isomorfi tra loro, saranno tutti dello stesso genere q ($< p$), ove q è ⁽¹⁴⁾ un divisore di p . Il rango di uno qualunque di questi assi è $2q$; infatti ω è isomorfa ⁽¹⁵⁾ ad una matrice composta con p/q matrici riemanniane di genere q , ed è noto ⁽¹⁶⁾ che il rango $2p$ (n. 4) di ω è la somma dei ranghi delle sue matrici componenti.

Per $q = 1$, cioè se gli assi puri di ω sono ellittici, questi avranno dunque ⁽¹⁷⁾ gl'indici di singolarità e di moltiplicabilità rispettivamente eguali a 0 e 1. Ne segue ⁽¹⁸⁾ che indicando con k ed h rispettivamente gl'indici

⁽¹⁰⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁾, parte I, n. 23.

⁽¹¹⁾ Scorza, *Sopra alcune notevoli matrici riemanniane* [Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LIII (1918), pp. 1008-1017].

⁽¹²⁾ G. Frobenius, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 84 (1878)], e *Ueber vertauschbare Matrizen* [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, XXVI (1896)]; C. Rosati, *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* [Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LI (1916), pp. 991-1014], n. 10.

⁽¹³⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹¹⁾, n. 6.

⁽¹⁴⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁾, parte I, n. 47.

⁽¹⁵⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁾, parte I, n. 50.

⁽¹⁶⁾ Scorza, *Il rango di una matrice di Riemann* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI, serie 5^a (1917), pp. 177-182], n. 5.

⁽¹⁷⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁶⁾, n. 4.

⁽¹⁸⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁾, parte I, n. 58.

di singolarità e di moltiplicabilità della matrice impura ω , sarà $k = p^2 - 1$ ed $h = 2p^2 - 1$, cioè ω è ad indici massimi.

Per $q = 2$, cioè se gli assi puri di ω sono iperellittici, questi avranno ⁽¹⁹⁾ i detti indici eguali rispettivamente ad 1 e 3; sarà quindi ⁽²⁰⁾ $k = \frac{p^2 - 2}{2}$ ed $h = p^2 - 1$.

7. Sia p un numero dispari ed $r = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$, con a, b, c, \dots numeri primi; sarà $g(r) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \dots (a-1)(b-1)(c-1) \dots$.

Dovendo (n. 1) essere $\varphi(r) = 2p$, se $a-1$ è un numero pari, sarà $b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \dots (b-1)(c-1) \dots$ un numero dispari, e quindi o tutti i fattori b, c, \dots non esistono, ovvero esiste soltanto b ed inoltre è $b=2$ e $\beta=1$. Nel primo caso è $r=a^\alpha$ con $\alpha > 2$, quindi $\varphi(r) = a^{\alpha-1}(a-1)$ e di conseguenza $p = \frac{1}{2} a^{\alpha-1}(a-1)$. Nel secondo caso è $r = 2a^\alpha$ con $\alpha > 2$, onde p assume lo stesso valore ora detto.

Concludiamo che

se p è un numero dispari, condizione necessaria e sufficiente affinché esista una varietà abeliana Γ , a p dimensioni, dotata di una trasformazione birazionale periodica i cui moltiplicatori siano p radici dell'unità distinte e tutte appartenenti ad uno stesso esponente r , è che sia $p = \frac{1}{2} a^{\alpha-1}(a-1)$ con a numero primo maggiore di 2.

Se, in particolare, p è un numero primo, allora dal valore di p ora trovato si deduce che o è $a^{\alpha-1} = 1$ e quindi $a = 2p + 1$, ovvero è $\frac{1}{2}(a-1) = 1$ e quindi $a = 3$. Dunque se p è un numero primo, la condizione necessaria e sufficiente detta poco sopra, è che anche $2p + 1$ sia un numero primo.

8. Da quanto si disse nel numero precedente possiamo affermare, *p* es., che la varietà abeliana Γ non esiste per $p = 7, 13, 17, 25, 27, 31$.

9. Sia ancora p un numero primo (maggiore di 2).

Per $p = 3$ abbiamo (n. 7) $r = 3^2, 2 \cdot 3^2$, ovvero $r = 7, 2 \cdot 7$ ⁽²¹⁾.

Per $p > 3$, con $2p + 1$ numero primo, è $p = \frac{1}{2}(2p + 1)^{1-1} [(2p + 1) - 1]$ e quindi (n. 7) $r = 2p + 1$, ovvero $r = 2(2p + 1)$. Ma se il periodo di T è $2(2p + 1)$, la trasformazione T^2 avrà il periodo $2p + 1$, dunque si può concludere ⁽²²⁾ che

se $p > 1$ è un numero primo e la varietà abeliana Γ ammette una trasformazione birazionale periodica i cui moltiplicatori siano p radici distinte dell'unità tutte appartenenti ad uno stesso esponente r , essa ammetterà certamente una siffatta trasformazione per la quale è $r = 2p + 1$.

⁽¹⁹⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁶⁾, n. 4; e loc. cit. in ⁽¹⁾, parte II, n. 13.

⁽²⁰⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁾, parte I, n. 55 (III).

⁽²¹⁾ Raciti, loc. cit. in ⁽⁴⁾, n. 1.

⁽²²⁾ Si noti che anche la trasformazione T^2 avrà per moltiplicatori p radici dell'unità distinte e tutte appartenenti allo stesso esponente $2p + 1$.

Matematica. — *Sopra una equazione funzionale*. Nota I di
PIA NALLI, presentata dal Corrisp. BAGNERA ⁽¹⁾.

1. In alcune Memorie sulle equazioni alle derivate parziali è occorso al Goursat di risolvere l'equazione funzionale

$$(1) \quad u(x) = u(\alpha x) + f(x)$$

nella funzione incognita u , α essendo una costante ⁽²⁾.

È essenziale l'ipotesi che sia $|\alpha|$ diverso da 1, ed allora, restando nel campo delle funzioni analitiche, se $f(x)$ è regolare nel punto $x = 0$, affinché la (1) ammetta soluzione finita, è necessario e sufficiente che sia $f(0) = 0$, e precisamente se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

si ha una soluzione prendendo

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - \alpha^n} x^n - c$$

dove c è una costante arbitraria.

Questa anzi è la più generale soluzione analitica regolare nel punto $x = 0$, come si vede eguagliando nei due membri di (1) i coefficienti delle stesse potenze di x .

2. L'idea fondamentale che ci ha guidati nelle ricerche che iniziamo con la presente Nota è di introdurre un parametro λ nella (1) ponendo

$$(2) \quad u(x) = \lambda u(\alpha x) + f(x).$$

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si avrà una soluzione prendendo

$$(3) \quad u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 - \lambda \alpha^n} x^n$$

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1920.

⁽²⁾ Goursat, *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*: 1^{er} Mémoire [Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, II^e série, t. V (1903), pp. 405-436]; 2^e Mémoire [Ibid., II^e série, t. VI (1904), pp. 117-144].

e questa è una funzione analitica di λ che ammette come poli i punti

$$(4) \quad 1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \dots$$

ed è meromorfa se $|\alpha| < 1$.

Per $\lambda = \frac{1}{\alpha^n}$, se vogliamo che la soluzione resti analitica e regolare nel punto $x = 0$, evidentemente occorre e basta che sia $a_n = 0$.

Quando λ è diverso dai valori (4), la (2) ammette soluzione unica (sempre, s'intende, analitica e regolare in $x = 0$); se $\lambda = \frac{1}{\alpha^n}$ ed è $a_n = 0$, la (2) ammette infinite soluzioni che si ottengono aggiungendo alla (3) cx^n con c costante arbitraria; e si osservi che la funzione cx^n soddisfa all'equazione omogenea

$$u(x) = \frac{1}{\alpha^n} u(\alpha x).$$

Ciò ci autorizza a chiamare x^n una *soluzione fondamentale* dell'equazione (2) ed $\frac{1}{\alpha^n}$ la corrispondente *costante caratteristica*.

E così alla serie di Taylor possiamo dare il seguente significato: una funzione $h(x)$, regolare nel punto $x = 0$, si sviluppa in serie di funzioni fondamentali dell'equazione funzionale (2), e la funzione $h(\alpha x)$ si sviluppa in modo analogo, dividendo ogni termine per la corrispondente costante caratteristica.

3. Più generalmente, consideriamo l'equazione

$$u(x) = \lambda g(x) u(\alpha x) + f(x),$$

$g(x)$ ed $f(x)$ essendo funzioni analitiche regolari nel punto $x = 0$, ma qui supponiamo $|\alpha|$ minore di 1.

In seguito stabiliremo l'interessante risultato: se $g(0) = 0$, la soluzione di questa equazione è unica ed è funzione intera di λ ; ed invece se $g(0) \neq 0$, la soluzione è funzione meromorfa di λ che ammette come poli semplici i punti

$$\frac{1}{g(0)}, \frac{1}{\alpha g(0)}, \frac{1}{\alpha^2 g(0)}, \dots$$

In quest'ultimo caso, quando λ non è un polo, la soluzione è unica; se λ è un polo, l'equazione omogenea

$$u(x) = \lambda g(x) u(\alpha x)$$

ammette una soluzione unica a meno di una costante moltiplicativa, e pre-

cisamente, in corrispondenza al polo $\lambda = \frac{1}{\alpha^n g(0)}$, questa soluzione è del tipo $u_n(x) = c x^n u_0(x)$, dove $u_0(x)$ denota la soluzione corrispondente al particolare polo $\frac{1}{g(0)}$, indipendente da α .

Per esempio, se si fa $g(x) = x + 1$, eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x nei due membri dell'equazione omogenea

$$u_0(x) = (x + 1) u_0(\alpha x)$$

che si ha in corrispondenza al polo $\frac{1}{g(0)} = 1$, si trova

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} x^n,$$

a meno di una costante moltiplicativa.

Ritornando al caso generale, la funzione $u_0(x)$ non si annulla per $x = 0$, perchè dalla relazione alla quale soddisfa $u_0(x)$, e cioè

$$g(0) u_0(x) = g(x) u_0(\alpha x),$$

risulta che se fosse $u_0(0) = 0$, tutte le derivate di $u_0(x)$ si annullerebbero per $x = 0$.

Se la $g(x)$ è regolare in un cerchio con centro nell'origine, la $u_0(x)$ è regolare nello stesso cerchio e si annulla solo negli zeri di $g(x)$ e nei punti che si ottengono da questi zeri moltiplicandoli per $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \dots$.

Una funzione $h(x)$ regolare in un cerchio con centro nell'origine si può sviluppare nella serie uniformemente convergente

$$(5) \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n u_n(x),$$

purchè in questo cerchio la $g(x)$ non si annulli. Si intende che in ciascuna u_n si è fissata la costante moltiplicativa.

In base all'equazione funzionale cui soddisfa u_n , si deduce dalla (5)

$$(6) \quad g(x) h(\alpha x) = g(0) \sum_{n=0}^{\infty} h_n \alpha^n u_n(x).$$

Questa equazione mostra che, quando una funzione $h(x)$ è rappresentata sotto la forma (5), l'operazione funzionale $g(x) h(\alpha x)$ eseguita sopra la funzione $h(x)$, equivale a dividere i vari termini dello sviluppo per le corrispondenti costanti caratteristiche. Nel caso di $g(x) \equiv 1$ abbiamo visto che lo sviluppo (5) diviene lo sviluppo in serie di potenze di x .

Meccanica. — *Forze di pressione su un montante di aeroplano.* Nota II di MARIO PASCAL, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO ⁽¹⁾.

Nella Nota precedente ⁽²⁾, abbiamo ottenuto da una circonferenza, mediante rappresentazioni conformi, un profilo che abbiamo assunto come quello della sezione retta di un montante di aeroplano. Vogliamo ora procedere al calcolo della forza sostentatrice.

1. Supponiamo di esporre la circonferenza iniziale ad una corrente piana parallela data da

$$(1) \quad F = -V_0 z - k/z + ik \log z/\pi,$$

dove k è una costante e V_0 la velocità limite, e che è una corrente piana parallela modificata dall'incontro di un ostacolo circolare di raggio unitario e da un vortice il cui asse passa per l'origine delle coordinate (centro della circonferenza ostacolo) ⁽³⁾. Per tale corrente la circuitazione delle velocità lungo il contorno dell'ostacolo è, come è facile calcolare,

$$(2) \quad C = 2k = 4\pi V_0 \sin \theta,$$

l'angolo θ individuando la posizione di entrambi i punti critici di velocità nulla sulla circonferenza, quando si assuma come polo il centro di questa e come asse polare la parallela condotta dal polo alla direzione della velocità limite.

Immaginiamo inoltre che la corrente (1) investa la circonferenza ostacolo in modo che la direzione della velocità limite sia parallela alla retta BA, ed abbia il senso della freccia. Sia γ l'angolo che BA fa con la direzione positiva dell'asse delle x , e siano B ed A i punti critici di velocità nulla: si vede facilmente, tenendo presenti le particolarità della compiuta trasformazione, che i punti a e b del profilo del montante sono quelli che corrispondono ad A e a B, e che sono anch'essi punti critici.

Facciamo ora l'ipotesi che la relazione

$$z = F(w)$$

⁽¹⁾ Presentata all'Accademia il 4 giugno 1920.

⁽²⁾ Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1° sem., pag. 448.

⁽³⁾ Cfr. N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki], Paris, Gauthier Villars, 1916.

sia tale che, all'infinito, la F diventi una semplice funzione lineare, cioè che all'infinito si abbia

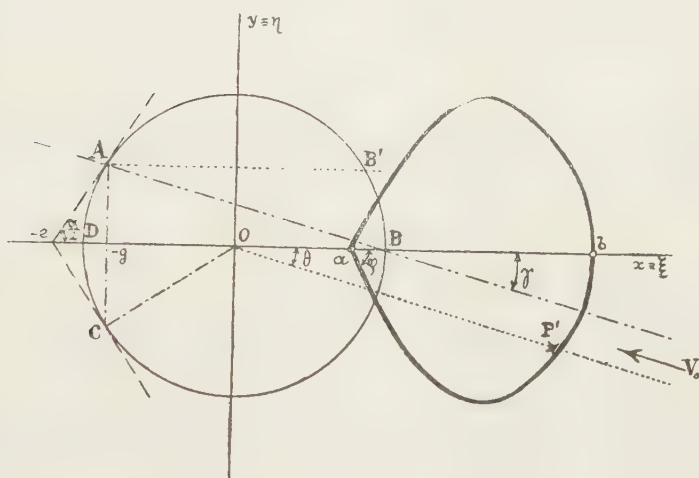
$$z = \lambda w;$$

se allora è V_0 la velocità limite della corrente data, la corrispondente velocità limite della corrente trasformata sul piano w sarà ⁽¹⁾

$$V'_0 = \lambda V_0,$$

dove

$$\lambda = dz/dw.$$



Dalla espressione (5) della Nota precedente, che è quella della funzione che ci fa passare dal piano z al piano w , per un valore grandissimo di z , si ha

$$w = gz + 2$$

e perciò

$$V'_0 = V_0/g$$

che è l'espressione della velocità limite della corrente trasformata sul piano w .

Osserviamo ora che, per le condizioni cui soddisfano le costanti e, g , le tangenti condotte dal punto $(-e, 0)$ alla circonferenza data, toccano questa nei punti A e C, intersezioni della circonferenza con la retta perpendicolare all'asse reale e di ascissa $-g$. Se diciamo perciò $\alpha/2$ l'angolo che ciascuna delle due tangenti fa con l'asse x , si vede senza difficoltà che è

$$(3) \quad g = \text{sen}(\alpha/2)$$

⁽¹⁾ N. Joukowski, loc. cit., pag. 143.

e perciò

$$(4) \quad V_0 = V'_0 \sin(\alpha/2).$$

L'espressione della forza sostentatrice, che agisce sul montante di aeroplano, è dunque

$$(5) \quad P = 4\pi\rho V_0'^2 \sin(\alpha/2) \sin\theta$$

in cui ρ è la densità del fluido.

2. Possiamo far vedere come la forza sostentatrice (5) dipenda dalla speciale forma di profilo che si è considerata.

Dalla relazione esistente fra le costanti g ed a (v. Nota I), e tenendo presente il valore (3) di g , si ha

$$(6) \quad a = 4 \cos^2(\alpha/2).$$

D'altra parte la tangente trigonometrica dell'angolo, che ciascuna delle due tangenti alla curva nel punto doppio fa con l'asse reale, è, come sappiamo,

$$\operatorname{tg} \varphi = [4/a - 1]^{1/2},$$

da cui, sostituendovi il valore (6), si ottiene

$$\operatorname{tg} \varphi = [4 - 4 \cos^2(\alpha/2)]^{1/2} [4 \cos^2(\alpha/2)]^{-1/2} = \operatorname{tg}(\alpha/2).$$

Questo risultato ci mostra che l'angolo interno, sotto il quale si tagliano i due rami simmetrici della curva da noi presa in esame, è uguale all'angolo sotto il quale si incontrano le due tangenti condotte dal punto $(-e, 0)$ alla circonferenza fondamentale.

Si può quindi dire che il valore della forza sostentatrice, agente sul montante da noi considerato, dipende, oltre che dalla posizione dei punti critici di velocità nulla, anche dall'angolo sotto il quale i due rami simmetrici del contorno si incontrano posteriormente.

La forza sostentatrice è nulla se $\theta = 0$ o se $\alpha/2 = 0$.

Il primo caso si verifica se la congiungente i due punti critici viene a passare per il polo, cioè per il centro della circonferenza fondamentale. Se supponiamo per es. che il punto critico A si sposti fino a raggiungere il punto D, saranno nulli gli angoli θ e γ , e quindi la forza sostentatrice. Sul profilo del montante i due punti critici si riunirebbero in b . La resistenza totale verrebbe ad essere costituita unicamente dalla sua seconda componente che è nella direzione e nel senso della velocità limite.

Il secondo caso si ha invece quando l'angolo posteriore 2φ del montante è tanto piccolo che può praticamente considerarsi nullo, vale a dire quando il profilo del montante è molto affilato posteriormente.

Se, come abbiamo supposto in principio, i due punti critici sulla primitiva circonferenza ostacolo risultano essere A e B, si può dare alla espres-

sione (5) di P un'altra forma. È infatti chiaro che in questo caso è $\theta = \gamma$ e quindi

$$(7) \quad P = 4\pi\varrho V_0'^2 \sin(\alpha/2) \sin \gamma;$$

e notando che

$$\pi - \gamma = \pi/2 + \alpha/2 + \gamma,$$

si ricava

$$\gamma = \pi/4 - \alpha/4;$$

cosicchè anche l'angolo γ viene a farsi dipendere dall'angolo α , cioè dalla forma del profilo che si considera.

Se poi immaginiamo che, modificandosi la direzione della corrente, il punto A rimanga punto critico, ma il punto critico B si sposti fino ad assumere la posizione B', si avrà

$$\theta = \pi/2 - \alpha/2$$

ed allora

$$(8) \quad P = 2\pi\varrho V_0'^2 \sin \alpha:$$

in tal caso dunque la forza sustentatrice non dipende più che dalla forma dell'ostacolo.

È bene però avvertire che le formole (7) e (8) valgono soltanto nel caso in cui i punti critici assumano le posizioni che sono state supposte.

3. Per completare il nostro studio, troviamo il momento della forza (5) rispetto al punto O, centro della circonferenza iniziale.

Se la corrente fluida è data mediante una funzione $F = \varphi + i\psi$ della variabile complessa z , e si opera una trasformazione conforme mediante una funzione $w = f(z)$, l'espressione generale del momento rispetto all'origine delle coordinate è stata data dal Joukowski ⁽¹⁾ sotto la forma

$$(9) \quad M_0 = p. r. [\varrho/2 \int \{dF/dz\}^2 w/(dw/dz)] dz$$

in cui, come è noto,

$$dF/dz = d\varphi/dx + i d\psi/dy = u - iv,$$

u e v essendo le componenti, secondo gli assi, delle velocità.

Osserviamo che, qualunque sia θ , se d è il valore di z che compete ad uno dei punti critici, sarà $-1/d$ il valore di z che corrisponde all'altro; detto allora γ l'angolo che la direzione della velocità limite V_0 fa con la direzione positiva dell'asse x , supponiamo che si abbia

$$(10) \quad dF/dz = -V_0(z-d)(z+1/d)(\cos \gamma + i \sin \gamma)/z^2.$$

Per $z = d$ e $z = -1/d$, questa formola ci dà $u = v = 0$; mentre, per $z = \infty$, si ottiene

$$u = -V_0 \cos \gamma \quad ; \quad v = V_0 \sin \gamma,$$

(1) N. Joukowski, loc. cit., pag. 171.

risultati conformi alle ipotesi precedenti. Per tali considerazioni sarà dunque perfettamente lecito servirsi della (10).

Dalla

$$w = (gz^2 + 2z + g)/(z + g) + u(z + g)/(gz^2 + 2z + g),$$

che è la funzione mediante la quale si ottiene il profilo di montante (ved. Nota I), si ricava

$$dw/dz = (gz^2 + 2gz + g)[(gz^2 + 2z + g)^2 - u(z + g)]/(z + g^2)(gz^2 + 2z + g)^2.$$

Pertanto, la funzione che figura sotto il segno d'integrale nella (9) sarà

$$(11) \quad \left\{ \frac{dF}{dz} \right\}^2 w / (dw/dz) = \\ = V_0^2 e^{2i\gamma} (z - d)^2 (z + 1/d)^2 (z + g) (gz^2 + 2z + g) / z^4 (gz^2 + 2gz + g).$$

La ricerca del momento M_0 si riduce ora al calcolo dei residui relativi ai poli della precedente funzione, quando si supponga che essa possa prolungarsi nell'interno del contorno che si considera ⁽¹⁾.

Eseguito le operazioni che sono indicate, ci si convince facilmente che la funzione (11) ha, nel punto $z = 0$, un polo di primo ordine, il cui residuo è

$$(12) \quad R = 2g^2 - 2hg + 4h/g + (k - 6)$$

in cui si è posto

$$\begin{aligned} 1/d - d &= h = -2i \sin \theta \\ 1/d^2 + d^2 &= k = 2 \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Per cose note della teoria delle funzioni analitiche, si ha perciò, sostituendo nella (9),

$$M_0 = \text{p. r.} [i\pi q V_0^2 e^{2i\gamma} R],$$

dalla quale, con facili calcoli ed introducendo il valore P della forza sostenitrice, si ottiene

$$(13) \quad M_0 = P [H \cos 2\gamma - K \sin 2\gamma],$$

avendo posto

$$\begin{aligned} H &= 2 - g^2 \\ K &= (g^3 - 3g + g \cos 2\theta) / 2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Fissati gli angoli γ e θ , può senza difficoltà calcolarsi graficamente il segmento espresso dal coefficiente di P nella (13), e così determinare il punto P' di applicazione della forza sostenitrice, cioè il centro teorico di pressione.

⁽¹⁾ P. Burgatti, *Sopra un teorema del Joukowski relativo alla forza sostenitrice nei corpi in moto traslatorio uniforme entro un fluido* (Rend. Acc. delle scienze di Bologna, a. 1917-18).

Matematica. — *Sulle congruenze di sfere di Ribaucour che ammettono una deformazione finita*. Nota del prof. L. P. EISENHART (a Princeton), presentata dal Socio L. BIANCHI ⁽¹⁾.

Quando un sistema di sfere dipende da due parametri, il suo involuppo consta, in generale, di due falde: S ed S_1 , e i centri delle sfere giacciono sopra una superficie S_0 . Fra le due superficie S, S_1 è stabilita una corrispondenza, facendo corrispondere i due punti di contatto di una medesima sfera (coll'involuppo). Se le linee di curvatura si corrispondono sopra S, S_1 , si dirà che queste due superficie sono nella relazione di una trasformazione di Ribaucour, o, più brevemente, in *relazione* R . In questo caso le curve di S_0 che corrispondono alle linee di curvatura di S, S_1 , formano un sistema coniugato o *reticolo*, e la relativa equazione di Laplace ammette come soluzioni R e $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$, dove x_0, y_0, z_0 indicano le coordinate del punto mobile su S_0 , ed R denota il raggio della sfera. Inversamente, se l'equazione di Laplace relativa ad un reticolo N_0 (a cui soddisfano x_0, y_0, z_0) ammette la soluzione R ed insieme l'altra $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$, le sfere coi centri sopra S_0 e di raggio R formano una congruenza di Ribaucour. Nelle notazioni di Guichard, il reticolo N_0 è $2, O$ ed R è la funzione complementare.

L'autore della presente Nota ha considerato il problema ⁽²⁾ di trovare le trasformazioni di Ribaucour tali che S_0 ammetta una superficie applicabile \bar{S}_0 in guisa che il sistema coniugato permanente su S_0, \bar{S}_0 sia un reticolo $2, O$ per ambedue, la funzione complementare R rimanendo la stessa nei due casi. Si è trovato che, in questo caso, S e S_1 hanno a comune la immagine sferica con due superficie isoterme S' e S'_1 , nella relazione di una trasformazione D_m di Darboux; e, viceversa, ogni trasformazione D_m di una superficie isoterma S' porta ad una tale trasformazione di Ribaucour di una superficie S , avente a comune con S' l'immagine sferica delle linee di curvatura. Questo risultato è stato ottenuto anche da Calapso ⁽³⁾. Mi propongo nella presente Nota di stabilire delle trasformazioni di reticoli applicabili $2, O$ in reticoli della stessa specie.

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1920.

(2) Transactions of Amer. Math. Soc., vol. 17 (1916), pp. 437-458.

(3) Annali di matematica, serie 3^a, vol. 26 (1917), pp. 151-190. Ved. anche Bianchi, Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1918, § 53 (serie 5^a, vol. X).

Se $N(x)$ è un reticolo coniugato, e la relativa equazione di Laplace (per coordinate di punto) si scrive

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log a}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \log b}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

ogni coppia di soluzioni h, l del sistema

$$(2) \quad \frac{\partial h}{\partial v} = (l - h) \frac{\partial \log a}{\partial v}, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = (h - l) \frac{\partial \log b}{\partial u}$$

è tale che risultano compatibili le equazioni

$$(3) \quad \frac{\partial x'}{\partial u} = h \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = l \frac{\partial x}{\partial v},$$

e le analoghe in y, z , e le x', y', z' sono le coordinate di un reticolo N' parallelo ad N . Se θ è una soluzione di (1), e θ' la corrispondente soluzione dell'equazione di Laplace per N' , definita da

$$(4) \quad \frac{\partial \theta'}{\partial u} = h \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial v} = l \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

allora le funzioni x_1, y_1, z_1 definite dalle formole

$$(5) \quad x_1 = x - \frac{\theta}{\theta'} x', \text{ ecc.}$$

sono le coordinate di un reticolo N_1 , tale che le sviluppabili della congruenza C_1 delle rette congiungenti i punti corrispondenti di N, N_1 tagliano le superficie S, S_1 sulle quali giacciono N, N_1 appunto in questi reticoli. Diciamo allora che N_1 è un reticolo *trasformato per una T* di N ⁽¹⁾.

Se N ammette un reticolo applicabile $\bar{N}(\bar{x})$, il reticolo $\bar{N}'(\bar{x}')$ le cui coordinate sono date da

$$(6) \quad \frac{\partial \bar{x}'}{\partial u} = h \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{x}'}{\partial v} = l \frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

è parallelo ad \bar{N} ed applicabile sopra N' . in ordine al teorema di Peterson. Secondo il teorema di König, l'equazione di Laplace, comune a \bar{N}' e N' , ammette la soluzione

$$(7) \quad \theta' = \Sigma x'^2 - \Sigma \bar{x}'^2.$$

Questa soluzione θ' e la corrispondente soluzione θ dell'equazione comune a N e \bar{N} , data dalle (4), sono tali che il reticolo $\bar{N}_1(\bar{x}_1)$, le cui coor-

(1) Transactions of Amer. Math. Soc., vol. 18 (1917), pag. 109.

dinate $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ sono date da

$$(8) \quad \bar{x}_1 = \bar{x} - \frac{\theta}{\theta'} \bar{x}', \text{ ecc.}$$

è trasformato per una T di \bar{N} ed è applicabile sopra N_1 ⁽¹⁾.

Si può dimostrare che se N è un reticolo $2, O$, la funzione complementare essendo R , ogni reticolo parallelo è anche $2, O$ e la funzione complementare R' è data per quadrature della forma (4). In particolare due di questi reticoli paralleli N' sono tali che si ha

$$(9) \quad \Sigma x'^2 - R'^2 = 0;$$

questi chiamiamo *reticoli speciali* $2, O$. Il teorema seguente può stabilirsi senza difficoltà:

Se N è un reticolo $2, O$, ed N' un reticolo parallelo non speciale, risulta determinato con una quadratura un reticolo N_1 che è $2, O$, e trasformato per una T di N ; se N' è speciale, qualunque soluzione dell'equazione di Laplace per N determina un reticolo $2, O$ trasformato per una T .

Nel primo caso si ha

$$(10) \quad \theta' = \frac{1}{2} (\Sigma x'^2 - R'^2).$$

Ritorniamo alla considerazione di reticoli applicabili $2, O$. Se S' e S'_1 sono superficie isoterme in relazione D_m , il reticolo centrale N'_0 ammette un reticolo applicabile speciale \bar{N}'_0 , pel quale

$$(11) \quad \Sigma \bar{x}'_0{}^2 - R'^2 = 0.$$

Consideriamo un reticolo N_0 parallelo ad N'_0 , ed effettuiamo la trasformazione T di N_0 per mezzo di $\theta' = \frac{1}{2} (\Sigma x'_0{}^2 - R'^2)$, e sia $N_{0,1}$ il reticolo $2, O$ così ottenuto. A causa della (11) abbiamo

$$\theta' = \frac{1}{2} (\Sigma x'_0{}^2 - \Sigma \bar{x}'_0{}^2).$$

Quindi, se applichiamo questa trasformazione a \bar{N}_0 , applicabile su N_0 otteniamo un reticolo $\bar{N}_{0,1}$ applicabile su $N_{0,1}$ e, pel precedente teorema, ambedue questi reticoli sono $2, O$. Per trovare questa trasformazione è necessario calcolare la corrispondente funzione θ colla quadratura (4). Dunque:

Se è noto un reticolo $2, O$ che ammette un reticolo applicabile, si può trovare con una quadratura un'altra coppia di reticoli di questa specie.

È evidente che questo procedimento può ripetersi.

(1) Transactions of Amer. Math. Soc., vol. 19 (1918), pp. 167-185.

Fisica matematica. — *Teoria del condensatore elettrico a piatti circolari*. Nota I di ROCCO SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (¹).

Sia un condensatore elettrico a piatti circolari, di eguale raggio, normali alla linea congiungente i loro centri. Detti piatti (che si intendono isolati tra loro) sieno portati rispettivamente ai potenziali V_1, V_2 , col metterli in contatto di due sorgenti. Si tratta di determinare il potenziale in ogni punto dello spazio.

Del problema, a quanto mi consta, ci sono due soluzioni, entrambe approssimate. La prima, notissima (si trova in qualunque trattato di fisica elementare), considera i piatti come indefinitamente estesi ed è valida nella parte centrale del condensatore. L'altra, più approssimata, è ottenuta dal Kirchhoff, con molte ipotesi restrittive, nelle sue lezioni di elettricità e magnetismo, dividendo il campo in più regioni e facendo uso della rappresentazione conforme mediante la teoria delle funzioni di variabile complessa (²).

Io riattacco il problema (evidentemente simmetrico rispetto alla retta congiungente i centri dei piatti) alla teoria delle funzioni armoniche simmetriche del Beltrami. Nella presente Nota, dopo aver richiamate alcune formole preliminari, riduco il problema a due equazioni integrali di Fredholm (di 2^a specie). Mostrerò in una Nota successiva come queste si possano risolvere.

L'unica ipotesi restrittiva ch'io mantengo è che sia nullo lo spessore dei piatti.

1. POSIZIONE DEL PROBLEMA - DECOMPOSIZIONE IN DUE ALTRI. — Sia l la distanza dei due piatti, a il loro raggio. Prendiamo come asse z la retta congiungente i centri e per piano xy il piano mediano dello strato. I piatti saranno allora nei piani $z = l/2$, $z = -l/2$.

Siano V_1, V_2 i rispettivi potenziali noti. Basterà allora risolvere il problema nei seguenti due casi:

1°) $V_1 = -V_2 = 1$, diciamo φ_1 la relativa funzione potenziale;

2°) $V_1 = V_2 = 1$, diciamo φ_2 la nuova funzione potenziale.

(¹) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1920.

(²) Vedi G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Electricität und Magnetismus*. Herausgegeben von dott. M. Plank, Leipzig, Teubner, 1891 (Achte Vorlesung).

Allora il potenziale V nel problema generale è dato da

$$(1) \quad V = \varphi_1 \frac{V_1 - V_2}{2} + \varphi_2 \frac{V_1 + V_2}{2},$$

come è facile verificare.

Si osservi che φ_1, φ_2 devono essere funzioni armoniche in tutto lo spazio, simmetriche rispetto all'asse z ed annullarsi insieme colle derivate prime e seconde all' ∞ : inoltre le loro derivate normali, secondo z , devono presentare discontinuità solo attraverso i piatti del condensatore.

Posto $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, la funzione

$$(2) \quad \varphi = \int_0^\infty e^{\mp(z-h)s} I_0(rs) \psi(s) ds,$$

dove $I_0(s)$ è la funzione cilindrica di Bessel di prima specie e di ordine zero e dove si deve prendere il segno \mp secondochè $z \geq h$, soddisfa alle seguenti condizioni ⁽¹⁾: è simmetrica rispetto all'asse z , è armonica in tutto lo spazio e si annulla all' ∞ insieme colle sue derivate; inoltre la sua derivata rispetto a z presenta, attraverso il piano $z = h$, una discontinuità che, a meno di un fattore costante, è data da

$$\int_0^\infty I_0(rs) s \psi(s) ds.$$

Cosicchè, se la $\psi(s)$ è sottoposta alla condizione

$$(3) \quad \int_0^\infty I_0(rs) s \psi(s) ds = 0 \quad \text{per } r > a,$$

la discontinuità nella derivata normale si ha soltanto attraverso il disco di raggio a col centro in $r = 0, z = h$. Del tipo (2) saranno appunto le nostre funzioni incognite φ_1, φ_2 .

2. DETERMINAZIONE DI φ_1, φ_2 MEDIANTE DUE SISTEMI DI EQUAZIONI INTEGRALI. — Poniamo

$$(4) \quad \varphi_1 = \int_0^\infty \left(e^{\mp(z-\frac{l}{2})s} - e^{\mp(z+\frac{l}{2})s} \right) I_0(rs) \psi_1(s) ds$$

dove si dovranno opportunamente scegliere i segni \mp in corrispondenza alle tre regioni in cui i piani $z = \frac{l}{2}, z = -\frac{l}{2}$ dividono lo spazio: e precisamente secondochè $z \geq \frac{l}{2}$ il primo termine nella parentesi avrà segno \mp :

⁽¹⁾ Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, Mem. Accad. Bologna, serie IV, tomo II, 1881.

e il secondo il segno \mp secondochè $z \geq -\frac{l}{2}$. Cosicchè per es. per

$$-\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2}$$

si dovrà porre

$$\varphi_1 = \int_0^\infty \left(e^{+(z-\frac{l}{2})s} - e^{-(z+\frac{l}{2})s} \right) I_0(rs) \psi_1(s) ds.$$

Siccome le derivate normali devono presentare discontinuità solo sui dischi, deve essere

$$(A) \quad \int_0^\infty I_0(rs) s \psi_1(s) ds = 0 \quad \text{per } r > a.$$

Le condizioni che per $z = \frac{l}{2}$ e $z = -\frac{l}{2}$ con $r < a$, cioè sui dischi, si abbia rispettivamente $\varphi_1 = 1$, $\varphi_1 = -1$, si riducono all'unica

$$(A_1) \quad \int_0^\infty (1 - e^{-is}) I_0(rs) \psi_1(s) ds = 1 \quad \text{per } r < a.$$

La funzione $\psi_1(s)$ sarà da determinarsi mediante le due equazioni (A) e (A₁).

Analogamente potremo porre

$$(5) \quad \varphi_2 = \int_0^\infty \left(e^{+(z-\frac{l}{2})s} + e^{-(z+\frac{l}{2})s} \right) I_0(rs) \psi_2(s) ds,$$

colla solita avvertenza relativa ai doppi segni.

Dovrà poi essere, come precedentemente,

$$(B) \quad \int_0^\infty I_0(rs) s \psi_2(s) ds = 0, \quad \text{per } r > a;$$

e volendo che per $z = \frac{l}{2}$ oppure $z = -\frac{l}{2}$ e con $r < a$ (cioè sui dischi) sia $\varphi_2 = 1$, otteniamo l'altra condizione

$$(B_1) \quad \int_0^\infty (1 + e^{-is}) I_0(rs) \psi_2(s) ds = 1 \quad \text{per } r < a.$$

3. RIDUZIONE AD UN'UNICA EQUAZIONE DI FREDHOLM. — Consideriamo il sistema delle due equazioni (A) e (A₁), cui soddisfa $\psi_1(s)$, e scriviamolo sotto la forma

$$(6) \quad \int_0^\infty I_0(rs) s \psi_1(s) ds = 0 \quad r > a,$$

$$(7) \quad \int_0^\infty I_0(rs) \psi_1(s) ds = 1 + \int_0^\infty e^{-is} I_0(rs) \psi_1(s) ds \quad r < a,$$

e supponiamo, per un momento, noto il secondo membro della (7). Poniamo inoltre nei primi membri delle (6) e (7)

$$(8) \quad \psi_1 = \psi'_1 + \psi''_1.$$

Possiamo allora considerare i due sistemi

$$(9) \quad \int_0^\infty I_0(rs) s \psi'_1(s) ds = 0 \quad \text{per } r > a, \quad \int_0^\infty I_0(rs) \psi'_1(s) ds = 1 \quad \text{per } r < a,$$

$$(10) \quad \begin{cases} \int_0^\infty I_0(rs) s \psi''_1(s) ds = 0 & \text{per } r > a, \\ \int_0^\infty I_0(rs) \psi''_1(s) ds = \int_0^\infty e^{-rs} I_0(rs) \psi_1(s) ds & \text{per } r < a. \end{cases}$$

Di entrambi il Beltrami ha dato la soluzione, e precisamente ha trovato ⁽¹⁾

$$(11) \quad \psi'_1(s) = \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen } as}{s},$$

$$(12) \quad \psi''_1(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ru} \psi_1(u) \left[\frac{\text{sen}(u+s)a}{u+s} + \frac{\text{sen}(u-s)a}{u-s} \right] du.$$

Sostituiamo in quest'ultima nel primo membro, al posto di ψ''_1 , il suo valore $\psi_1 - \psi'_1$ mediante la (8) e quindi, per ψ'_1 , il valore dato da (11): otteniamo così per $\psi_1(s)$ l'equazione di Fredholm di 2^a specie

$$(A_2) \quad \begin{aligned} \psi_1(s) &= \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen } as}{s} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ru} \psi_1(u) \left[\frac{\text{sen}(u+s)a}{u+s} + \frac{\text{sen}(u-s)a}{u-s} \right] du. \end{aligned}$$

In modo perfettamente analogo si ricava dal sistema (B) (B₁) la seguente equazione integrale per $\psi_2(s)$:

$$(B_2) \quad \begin{aligned} \psi_2(s) &= \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen } as}{s} - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ru} \psi_2(u) \left[\frac{\text{sen}(u+s)a}{u+s} + \frac{\text{sen}(u-s)a}{u-s} \right] du. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Vedi Beltrami, loc. cit., § 6.

Fisica. — *Sui centri di assorbimento delle soluzioni colorate* ⁽¹⁾. Nota del dott. EMILIO ADINOLFI, pres. dal Corrisp. M. CANTONE ⁽²⁾.

I dati sperimentali sugli spettri di assorbimento, per quanto numerosi, sono sempre affetti da incertezze dipendenti dalle difficoltà che s'incontrano nell'individuare i centri delle bande: e a tali spettri non spetta compito meno importante che non a quelli di emissione, per le relazioni che possono dedursi fra essi e la costituzione chimica delle sostanze.

Il metodo generalmente adottato per lo studio spettrografico dell'assorbimento delle soluzioni, che consiste nel raccogliere sulla stessa lastra fotografica una successione di spettri corrispondenti a spessori diversi della soluzione o a concentrazioni variabili della sostanza assorbente, presenta l'inconveniente della discontinuità nelle curve di assorbimento. Per tale ragione, non sempre si presta per individuare centri di debole eccitazione, in quanto che questi per piccole concentrazioni scompaiono e con forti concentrazioni si confondono con i centri vicini. Da questo punto di vista è da preferirsi il metodo di Gladstone; ma un mezzo, in alcuni casi meglio rispondente allo scopo, che dà curve continue di assorbimento, mi è parso quello che si effettua facendo passare la luce, prima della incidenza sulla fenditura dello spettrografo, attraverso concentrazioni della sostanza in soluzione regolarmente decrescenti per diffusione. L'esperienza si realizza adoperando un comune tubo da saggio ⁽³⁾ che funziona anche da lente. La soluzione si fa arrivare al fondo del tubo contenente il solvente, mediante un imbuto capillare.

Dopo che si è disposto il recipiente così preparato, con la superficie di separazione fra il solvente e la soluzione in direzione normale alla fenditura, si nota nel campo dello spettrografo, prima che la diffusione abbia inizio, un netto distacco fra la parte dello spettro assorbito e quella corrispondente al solo solvente. Con l'iniziarsi della diffusione, spuntano i centri di assorbimento successivamente in dipendenza della loro intensità e si distribuiscono secondo una curva che è funzione della lunghezza d'onda, della intensità di assorbimento e del gradiente di concentrazione. Intanto, per il modo stesso col quale il fenomeno della diffusione procede, le ordinate delle curve dei centri variano con continuità. Il pregio del metodo consiste nel poter scegliere un opportuno gradiente di concentrazione per aver tutti i massimi di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 giugno 1920.

(3) Con il recipiente cilindrico, mentre si hanno immagini distinte per i piani orizzontali corrispondenti alle diverse densità, si raccoglie nella linea focale tutta l'energia luminosa trasmessa dalla soluzione; lo si è perciò preferito alle sottili vaschette.

assorbimento dati dalla soluzione con una sola fotografia, tenendo presente che la legge che regola la variazione della concentrazione da strato a strato in questo studio, avente di mira di individuare la posizione dei massimi di assorbimento e la corrispondente intensità relativa, costituisce un fattore secondario.

* * *

Le soluzioni prese in esame sono state quelle dei permanganati di potassio e di calcio. Nei numerosi lavori eseguiti sull'assorbimento dei permanganati si rilevano discordanze nei riguardi del numero delle bande, della posizione del massimo, della influenza della dissociazione. Misure fotometriche sono state eseguite da Lecoq, Vierodt, Pulfrich, Stöckl e altri ⁽¹⁾; ciò malgrado, la posizione delle prime bande in ispecie (computate a partire dalle lunghezze d'onda maggiori) non è accertata. Le differenze fra le diverse misure sono dell'ordine di grandezza di 50 U. A.

Le fotografie sono state eseguite con lastre pancromatiche della casa Wratten e Wainwright, sensibilizzate sino a 750 μ . μ . Dall'esame di una lunga serie di negative ottenute con diverse concentrazioni iniziali, ho potuto rilevare quanto segue:

1°) gli spettri di assorbimento dei permanganati di K e di Ca presentano otto centri di assorbimento;

2°) il terzo centro, la cui lunghezza d'onda è di 5255 U. A., ha la intensità massima;

3°) fra gli spettri di assorbimento dei due permanganati si riscontra, nei limiti delle misure eseguite, perfetta identità, e nella posizione e numero dei centri, e nella posizione del massimo.

Della prima serie di fotografie, che qui si presentano, le prime due si riferiscono a soluzione di $\text{Ca}(\text{MnO}_4)_2$, le altre due a soluzione di KMnO_4 con concentrazione iniziale dell'1 % ⁽²⁾.

Nella tabella seguente sono riportate le misure da me eseguite e quelle del Formánek, Lecoq, Bremer, Pulfrich, Christiansen.

	Adinolfi	Formánek	Lecoq	Bremer	Pulfrich	Christiansen
1	5710	5710	5703	5749	5705	567
2	5475	5473	5465	5509	4771	546
3	5255	5226	5245	5240	5250	523
4	5055	5054	5045	5048	5054	504
5	4875	4870	4861	4864	4911	
6	4695	4707	4694	4694		
7	4540	4540	4543	4543		
8	4390	4395				

(1) Kaiser, in: Handbuch der Spektroskopie, vol. III, pag. 415.

(2) Nella riproduzione litografica le fotografie hanno perduto in nettezza.

Le bande classificate in ordine alle loro intensità si succedono nel modo seguente: 5255, 5055, 5475, 4870, 5710, 4695, 4540, 4390. La seconda serie di fotografie mette in rilievo la scomparsa dei centri più deboli con il diminuire della concentrazione. Alla concentrazione del 0.25 % la banda 4390 manca (fotografie 1 e 2); con soluzioni all' 1 % scompare il 7° centro che è ancora visibile alla concentrazione del 2 ‰ (fot. 3 e 4).

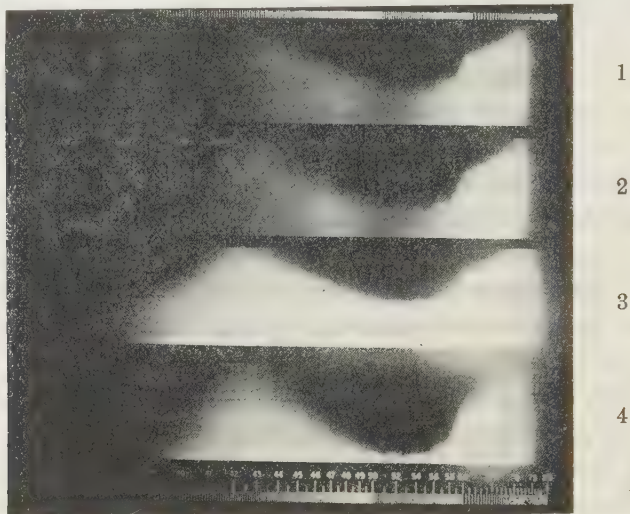


FIG. 1.

Degno di rilievo è il fatto che tra le frequenze degli otto centri di assorbimento vi è una differenza costante; sì che la serie di bande dei due permanganati esaminati può essere rappresentata dalla relazione

$$\nu = \nu_m \pm kn,$$

dove ν_m rappresenta la frequenza del massimo dei centri, k è una costante uguale a 753, n la serie dei numeri interi da -2 a $+5$. Tale relazione, che è la forma più semplice della funzione generale $\Delta\nu = f(n)$ che lega le differenze di frequenze ai numeri di ordine di una serie spettrale, collega lo spettro di assorbimento dei permanganati con altri di serie organiche (studiati da Baly, Hartley, Cobletz, V. Henry ecc.), e con quelli di fluorescenza de' sali di uranile studiati dal Cantone. Una formula dello stesso tipo danno Baly e Garrett ⁽¹⁾ per gli spettri di assorbimento dell'anidride solforosa e dell'idrogeno solforato.

La formola indicata trova riscontro anche nelle considerazioni del

(¹) Phil. Mag. 1915, vol. 31, pag. 861.

Deslandres ⁽¹⁾ sulla costituzione dell'atomo e sulla proprietà degli spettri di bande, poichè egli comprende tutte le serie in una formola generale da cui deriva quella di emissione del tipo $r = B \pm kn^2$ e quelle di assorbimento con termini al primo grado. L'annesso specchietto riporta i risultati numerici delle misure direttamente eseguite per le lunghezze d'onda e quelli dedotti dalla già espressa relazione: $\nu = 19030 \pm 753 n$.

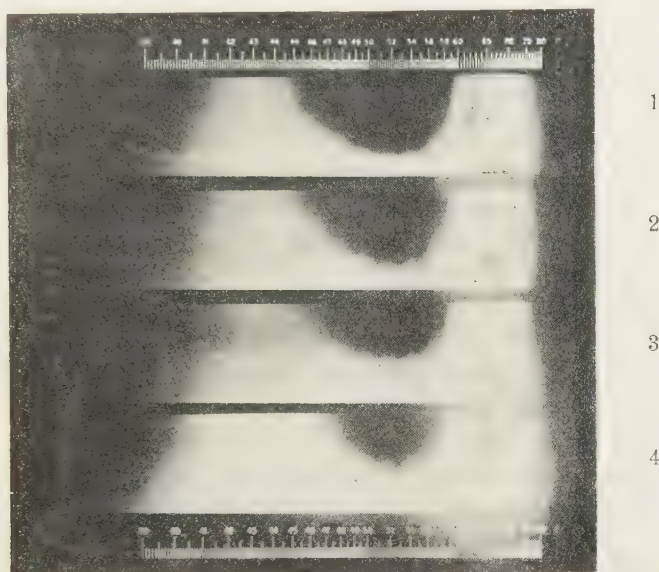


FIG. 2.

λ misurate . . .	5710	5475	5255	5055	4875	4695	4540	4390
λ calcolate . . .	5706	5472	5255	5055	4871	4699	4538	4388
differenze . . .	+ 4	+ 3	+ 4	- 4	+ 2	+ 2

Dal confronto fra le due serie di valori emerge che le differenze rientrano nei limiti degli errori di osservazione, sì che si può concludere che tali risultati rientrano nell'ordine delle deduzioni teoriche del Deslandres.

⁽¹⁾ Comptes Rendus, tom. 168, maggio 1919, pag. 861; id. id. id., giugno 1919, pag. 1179; id. id. id., 169, ottobre 1919, pag. 593; id. id. id., 169, novembre 1919, pag. 743.

Chimica. — *Nitroderivati e nitroidrazoni* (*). Nota II di R. CIUSA e L. VECCHIOTTI (**), presentata dal Socio G. CIAMICIAN (***).

La tendenza dei fenilidrazoni delle nitroaldeidi aromatiche a fornire cromoisomeri si mantiene e si esalta anzi presso i nitrofenilidrazoni, come risulta dalla seguente tabella:

IDRAZINA	ALDEIDE	COLORE DEGLI IDRAZONI					
o-Nitrofenil	Benzoica	Giallo	Pf. 190°		Rosso	Pf. 190° (1)	
"	p-Dimetilaminobenzoica				Rosso-bruno	" 211° (2)	
m-Nitrofenil	Benzoica	Giallo	" 131°		Rosso	" 131° (3)	
"	p-Dimetilaminobenzoica	Giallo	" 168°		Rosso	" 168° (4)	
p-Nitrofenil	Benzoica	Giallo	" 195°	Arancio	Pf. 194° ₅	Rosso	" 194° (5)
"	o-Nitrobenzoica	Arancio	" 253°			Rosso-arancio	" 251°
"	m-Nitrobenzoica	Giallo	" 248°			Arancio	" 248 (6)
"	p-Nitrobenzoica	Giallo-bruno	" 246°	Giallo-arancio	Pf. 247°	Rosso-arancio	" 245 (7)
"	p-Dimetilaminobenzoica	Verde cantaride	" 187°			Rosso	" 186 (8)

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(**) Vedi Nota I, questi Rendiconti, XX, 2°, 578.

(***) Pervenuta all'Accademia il 16 giugno 1920.

(1) Preparato da Bischler e descritto come una sostanza rosso-scura e fondente a 186-187°; Berichte, 22, 2803. Per riscaldamento la forma gialla si trasforma lentamente nella rossa; a 132° la trasformazione è completa.

(2) Non ancora descritto: aghi rosso-bruni.

(3) Preparato da Ekestein (Rend. 22, 33), e descritto come una sostanza rosso-carminio e fondente a 130°. A 120° la forma gialla diventa rossa.

(4) Non ancora descritto.

(5) Questi Rendiconti XX, 1^a, 803. A 111° la forma gialla si trasforma nella modificazione arancio (forma mista); a 187° le tre forme hanno lo stesso colore aranciato.

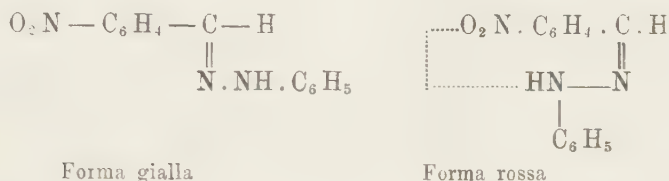
(6) Questi Rendiconti XX, 1^a, 803. Il p-nitrofenilidrazone dell'm-nitrobenzaldeide è fortemente termocromo.

(7) A 110° la seconda e terza forma assumono lo stesso colore giallo-aranciato (colore della forma mista). Anche questo p-nitroidrazone è fortemente termocromo; a 130° il colore è manifestamente più rosso, a 230° è rosso: per raffreddamento si ha il colore della forma mista.

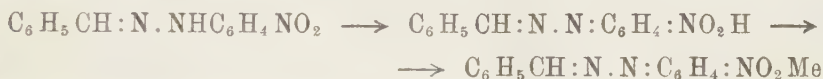
(8) Gazzetta chimica italiana, XLIII, 2^a, 637.

I due ultimi p-nitrofenilidrazoni della dimetilaminobenzaldeide rappresentano il più bel caso di cromoisomeria da noi trovato.

Per i fenilidrazoni delle aldeidi aromatiche nitrate, uno di noi (Ciusa) ha, a suo tempo (vedi Nota I), ammesso e cercato di dimostrare che la causa della cromoisomeria va cercata contemporaneamente nel doppio legame carbonio-azoto e nel gruppo nitrico, nel senso che quest'ultimo può essere o no attaccato, per valenze secondarie, all'azoto imminico

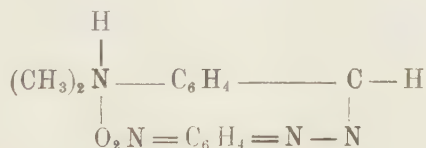


In una Nota precedente è stato dimostrato che i nitrofenilidrazoni sono capaci di fornire sali alcalini intensamente colorati e che questi sali derivano da un acido chinonnitronico (¹).



Si deve però escludere che vi sia qualche relazione fra questo ordine di fatti e la cromoisomeria in questione: i sali alcalini dei fenilidrazoni si idrolizzano immediatamente, e l'acido nitronico non è capace di esistere allo stato libero.

Per la forma verde del p-nitrofenilidrazone della p-dimetilaminobenzaldeide si poteva prendere in considerazione una costituzione chinoide a causa della possibilità di una salificazione interna fra il gruppo dimetilaminico ed il residuo dell'acido nitrico



Questa forma verde però, a contatto della più piccola quantità di potassa alcoolica, si colora intensamente in rosso-violetto, analogamente a quanto fa il p-nitrofenilidrazone della benzaldeide; inoltre lo spettro d'assorbimento della soluzione della forma verde (anche della soluzione in benzolo, dal quale si separa appunto la forma verde) è completamente differente da quello che si ottiene per aggiunta di potassa alcoolica, e da quello del sale sodico del p-nitrofenilidrazone della benzaldeide (vedi spettrogramma n. 1, Nota citata).

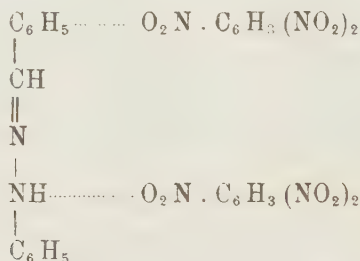
(¹) Questi Rendiconti, XXVIII, 2°, 366.

Così che, anche per questo idrazone, la causa dell' isomeria non va cercata nel passaggio dalla struttura benzoide a quella chinoide. Lo stesso ragionamento vale per i due m-nitrofenilidrazoni della p-dimetilaminobenzaldeide e per l'ortonitrofenilidrazone della stessa aldeide.

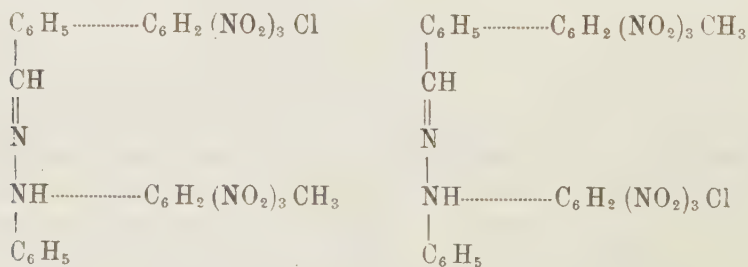
Nelle nostre ricerche sui prodotti d'addizione degli idrazoni coi derivati del trinitrobenzolo (¹) abbiamo fatto notare che, mentre il benzalfenilidrazone addiziona due molecole di cloruro di picrile, i fenilidrazoni delle tre nitrobenzaldeidi ne addizionano una sola molecola: se invece il gruppo nitrico entra nel gruppo fenilico idrazinico, il nitrofenilidrazone che così risulta addiziona ancora due molecole di cloruro di picrite. Tutto ciò fa supporre che i punti di attacco delle molecole di trinitrobenzolo (e derivati) sieno il gruppo fenilico aldeidico e l'atomo d'azoto imminico



Così che, p. es., al prodotto d'addizione del benzalfenilidrazone col trinitrobenzolo si potrebbe dare la costituzione



Per avvalorare tale modo di vedere, noi abbiamo preparato dei composti di addizione del benzalfenilidrazone con due differenti molecole di trinitrobenzolderivato, nella speranza di ottenere due isomeri, p. es. (²)



(¹) Questi Rendiconti XX, 2°, 378.

(²) La parte sperimentale sarà pubblicata a parte.

Mentre abbiamo ottenuto i prodotti d'addizione contenenti due differenti trinitrobenzolderivati, non possiamo affermare di essere riusciti ad ottenere gli isomeri cercati; non disperiamo tuttavia di riuscirci.

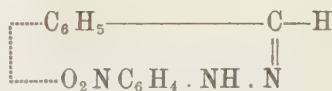
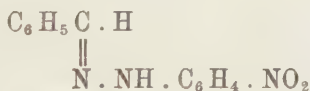
A noi però sembra ugualmente verosimile l'ammettere che nei nitrofenilidrazoni cromoisomeri il gruppo nitrico sia legato internamente, per valenze secondarie, od all'atomo d'azoto od al gruppo fenilico aldeidico



Quest'ultimo modo di saturazione delle valenze secondarie facilmente favorirà la formazione della configurazione malenoide così che i due isomeri potranno essere rappresentati dalle formule I e II.

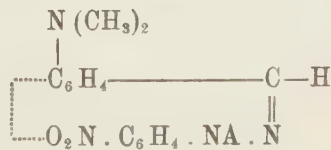
Meno facile è lo stabilire quale delle due formule corrisponda all'isomero più intensamente colorato (la forma intermedia, che noi abbiamo trovato per i p-nitrofenilidrazoni della benzaldeide e della p-nitrobenzalaldeide, è un miscuglio o combinazione o soluzione solida delle altre due): per le tre nitroaniline si sa che l'o-nitroanilina è la più intensamente colorata, ciò che significa che la distanza fra i gruppi legati per valenze secondarie influisce certamente sull'intensità del colore. Questo criterio è però, nel nostro caso, di incerta applicazione.

Quando si passa dal nitrofenilidrazone della benzaldeide a quello della dimetilaminobenzaldeide, si ottengono, come si disse, due nuovi cromoisomeri. Questi due nuovi isomeri possono considerarsi come i corrispondenti derivati aussocromici III IV



I

II



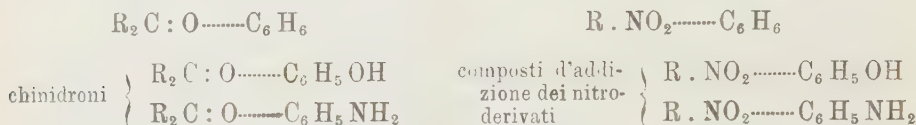
III

IV

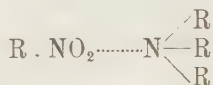
oppure si può ammettere che, nella forma più intensamente colorata, il gruppo $\text{N}(\text{CH}_3)_2$ sia legato direttamente al gruppo nitrico.

Queste due possibilità corrispondono, in fondo, ai due modi di considerare i chinidroni e quindi anche i prodotti d'addizione dei nitroderivati.

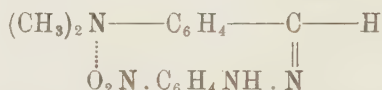
Secondo Willstätter e Piccard, nei chinidroni sarebbero i gruppi idrossilici del componente benzoide che si uniscono coordinativamente agli atomi di ossigeno dei carbonili del componente chinoide (¹). Secondo Pfeiffer invece, i chinidroni ed i composti d'addizione sarebbero derivati ossidrilici ed aminici dei composti fondamentali (²):



Come ha però dimostrato Werner, il tetranitrometano è capace di dare origine a prodotti d'addizione colorati colle amine terziarie, nei quali evidentemente il gruppo nitrico è unito direttamente all'azoto (³); e perciò, per i composti d'addizione dei nitroderivati con composti azotati, oltre la formula del Pfeiffer bisognerà prendere in considerazione la formula proposta dal Werner



Per la forma più intensamente colorata — verde — del p-nitrofenilidrazone della p-dimetilaminobenzaldeide, si potrà, quindi prendere in considerazione anche la formola



col gruppo metrico legato direttamente all'atomo d'azoto del residuo dimetilaminico. Per quanto non si possa in modo completo spiegare la cromoisomeria dei nitroidrazoni su descritti, crediamo tuttavia di averne additato la causa; non solo, ma di avere riportato la questione di questa cromoisomeria a quella, ben più importante e generale, dei chinidroni e dei composti d'addizione in generale.

(¹) Berichte d. d. ch. Gesell., 41, 1458.

(²) Pfeiffer Annalen d. Chemie, 404, 1; 411, 253.

(³) Berichte, 42, 4324. Recentemente (Berichte, 52, 400) è stato dimostrato che al tetranitrometano spetta la costituzione $(NO_2)_3-C-ONO$. Le conclusioni alle quali arriva Werner non perdono però niente del loro valore. In primo luogo non è da escludersi che tra le due forme di tetranitrometano e di nitrito di trinitrometile non possa esistere un equilibrio, in secondo luogo non bisogna dimenticare che il trinitrobenzolo si unisce all'ammoniaca, alla trimetilamina, alla piperidina ecc.; e che anche il trinitromesitilene è capace di dare prodotti d'addizione colorati coi composti azotati.

È merito di Pfeiffer l'aver mostrato che i chinidroni, i composti dei nitroderivati, i composti alocromici dei chetoni, aldeidi, acidi e nitroderivati (con acidi e con sali), sono analogamente costituiti e perciò debbono essere considerati da un unico punto di vista.

Il numero di questi composti molecolari cresce enormemente se si considera che, accanto a questi composti *aperti*, si debbono mettere i composti analoghi *chiusi*, nei quali la formazione del composto d'addizione avviene intramolecolarmente: i nitrofenilidrazoni cromoisomeri, da noi descritti, debbono essere considerati appunto come composti d'addizione *chiusi* e quindi come i sali dei polinitroidrocarburi, nitrochetoni e sostanze coloranti del trifenilmetano per non citare che i casi più noti ed interessanti.

Cristallografia. — *Della forma cristallina della nitro-di-bromo-acetanilide* $\text{C}_6\text{H}_2 \cdot \text{NO}_2 \cdot \text{Br} \cdot \text{Br} \cdot \text{NH}(\text{C}_2\text{H}_5\text{O})$. Nota di MARIA DE ANGELIS ⁽¹⁾, presentata dal Socio ARTINI ⁽²⁾.

In altra mia Nota, pubblicata in questi Rendiconti ⁽³⁾, ho descritto la forma cristallina e il polimorfismo della nitro-di-cloro-acetanilide 1.2.6.5, esprimendo la speranza di poter dare notizia delle relazioni morfologiche tra detto composto e l'omologo di-bromo-derivato. Scopo della presente Nota è appunto quello di esporre i risultati di tale confronto.

La nitro-di-bromo-acetanilide 1.2.6.5, (p. fus. = 150°) fu ottenuta dal prof. Körner bromurando la nitro-bromo-anilina 1.2.5 (p. fus. = 132°) in soluzione acetica con ipobromito di sodio; si ottengono così le due nitro-di-bromo-aniline 1.2.6.5 e 1.2.4.5; la miscela di queste due sostanze si separa trasformando le aniline nei corrispondenti acetil-derivati mediante ebullizione con anidride acetica, e cristallizzando frazionatamente da alcool le due acetanilidi.

La sostanza non dà con facilità distinti cristalli; nei numerosi tentativi, fatti con solventi diversi, i migliori risultati furono ottenuti da soluzioni in etere acetico.

Sistema triclino, classe pinacoidale:

$$\begin{aligned} a : b : c &= 1.2526 : 1 : 1.0013 \\ A &= 77^\circ.21' & \alpha &= 96^\circ.54' \\ B &= 71.58 & \beta &= 104.39 \\ C &= 68.41 & \gamma &= 108.35 \end{aligned}$$

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1920.

(3) M. De Angelis, *Della forma cristallina della nitro-di-cloro-acetanilide 1.2.6.5*. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 21 marzo 1920.

Forme osservate:

$$\{100\}, \{010\}, \{001\}, \{110\}, \{1\bar{1}0\}, \{1\bar{1}1\}, \{\bar{1}\bar{1}1\}.$$

I cristalli hanno abito prismatico (fig. 1), qualche volta allungato secondo l'asse verticale. Le forme più sviluppate sono ordinariamente $\{1\bar{1}0\}$, $\{100\}$, $\{001\}$; molto ristrette sempre, e spesso mancanti, le faccettine di $\{\bar{1}\bar{1}1\}$.

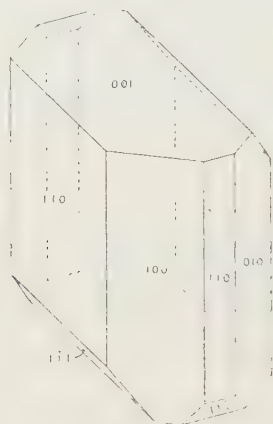


FIG. 1.

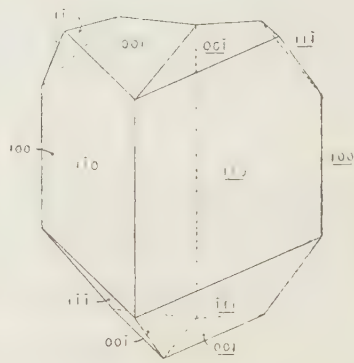


FIG. 2.

Le faccie della zona verticale presentano costantemente, secondo l'asse della zona, una fortissima striatura che ne rende la misura difficile e poco precisa.

Molto frequente è nei cristalli di questa sostanza una geminazione per contatto di due individui specularmente simmetrici rispetto al pinacoide $\{010\}$; alle due estremità dell'asse verticale questi geminati presentano una diversa conformazione (fig. 2): all'estremità dove le due faccie di $\{001\}$ formano tra loro un angolo rientrante, compaiono due nitide faccette triangolari di $\{\bar{1}\bar{1}1\}$, mentre all'estremità opposta, dove le due faccie di base formano un angolo sporgente, lo spigolo fra esse e $\{1\bar{1}0\}$ è largamente smussato dalle faccie di $\{\bar{1}\bar{1}1\}$.

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	Numero	Limiti	Medie	
($\bar{1}00$).($\bar{1}10$)	10	$63.26' - 64.12'$	$63.56'$	$63.56'$
($\bar{1}10$).(010)	10	$47.3 - 47.37$	47.23	47.23
(100).(001)	6	$71.31 - 72.21$	71.58	71.58
(010).(001)	7	$76.53 - 77.53$	77.21	77.21
($\bar{1}10$).($\bar{1}11$)	8	$43.55 - 44.30$	44.14	44.14
(100).(010)	4	$68.16 - 68.45$	68.30	68.30
(100).(110)	8	$38.3 - 38.48$	38.18	$38.18 \frac{1}{2}$
(110).(010)	6	$30.10 - 30.47$	30.30	$30.27 \frac{1}{2}$
(110).(001)	2	$71.22 - 71.49$	71.35	71.35
($1\bar{1}0$).(001)	7	$87.59 - 88.19$	88.11	88.11
($\bar{1}11$).($\bar{1}00$)	2	$83.54 - 84.3$	$83.58 \frac{1}{2}$	$83.44 \frac{1}{2}$
($\bar{1}11$).(010)	4	$49.17 - 49.23$	$49.20 \frac{1}{2}$	$49.10 \frac{1}{2}$
($\bar{1}11$).(001)	7	$47.12 - 47.49$	47.26	47.41
($\bar{1}11$).(110)	2	$67.52 - 68.7$	$68.—$	67.59
($\bar{1}\bar{1}1$).($\bar{1}00$)	4	$53.54 - 54.20$	$54.10 \frac{1}{2}$	54.32
($\bar{1}\bar{1}1$).($0\bar{1}0$)	3	$44.24 - 44.39$	44.33	$44.23 \frac{1}{2}$
($\bar{1}\bar{1}1$).(001)	5	$70.22 - 70.28$	70.25	70.31
($\bar{1}\bar{1}1$).($\bar{1}\bar{1}0$)	2	$37.46 - 37.47$	$37.46 \frac{1}{2}$	37.47
($\bar{1}\bar{1}1$).($1\bar{1}0$)	4	$76.25 - 77.36$	$77.1 \frac{1}{2}$	76.40
($\bar{1}\bar{1}1$).($\bar{1}11$)	1	—	86.8	87.10
(100).($\bar{1}00$)	4	$43.10 - 43.18$	43.15	42.38
(001).($00\bar{1}$)	4	$25.24 - 25.48$	25.35	25.18
($1\bar{1}0$).($\bar{1}10$)	4	$84.35 - 86.40$	85.32	85.14
($\bar{1}11$).($1\bar{1}\bar{1}$)	1	—	81.14	81.39
($\bar{1}\bar{1}1$).($11\bar{1}$)	2	$90.56 - 92.13$	91.34	91.13

Sfaldatura facilissima e perfetta secondo $\{010\}$. Secondo questo stesso piano si ottengono con facilità deformazioni per scorrimento. Le lamine di sfaldatura sono facilmente flessibili e non elastiche.

Dalla (010) esce quasi normalmente la bisettrice acuta degli A.O., negativa; su detta faccia, per la luce gialla, la traccia del piano degli A. O. fa circa 68° con l'asse verticale, nell'angolo β ottuso. Dispersione degli assi ottici debolissima: $\varrho < \nu$.

$$\begin{aligned} P. sp &= 2.131 \\ P. M &= 337.908 \\ V &= 158.57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi &= 6.5240 \\ \varphi &= 5.2085 \\ \omega &= 5.2154 \end{aligned}$$

Questa modificazione è la sola ch'io sia riuscita ad ottenere nei numerosi tentativi di cristallizzazione della sostanza, da vari solventi ed a varie temperature; essa è stabile anche ad alta temperatura: infatti scaldandone in una stufetta al microscopio lamine di sfaldatura trasparenti, queste si conservano inalterate fino al punto di fusione. Per raffreddamento della massa fusa si ottengono aggregati di individui cristallini, che per la sfaldatura e le proprietà ottiche mostrano di appartenere sempre alla stessa modificazione.

Confrontando la forma cristallina di questo di-bromo-composto con quella delle due modificazioni dell'omologo di-cloro-derivato, si può constatare qualche notevole relazione con la modificazione β di quest'ultimo, non ostante la diversità del grado di simmetria. Per far meglio risaltare queste relazioni, conviene però adottare per la nitro-di-cloro-acetanilide una nuova orientazione, nella quale, fermi restando i simboli delle $\{100\}$, $\{110\}$, $\{010\}$, la forma $\{\bar{1}01\}$ assuma il nuovo simbolo $\{001\}$ e la $\{011\}$ diventi $\{\bar{1}11\}$; allora le nuove costanti diventano:

$$a:b:c = 1.4458:1:1.0952$$

$$\beta = 75^{\circ}.27';$$

e gli assi topici:

$$\chi = 6.6707; \varphi = 4.6140; \omega = 5.0532.$$

Come si vede, sono abbastanza vicini nelle due sostanze i valori di $b:c$ e di β , e quelli di χ ed ω . Anche per ciò che riguarda la sfaldatura e la orientazione ottica, l'analogia è evidentissima.

Non ostante l'esistenza di queste relazioni, è evidente che non si può parlare di isomorfismo tra le due sostanze. Allo scopo di constatarne l'isodimorfismo, la cui esistenza già *a priori* era resa sommamente probabile dall'analogia di composizione chimica, ho creduto utile procedere alla cristallizzazione di miscele dei due composti.

Miscele di quantità equimolecolari

di $\text{C}_6\text{H}_2 \cdot \text{NO}_2 \cdot \underset{1}{\text{Cl}} \cdot \underset{2}{\text{Cl}} \cdot \underset{6}{\text{NH}}(\underset{5}{\text{C}_2\text{H}_3\text{O}})$. e di $\text{C}_6\text{H}_2 \cdot \text{NO}_2 \cdot \underset{1}{\text{Br}} \cdot \underset{2}{\text{Br}} \cdot \underset{6}{\text{NH}}(\underset{5}{\text{C}_2\text{H}_3\text{O}})$.

Da etere acetico si ottengono facilmente bei cristalli monoclini, perfettamente isomorfi con la modificazione β del di-cloro-composto:

$$a:b:c = 1.4218:1:1.0754$$

$$\beta = 75^{\circ} 4'.$$

Forme osservate:

$$\{100\}, \{010\}, \{001\}, \{110\}, \{\bar{1}11\}$$

I cristalli sono per lo più distintamente tabulari secondo $\{100\}$ (fig. 3).



FIG. 3.

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	Numero	Limiti	Medie	
(100). (110)	12	53.18' - 54.11'	53.57'	*'
(111). (100)	9	70.18 - 70.48	70.38	*
(111). (010)	7	46. 9 - 46.32	46.18	*
(100). (001)	2	—	75. 5	75. 4
(010). (110)	8	34.53 - 36.56	36. 4	36. 3
(111). (001)	2	57.37 - 57.45	57.41	57.38
(111). (110)	4	40.46 - 41. 1	40.53	41. 5
(111). (111)	5	87. 8 - 87.44	87.31	87.24

Avendo creduto di notare in qualche cristallo un diverso sviluppo delle due faccie opposte di $\{001\}$, per verificare se la sostanza appartenesse piuttosto alla classe domatica che alla prismatica, ho cercato di ottenere delle figure di corrosione, ciò che mi è riuscito abbastanza facilmente con alcool assoluto; sulla (100) e sulla ($\bar{1}00$) ottenni delle figure mono-simmetriche perfettamente identiche; ciò che mi fa ritenere che la sostanza spetti alla classe prismatica. Sulla (010) di sfaldatura non ho potuto avere figure abbastanza nette e caratteristiche.

P. sp. = 1.942.

Sfaldatura facile e perfetta secondo $\{010\}$. I piani degli A.O. sono normali al piano di simmetria. Per la luce gialla, la traccia del P.A.O. sulla (010) fa un angolo di circa 51° con l'asse verticale, nell'angolo β ottuso. La bisettrice acuta, negativa, è normale alla (010); dispersione degli assi ottici abbastanza forte: $\rho < \nu$.

Miscela di 1 gr. mol. di $C_6H_2 \cdot NO \cdot Cl \cdot Cl \cdot NH(C_2H_5O)$
_{1 2 6 5}

con 2 gr. mol. di $C_6H_2 \cdot NO \cdot Br \cdot Br \cdot NH(C_2H_5O)$.
_{1 2 6 5}

Anche di questa miscela ho avuto facilmente nitidi cristalli da soluzioni in etere acetico.

Sistema monoclinico, classe prismatica :

$$a : b : c = 1.4118 : 1 : 1.0779$$

$$\beta = 74^\circ 54'$$

Forme osservate :

$$\{100\}, \{010\}, \{001\}, \{110\}, \{\bar{1}11\}.$$

L'abito prevalente è tabulare secondo la $\{100\}$, come nella miscela precedentemente descritta.

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	Numero	Limiti	Medie	
(100).(110)	15	$52.53^{\circ} - 54.5^{\circ}$	53.44°	$^{\circ}$
(110).($\bar{1}11$)	8	$40.50 - 41.11$	$41. —$	*
(001).($\bar{1}11$)	8	$57.39 - 58.1$	57.52	*
(100).(001)	4	$74.50 - 75.14$	$75. — \frac{1}{2}$	74.54
(010).(110)	12	$35.48 - 37.14$	$36.18 \frac{1}{2}$	36.16
(110).($\bar{1}10$)	2	$72.11 - 72.24$	$72.17 \frac{1}{2}$	72.32
($\bar{1}11$).($\bar{1}00$)	8	$70.27 - 70.53$	$70.36 \frac{1}{2}$	70.29
($\bar{1}11$).(010)	2	$46.5 - 46.17$	46.11	46.17
($\bar{1}11$).(110)	7	$68.31 - 69.21$	$68.46 \frac{1}{2}$	$68.55 \frac{1}{2}$
($\bar{1}11$).($\bar{1}11$)	4	$87.27 - 87.45$	$87.34 \frac{1}{2}$	87.25

P. sp. = 2.019.

Sfaldatura facile e perfetta secondo $\{010\}$. I P.A.O sono normali al piano di simmetria. Per la luce gialla la traccia del piano degli A.O. sulla (010) fa un angolo di 52° con l'asse verticale, nell'angolo β ottuso. La bisettrice acuta, negativa, è normale a $\{010\}$; dispersione degli A.O. piuttosto forte: $\rho < v$.

Così i cristalli di questa miscela, come quelli della precedente, sono stabili ad alta temperatura: riscaldati nella stufa al microscopio restano inalterati sino al punto di fusione.

Tutte le miscele da me preparate corrispondono, come si vede, ad un'unica modificazione, perfettamente corrispondente ed isomorfa con la β da me descritta della nitro-di-cloro-acetanilide; anche le proprietà fisiche sono estremamente simili. Resta dunque dimostrato il perfetto isodimorfismo del nitro-di-cloro col nitro-di-bromo-derivato; ma non si può fare a meno di rilevare la singolarità del fatto che l'unica modificazione nella quale si presentino le miscele, e che ha caratteri di grande stabilità, corrisponde ad una fase che è labile in una delle due sostanze, ed è ignota per l'altra allo stato puro.

Geologia. — *Permocarbonifero e permiano nella catena del Caracorùm*. Nota di MICHELE GORTANI, presentata dal Socio GIOTTO DAINELLI ⁽¹⁾.

I professori G. Dainelli e O. Marinelli, con amichevole cortesia di cui tengo a ringraziarli pubblicamente, mi hanno voluto affidare l'onorifico incarico di studiare le faune paleozoiche, da loro scoperte durante la spedizione scientifica italiana De Filippi nell'Asia centrale (1913-14).

Cessate le cause che negli ultimi anni avevano assorbito ogni mia attività, ho potuto iniziare l'esame di questo materiale cospicuo ed interessantissimo. Mi è grato cominciare coll'espore il risultato delle prime osservazioni su alcune faune antracolitiche provenienti dal Caracorùm orientale.

Nel bacino del ghiacciaio Rimu i nostri due geologi hanno rilevato una serie stratigrafica molto importante, i cui termini superiori, conformemente alle prime osservazioni ⁽²⁾, sono risultati del cretaceo più alto ⁽³⁾, mentre alla base si riscontra il paleozoico superiore, come risulta dai fossili che sono argomento della presente Nota.

Piccoli frammenti di calcare nero con brachiopodi, raccolti in prossimità del crinale della catena, mi hanno fornito *Marginifera himalayensis* Diener e *Spirifer tibetanus* Diener, forme cioè rinvenute sinora in orizzonti ritenuti per lo più equivalenti al livello medio dei calcari con *Productus* del Salt Range.

(¹) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1920.

(²) Cfr. Dainelli G. e Marinelli O., *Relazione preliminare sui lavori scientifici della spedizione De Filippi al Karakorùm (1913-14): cenni speciali intorno alle ricerche di geologia e geografia*, « Riv. geogr. ital. », XXII, nn. 5-6, Firenze, 1915.

(³) Cfr. Parona C. F., *Faune cretatiche del Caracorùm e degli altipiani Tibetani*, « Rend. R. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. XXVI, 2° sem., pp. 53-57, Roma, 1917; Stefanini G., *Sull'esistenza di depositi cenomaniani e di altri livelli mesozoici nel Caracorùm (Asia centrale)*, ibid., pp. 180-195, Roma, 1917.

Parimenti dal crinale della catena, ma da località lontana qualche chilometro dalla prima, provengono calcari neri zeppi di *Marginifera himalayensis* e *Spirifer tibetanus*, associati a *Productus Aagardi* Toula ed evidentemente spettanti al medesimo livello dei precedenti.

Assai maggiore interesse ha una serie rilevata più a mezzodì, presso l'origine dello Sciàioik. Ivi si hanno quattro livelli fossiliferi; nel materiale raccolto dalla spedizione, prescindendo dalle forme nuove e dai coralli e briozoi che meno si prestano alla precisa determinazione cronologica, ho finora riconosciuto le forme seguenti:

Livello 1°, inferiore (scisti). — *Productus Aagardi* Toula, *Pr. semireticulatus* Mart. sp., *Marginifera himalayensis* Dien. (dominante), *Spirifer tibetanus* Dien. (frequente), *Sp. bisulcatus* Sow., *Spiriferina ornata* Waag., *Camarophoria mutabilis* Cern., *C. superstes* Vern.

Livello 2° (calcari). — *Streptorhynchus* cfr. *pectiniformis* Waag., *Productus punctatus* Mart. sp., *Pr. tenuistriatus* Vern., *Pr. Aagardi* Toula, *Pr. semireticulatus* Mart. sp., *Pr. curvirostris* Schellw., *Pr. incisus* Schellw., *Marginifera himalayensis* Dien. (dominante), *Spirifer tibetanus* Dien. (frequente), *Sp. interplicatus* Rothpl., *Sp.* cfr. *Lydekkeri* Dien., *Martinia applanata* Cern., *Spiriferina cristata* Schloth., *Sp. multiplicata* Waag., *Sp. ornata* Waag., *Hustedia remota* Eichw. sp., *Camarophoria mutabilis* Cern. e var. *biplicata* Stuck. sp. (dominanti), *C. crumena* Mart. sp., *C. superstes* Vern., *Hemiptychina pseudo-elongata* Schellw., *Notothyris nucleolus* Kut. sp., *N. exilis* Gemm. sp., *Lima* aff. *retifera* Shum.

Livello 3° (marne). — *Schizophoria* aff. *supracarbonica* Cern., *Productus Aagardi* Toula (frequente), *Pr. Gruenewaldi* Krot., *Pr. semireticulatus* Mart. sp., *Pr. curvirostris* Schellw., *Pr. incisus* Schellw., *Marginifera himalayensis* Dien. (dominante), *Spirifer tibetanus* Dien. (frequente), *Sp. niger* Waag., *Sp.* aff. *Lydekkeri* Dien., *Martinia applanata* Cern., ? *Martiniopsis convexa* Cern., *Spiriferina multiplicata* Waag., *Sp. ornata* Waag., *Hustedia remota* Eichw. sp., *H. indica* Waag., *Athyris subexpansa* Waag., *Camarophoria mutabilis* Cern. e var. *biplicata* Stuck. sp. (dominanti), *C. crumena* Mart. sp., *C. superstes* Vern., *Rhynchonella* (*Pugnax*) *osagensis* Shum., *Dielism* aff. *elongatum* Schloth., *Hemiptychina pseudo-elongata* Schellw., *H. sublaevis* Waag., *Notothyris nucleolus* Kut. sp., *N. simplex* Waag., *N. exilis* Gemm. sp., *N.* cfr. *pulchra* Gemm. sp.

Livello 4°, superiore (calcari). — *Orthothetes armeniacus* Arth., *Streptorhynchus* (?) aff. *shanensis* Dien., *Chonetes variolata* d'Orb. (dominante), *Productus lineatus* Waag., *Pr. Abichi* Waag., *Marginifera spinoso-costata* Abich sp. (dominante), *Strophalosia longa* Nec.

Dal confronto delle faune apparisce chiaramente che i livelli 1°, 2° e 3° appartengono a un medesimo orizzonte geologico, e che con tale orizzonte si identifica quello rappresentato dai calcari con *Marginifera himalayensis* e *Spirifer tibetanus* presso il crinale della catena.

Fissare esattamente la posizione stratigrafica di cotesto orizzonte non è però facile, data l'incertezza che regna intorno alla posizione dei livelli fossiliferi himalaiani nella serie antracolitica. Le forme che ho determinate sono per la maggior parte presenti nella divisione più alta (calcare a *Schwagerinae*) del neocarbonico russo e in quel livello medio degli strati a *Prodiscus* dell'India che vari autori ritengono spettante al permiano medio, mentre invece altri (secondo me. a maggior ragione) riportano alla base del permiano, cioè al permocarbonifero. Senza ora addentrarci nell'esame di tale questione, basti accennare che, per l'affinità con le faune dianzi nominate e per i rapporti con quelle del Sosio, del Trogkofel e del Col Mezzodì, ritengo si tratti, nel nostro caso, di un orizzonte permocarbonifero o artinskiano, di transizione fra le faune schiettamente carboniche e quelle decisamente permiane.

Il livello superiore (4°), a *Chonetes variolata* e *Murginiferus spinosostitutus*, è invece caratterizzato da una fauna di tipo più recente, che, per quanto rappresentata da poche forme, si palesa sincrona con quella di Giulia nell'alta Armenia. Quest'ultima è attribuita, secondo i vari autori, al permiano medio o al superiore; rappresenta forse più di un orizzonte; non è certamente, nel suo complesso, riferibile al permiano più alto, e mi sembra piuttosto che si possa sostanzialmente considerare spettante al pengiabiano o sassoniano.

A tale piano ritiene il Frech equivalenti gli strati con *Xenodiscus* della località Woabgilga, a settentrione del Passo del Caracorum. Era questa l'unica indicazione precisa che si avesse finora intorno al paleozoico di cotesto sistema montuoso, dove tanto il permiano in senso stretto, quanto il permocarbonifero, risultano ora largamente diffusi, grazie alle osservazioni ed ai materiali riportati dalla spedizione italiana.

Dal punto di vista della stratigrafia generale, merita altresì di essere rilevato l'aiuto che la serie fossilifera del bacino del Rimu può dare per ricostruire con minore incertezza il quadro delle formazioni permocarbonifere e permiane di tipo pelagico, specialmente in riguardo all'Asia centrale e orientale.

Geologia. — *Il Cambriano dell'Iglesiente*. Nota del prof. VITTORIO NOVARESE, presentata dal Socio R. PIROTTA ⁽¹⁾.

Lo studio dei fossili cambriani dell'Iglesiente, svoltosi, dopo la pubblicazione dell'opera fondamentale dello Zoppi (1888), indipendentemente dalle indagini sul terreno, man mano che venivano scoprendosene dei nuovi, in seguito all'accurato esame critico definitivo di tutto il materiale raccolto e pubblicato dai vari autori, compiuto nel 1901 dal Pompecky, ha condotto alla conclusione della loro esclusiva pertinenza alla parte media del sistema, al piano a *Paradoxides*, od Acadiano dei geologi americani. Fondandosi sui trilobiti, il Pompecky ritenne verosimile la seguente successione, dall'alto al basso:

- c) fauna a *Giordanella* Born. (*Platypeltis* Menegh.) ed *Anomocare*;
- b) fauna a *Olenopsis* Born. e *Metadoxides* Born.;
- a) fauna a *Paradoxides mediterraneus* Pompecky.

La successione proposta tardò molto a trovare quell'accoglienza che meritava, perchè — essendo l'opera dello Zoppi anteriore alla scoperta dei fossili più significativi — non era stato dimostrato come trovasse piena conferma sul terreno fino al nuovo rilevamento geologico dell'Iglesiente, diretto da chi scrive, iniziatosi nel 1912 dal R. Ufficio geologico, e del quale è comparsa ora (1920) la prima tavoletta « Iglesias » al 25,000, contenente la classificazione stratigrafica dei terreni in questione.

La serie cambriana (o, se vuoi, acadiana) dell'Iglesiente consta di tre termini, ben distinti litologicamente, concordanti e succedentisi con grande costanza e regolarità.

L'inferiore, molto uniforme, è costituito soltanto da scisti, spesso filladici; in generale bruno-giallognoli o grigi, e più di rado verdognoli o rossastri. Presso la fermata di Cabitza della ferrovia Iglesias-Monteponi, nel 1896, si rinvenne in essi una fauna di trilobiti, di importanza decisiva, perchè comprendeva tre specie caratteristiche conosciute fuori della Sardegna in un orizzonte ben determinato. Sono il *Par. mediterraneus* Pompecky, equivalente al *Par. rugulosus* Corda, della Boemia, il *Conocoryphe Heberti* Mun.-Chal. e J. Berg., e *C. Lewyi* Mun.-Chal. e J. Berg., del Cambriano francese della Montagne Noire; a cui si associano un altro trilobite, *Ptychoparia* sp., ed un *Trochocystites*. A questi conviene ora aggiungere una *Dychtionema* sp., che ho rinvenuto nel 1915 presso la vecchia miniera di Monte Gani di Gonnesa.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1920.

I fossili furono trovati tutti nella più alta zona della potente assisa di scisti, in prossimità immediata del termine seguente, il « calcare metallifero », così denominato dai ricchi giacimenti di piombo e di zinco che racchiude. Nella sua parte inferiore consta di calcare ceroidi in masse più o meno grandi, associate a calcari dolomitici compatti e senza stratificazione vera apparente, sebbene ne mostrino talora una falsa a cagione dei litoclasti molto regolari e vicini che li solcano (Monteponi). Ad entrambi si sovrappongono altri calcari dolomitici listati o finamente fettucciati. Spesso ma non sempre, alla base del metallifero stanno con piccola potenza calcari fogliettati in lastrine, ai quali si usa dare il nome di calcescisti e che, piuttosto che zona di transizione fra scisti e calcari, sembra siano da interpretarsi come una laminazione di questi ultimi per cagione dinamica.

In tutto il calcare metallifero i rari avanzi organici riconoscibili sono da ascrivere ad *Archaeocyathinidae*. Nei calcescisti, dal Bornemann prima e da altri in seguito, furono segnalati, oltre a queste ultime, avanzi indeterminabili di trilobiti.

Il terzo termine, il più giovane, sebbene prenda nome dalle arenarie che ne formano la massa, consta inoltre di scisti arenacei, in alternanza intima con esse, e di calcari di tipo vario in banchi, intercalati senza alcuna legge a diversi livelli, e che, quando sono presso il contatto inferiore, accennano ad un passaggio al metallifero sottostante.

Quello delle arenarie è stato il primo dei tre termini cambriani di cui, per la ricchezza relativa maggiore di fossili, illustrati dal Meneghini e dal Bornemann, sia stata riconosciuta l'età. Ha dato trilobiti dei generi *Olenopsis* Born., *Metadoxides* Born., *Paradoxides*, *Ptychoparia*, *Anomocare* e *Giordanella* Born.; molte specie di *Archaeocyathus* e *Coscinocyathus* e poche forme di gasteropodi, brachiopodi, spongie, alghe, ecc.

Così nelle arenarie stanno racchiuse le due più recenti delle tre faune ritenute probabili dal Pompecky equivalenti ad orizzonti dell'Acadiano medio e superiore. Però non è stato possibile verificare se sul terreno siano di fatto distinte, sebbene nell'unico profilo fossilifero completo conosciuto che parta dal calcare metallifero, quello di Gutturo Sorgiu, presso la miniera di Nebida, la comparsa della *Giordanella*, molto più lontana dal contatto che non l'*Olenopsis Zoppi* Born. non contrasti coll'ipotesi del Pompecky.

Anche la suddivisione prospettata, sia pure con molte riserve, dallo Zoppi, di una assisa inferiore senza fossili di arenarie gialle con pochi calcari e di un'altra superiore fossilifera di arenarie con più frequenti banchi calcarei, non solo non sussiste in generale, ma dovrebbe essere capovolta perchè basata sull'erronea credenza che il calcare metallifero fosse siluriano.

Dalla migliore conoscenza acquisitane in questi ultimi anni emerge che il Cambriano ha, nell'Iglesiente, estensione più considerevole assai di quanto fin qui non si ritenesse. Nel territorio rappresentato dalla Carta Zoppi, vi appar-

tengono non soltanto tutto il calcare metallifero e le filladi di Malacalzetta, affioramento isolato di scisti acadiani, ma ancora una parte non piccola di ciò che vi figura come scisto silurico a sud di Flumini; nella valle di Monteponi, ed a sud di monte Barega e monte Onixeddu. Deve pure essere attribuita al Cambriano buona parte, seppure non la totalità, del Paleozoico del Sulcis, dove sono sviluppatissimi gli scisti in confronto dei calcari, e soprattutto delle arenarie.

Così che, invece dei tre isolotti raffigurati dallo Zoppi, con un'area complessiva di forse appena 100 km. quadrati, il terreno cambriano forma un tutto continuo di superficie quasi decupla, nella parte meridionale ed occidentale della massa orografica Iglesiente-Sulcis, mentre in quella verso settentrione ed oriente, predomina il Siluriano, rappresentato a ponente di Iglesias soltanto da una lunga e stretta striscia, a metà circa della quale sta Gonnessa.

Agronomia. — *Calcare e viti americane.* Nota di G. DE ANGELIS D'OSSAT, presentata dal Socio R. PIROTTA (1).

Sul rapporto fra il calcare del terreno agrario e la clorosi delle piante, e specialmente delle viti americane, ha fiorito una larghissima bibliografia. Alcuni autori affermano che il quantitativo del calcare costituisce la causa diretta del male; mentre altri la riconoscono più nello stato fisico speciale del calcare che non nella sua abbondanza. Fra questi ultimi debbonsi ricordare specialmente Houdaille e Sémiclion (1892-1900), per aver escogitato strumenti ingegnosi, destinati alla determinazione della *velocità specifica d'attacco* o *potere clorotico* del calcare contenuto nei terreni agrari. A queste ricerche però gli autori non attribuiscono un valore assoluto, avendo riconosciuto la complessità del fenomeno.

In Italia, nella ricostituzione dei vigneti distrutti dalla fillossera, si seguirono ciecamente — e sono ora tutt'altro che abbandonate — le *scale di resistenza al calcare* (Ravaz-Guillon-Bonnet) dei vitigni americani; e ne derivarono molti insuccessi, i quali divorarono all'erario un'egregia somma.

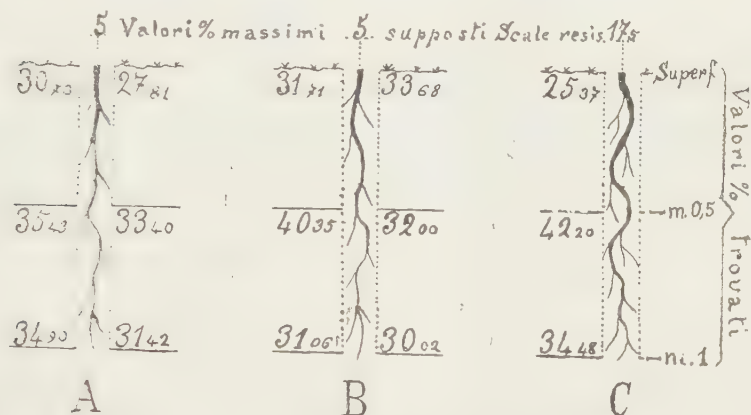
Che il quantitativo del calcare non possa da solo costituire la causa immediata della clorosi si poteva inferire dalle ricerche di Th. Schloesing (1872), il quale aveva persino ricavata una legge che lega la tensione x dell'acido carbonico dell'aria tellurica ai pesi y di carbonato di calcio in soluzione, e cioè

$$x^{0,3787} = 0,9218 y.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1920

La maggiore importanza dell'acido carbonico del terreno agrario nel fenomeno scaturisce necessariamente, come subordinato rimane il quantitativo del calcare. Alla stessa conclusione giungono altresì gli studi del Petteukofer, Fodor, Smith, Fleck, Müller, Port, Nichols, Falk, Soyka, Rigler, Roster, ecc., insieme colle ultime conquiste scientifiche della pedologia.

In una Nota (*Il calcare e le viti americane*, Modena, 1914) mi proposi dimostrare che la *velocità specifica d'attacco* del calcare, pur esistendo teoricamente, non è finora determinabile con sufficiente precisione. Dagli esperimenti infatti potei dedurre legittimamente che



il quantitativo di carbonato di calcio — sciolto in tempi uguali — è diverso nei calcari di stato fisico pressochè uguale;

il quantitativo di carbonato — sciolto in tempi uguali — varia anche per la stessa roccia;

in ciascun calcare — sulla stessa superficie ed in tempi uguali — si constata, con ripetute esperienze, una diminuzione non regolare di sostanza sciolta.

A fortiori adunque deve riuscire impossibile la ricerca della velocità specifica d'attacco del calcare che fa parte delle terre agrarie, il quale fu solo empiricamente distinto in *calcare attivo* e *calcare passivo*.

Con una seconda Nota (*Ancora sul calcare e le viti americane*, Modena, 1920), non più teoricamente e con esperienze scientifiche; ma con dati di fatto ineccepibili, ho reso palese — direi oggettivamente — le più manifeste smentite alle scale di resistenza dallo sviluppo delle viti americane. Senza ripetermi, spigolerò tre soli esempi — tratti dall'orto agrario e dal campo sperimentale del R. Istituto superiore agrario di Perugia — che valgono da soli a demolire per sempre il metodo finora adottato.

A) *Vitis labrusca* × *aestivalis* (vedasi fig. A). Questa vite, che, secondo la scala di resistenza, non potrebbe sopportare più del 5% di carbonato di

calcio, vegeta vigorosissima, senza traccia di clorosi. con le seguenti quantità percentuali di calcare:

alla superficie	30.70 % e 27.81 %
— m. 0,50	35.43 " e 33,40 "
— m. 1.00	34.90 " e 31.42 "

B) *Vitis labrusca (Isabella)* (vedasi fig. B). vive bene. senza clorosi, in un terreno agrario con le riportate percentuali di calcare:

alla superficie	31.71 % e 33,68 %
— m. 0.50	40.35 " e 2,00 "
— m. 1.00	31.06 " e 30.02 "

mentre si assegna ad essa, come massimo, solo il 5 % di calcare.

C) *Vitis riparia vigorosissima* di Avellino (vedasi fig. C). Le scale indicano a questa specie, sempre come massimo, il 17.5 % di calcare; mentre prospera benissimo nelle seguenti condizioni di ambiente rispetto al calcare:

alla superficie	25,37 %
— m. 0,50	42.20 "
— m. 1.00	34.48 "

I fatti non potrebbero essere più decisivi per la tesi che si sostiene.

*
* *

Non riusciremo tuttavia fuori luogo alcune considerazioni, di non lieve interesse, intorno al rapporto fra calcare e viti americane.

L'acqua, circolando nel terreno agrario, col suo potere idrolizzante, lascia libere le basi, le quali, unendosi all'acido carbonico, formano i carbonati. L'acido carbonico adunque rompe l'equilibrio momentaneo, determinato dall'idrolisi, e permette ad altre sostanze minerali di passare in soluzione. Vigono però l'azione antagonistica fra il Ca ed il Mg e la dipendente necessità di un rapporto fra i due elementi, il quale varia per le singole piante ed è sinora sconosciuto, nel valore più favorevole, per le viti americane. Molto meno chiara, per quanto sicura, è l'azione indiretta favorevole dello stesso rapporto all'assorbimento degli altri elementi nutritivi. Nè sponde luce sulla natura intima del fenomeno la distinzione fra la funzione nutritiva e la protettiva; nè la supposizione dell'origine di sali doppi, nè la stessa teoria del Pauli sulla nutrizione delle piante. Rimane però assodato che allo sviluppo normale della pianta necessitano dosi — fisiologicamente equilibrate — degli elementi assimilabili. Esperimenti recenti hanno riconosciuto che i due elementi Ca e Mg sono altresì legati agli altri due PO^4 e K da relazioni ed influenze ben definite e che la loro funzionalità dipende dalla presenza e dal-

l'azione degli altri elementi minerali. Per le quali ragioni l'azione nociva di un elemento non dipende dalla sua quantità assoluta, bensì dal rapporto con cui esso è assorbito: quindi, anche sotto questo punto di vista, l'indagine pura e semplice del quantitativo del calcare torna inutile. Ciò non toglie punto il valore al riconoscimento dello stato di aggregazione molecolare del calcare ed all'apprezzamento dell'azione di massa, la quale ultima influisce, forse più dell'affinità chimica, sul complicato miscuglio del terreno agrario, nel quale però le modificazioni più profonde sono apportate precipuamente dagli acidi organici, dall'acido carbonico e dai colloidi minerali ed organici.

La solubilità o meno del Fe e del Mn nel terreno agrario, con la dipendente clorosi, è legata a condizioni che non richiedono quantità determinate di Ca, ma solo la presenza sua o meno in ambiente alcalino. Però molto frequentemente intervengono con opportunità gli acidi delle radici (ossiacidi), i quali, formando composti complessi speciali, rendono ugualmente possibile la solubilità del Fe e del Mn, allontanando una causa immediata della clorosi. Da ciò si deduce che nel fenomeno la presenza — e non la quantità — del calcare è necessaria, e che la clorosi rimane eventualmente subordinata alla schietta alcalinità delle terre ed alla mancata emissione di certi acidi delle radici.

La soluzione del calcare — secondo la legge dello Schloesing — è subordinata alla formazione ed alla circolazione, nel terreno agrario, dell'acido carbonico. Ora questo gas si produce e circola in relazione alle proprietà fisiche del terreno: e queste, alla loro volta, dipendono direttamente dalle forme in cui si trovano le sostanze colloidali. È ovvio comprendere che l'azione dell'acido carbonico sarà favorita nei terreni sciolti, porosi e permeabili, a struttura *glomerulare* (idrosoli o idrogeli reversibili od in via di reversione: mentre rimarrà ostacolata nei terreni compatti ed impermeabili, con struttura *a particelle singole* (idrogeli irreversibili o reversibili). Per quanto sia nota una certa azione del Ca nella trasformazione dei geli in elementi più o meno reversibili, pure evidentemente appare che i fatti *pedotivi* ed *antipedotivi* non dipendono dal quantitativo del calcare; ma bensì dalla forma in cui si trovano i colloidi nel terreno, cioè dalla presenza dello ione HO delle terre alcaline o dallo ione H di quelle acide, e, subordinatamente, dalla monovalenza o polivalenza degli ioni radicali.

Tutto quanto adunque interessa il complesso argomento non si può presumere di riconoscere con una sola analisi volumetrica del quantitativo del calcare contenuto nel terreno agrario.

*
* * *

Dalle esposte considerazioni e dai fatti rilevati si può legittimamente dedurre che nella ricostituzione dei vigneti con portainnesti americani non si debbano più seguire, puramente e semplicemente, le empiriche scale di

resistenza al calcare, neppure quando si cerchi di affinare l'indagine con il riconoscimento della capacità specifica d'attacco, seguendo il metodo escogitato da Houdaille e da Sémichon. La diversa via che si dovrà percorrere nel campo pratico sperimentale — per adattare acconciamente i vitigni americani alle diverse nostre terre — rimane tracciata chiaramente ed essa non sarà nè aspra nè lunga, se si terrà nel dovuto conto quanto la geo-agronomia insegna. Molto più arduo e di maggior lena sarà il compito della ricerca scientifica sul rapporto fra calcare e viti americane; in questa lo studio pedologico assorgerà ad importanza fondamentale. Le necessarie indagini risulteranno invero complesse e delicate; ma esse sole potranno svelare i misteriosi mezzi di cui si serve la pianta per la sua nutrizione.

Già ricca è la messe della dottrina raccolta — onore e vanto degli studiosi moderni — per la futura scienza agraria positiva; essa però aspetta di essere informata da un'idea geniale ordinatrice. Non per questo, quanto è stato faticosamente acquisito si può ignorare e disprezzare, come praticano quei moltissimi, i quali — con presuntuosa leggerezza e con scarsa cognizione di causa — si arrogano il diritto d'interloquire empiricamente nell'astrusa scienza dei campi.

Botanica. — *Sulle strutture fibrillari del Némec.* — Nota preventiva della sig.^{na} dott. VALERIA BAMBACIONI ⁽¹⁾, presentata dal Socio R. PIROTTA ⁽²⁾.

Il Némec nel 1900 ⁽³⁾ considerava le strutture plasmatiche fibrillari che aveva osservate nei tre istogeni dell'apice radicale di *Hyacinthus orientalis* come « *eine reizleitende Struktur der lebenden Substanz* », ed aggiungeva che esse « *sich mit den Apathyschen Nervenfasern vergleichen lassen* ».

Nel 1901 ⁽⁴⁾ dopo aver studiata in diverse piante la reazione prodotta dallo stimolo traumatico nelle cellule degli apici radicali e della piumetta dell'embrione, descriveva dettagliatamente le strutture fibrillari che considerava come conduttrici di tale stimolo. Le sue osservazioni erano state fatte, sia su materiale vivente, sia su materiale fissato e colorato con diversi metodi, di cui però nessuno s'era dimostrato specifico delle fibrille che, scorrendo longitudinalmente, si corrispondevano quasi sempre nelle pareti trasversali,

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto botanico di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1920.

(3) Némec B., *Die reizleitenden Strukturen bei den Pflanzen*, pag. 371-372. Biol. Centralbl., Bd. 20, an. 1900.

(4) Némec B., *Die Reizleitung und die reizleitenden Strukturen bei den Pflanzen*, Jena. 1901.

apparivano formate di una sostanza omogenea eritrofila circondata da una guaina cianofila e, specie per azione di basse temperature, subivano una degenerazione granulare. Egli ammetteva una somiglianza soltanto esterna di queste fibrille con le formazioni ergastoplasmiche di Bonin ma, in un lavoro posteriore ⁽¹⁾, escludeva che potessero paragonarsi alle fibre cinoplasmatiche di Strasburger.

Tale ipotesi, in una recensione del libro del Némec, era stata formulata dall'Haberlandt che poi, nello stesso anno ⁽²⁾, eseguiva ricerche sperimentali sugli apici radicali di *Allium cepa* di cui prendeva in considerazione specialmente le strutture plasmatiche delle cellule del pleroma, sia in vivo sia in preparati convenientemente fissati. Notava anche lui i fasci plasmatici longitudinali a struttura fibrillare, ma li identificava « mit den schon von anderen Forschern beschriebenen längsfaserigen Strukturen strömenden Protoplasmas » (loc. cit., pag. 577), ammettendo quindi che servissero non alla trasmissione degli stimoli, ma al trasporto di sostanze plastiche. Con Butschlei egli considerava le fibrille plasmatiche come pareti di vacuoli allungati viste di profilo e inoltre, avendo notato anastomosi oblique tra le singole fibrille dei fasci plasmatici, ammetteva che tutto il sistema fibrillare rappresentasse un reticolo fortemente allungato.

Io mi sono proposta di ripetere le osservazioni del Némec, adoperando prima la tecnica da lui usata e poi i più recenti metodi applicati allo studio dei condriosomi. Le mie osservazioni sono state fatte su apici di radici di *Cicer arietinum*, *Allium cepa*, *Hyacinthus orientalis*, *Iris germanica*, *Aspidium aculeatum*, cresciute in differenti mezzi. Gli apici, tagliati per una lunghezza di pochi millimetri, sono stati fissati nel liquido del Flemming o nella miscela cromico-acetica, alcuni subito, altri $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 e 2 ore dopo che erano stati asportati, imparaffinati e colorati con la triplice del Flemming, con ematossilina e safranina o con l'ematossilina Heidenhain. Per mettere in evidenza i condriosomi, ho usato specialmente il metodo 4B del Regaud; in alcuni casi ho adoperato anche il metodo fotografico del Cajal che doveva riuscire specifico delle fibrille qualora esse fossero state realmente paragonabili alle fibrille di Apathy ⁽³⁾. Con la speranza di poter estendere ulteriormente queste ricerche, rendo intanto noti i risultati ottenuti perchè mi sembra che contribuiscano a chiarire il problema in questione. Nella maggior parte degli apici osservati non ho trovata nessuna struttura paragonabile alle fibrille descritte e disegnate dal Némec.

(1) Némec B., *Die Bedeutung der fibrillären Strukturen bei den Pflanzen*. Biol. Centralbl., Bd. 21, an. 1901.

(2) Haberlandt G., *Ueber fibrilläre Plasmastrukturen*. Ber. d. Deutsch. Bot. Ges., Bd. 19, an. 1901.

(3) Némec B., *Die reizleitenden Strukturen ecc.*, pag. 371.

Nelle giovani cellule del periblema e del pleroma, lunghe 20-40 μ , il protoplasma finemente granulare che circonda il nucleo posto al centro della cellula, si mostra, per la presenza di vacuoli tondeggianti, distribuito in sottili e brevi cordoni longitudinali irradianti dal nucleo, i quali, alle volte, si corrispondono con quelli delle cellule contigue. A una distanza di mm. 1,25 dal punto vegetativo le cellule del pleroma si allungano notevolmente (μ 60-110) ed i vacuoli si fondono insieme formandone altri più grandi che si estendono per tutta la lunghezza della cellula e riducono il citoplasma a uno strato parietale e a un cordone centrale molto denso e fortemente rifrangente.

A contatto delle pareti trasversali il citoplasma è fornito di piccoli vacuoli, e gli strati di esso che separano un vacuolo dall'altro sono spesso così sottili da prendere l'aspetto di fibrille: si ha allora bene evidente il reticolo fibrillare descritto dall'Haberlandt, che è meno visibile nel cordone centrale dove il plasma è, come ho detto, più denso. Un aspetto simile è presentato anche dalle cellule del dermatogeno di *Hyacinthus orientalis*. I condriosomi si trovano, in questi casi, sparsi nel protoplasma in forma di granuli.

Interessanti si sono mostrate le sezioni longitudinali fatte in apici radicali di *Aspidium aculeatum* fissati e colorati col metodo del Regaud. Le cellule dei tre istogeni, in vicinanza della cellula iniziale, si mostrano ricche di contenuto con pochi vacuoli e condriosomi granulari e filiformi; in esse non ho mai osservato gli spessi cordoni plasmatici che Němec descrive in *Aspidium decussatum* ⁽¹⁾.

A una distanza di mm. 1,2 dal punto vegetativo le cellule del periblema, che concorreranno alla formazione delle masse fibrose di color bruno nel cilindro corticale adulto, si presentano piene di un contenuto omogeneo grigiastro col nucleo, in via di degenerazione, addossato alle pareti laterali, mentre le cellule del pleroma, che si trasformeranno in elementi vascolari, mostrano strutture simili a quelle rappresentate dal Němec a fig. 5-9 tav. I del suo lavoro. Infatti lunghi filamenti tinti in color nero dall'ematossilina Heidenhain scorrono nel cordone citoplasmatico longitudinale, da un'estremità all'altra della cellula, avvolgendo più o meno il nucleo. La lunghezza di questi filamenti è variabile: a una distanza di mm. 2,7 dalla cellula iniziale ne ho osservato uno che misurava μ 100 e precisamente μ 20 da una parete trasversale al nucleo, μ 40 lungo il nucleo e μ 40 dal nucleo all'altra parete trasversale. Uno dei più lunghi raggiungeva μ 210: sono quindi sempre più brevi delle fibrille osservate dal Němec in *Aspidium decussatum*, le quali potevano misurare anche mm. 1,42 ⁽²⁾; inoltre, a diffe-

(1) Němec B., *Die Reizleitung und die reizleitenden Strukturen* ecc., pag. 95.

(2) Němec B., *Die Reizleitung und die reizleitenden Strukturen* ecc., pag. 97.

renza di queste, in corrispondenza delle pareti trasversali non si dividono in singole fibrille.

Nelle sezioni trasversali i filamenti da me osservati si presentano in forma di granuli, addossati alle pareti cellulari, ma non li ho mai visti, come il Némec, nei solchi presentati dal nucleo e che ho notati anch'io; non posso quindi stabilire se essi siano o no determinati dai filamenti che hanno sempre un andamento sinuoso e, sebbene meno chiaramente, sono visibili anche in sezioni di apici fissati col liquido del Flemming e colorati con ematossilina Heidenhain. Secondo me, si tratta di condriosomi che si sono allineati nello scarso citoplasma ancora rimasto in queste cellule destinate a lignificare le loro pareti e a perdere tutto il contenuto per trasformarsi in elementi vascolari.

Da quanto ho brevemente esposto concludo:

1) che i cordoni di protoplasma presenti nelle cellule degli apici radicali, nella maggior parte delle piante da me osservate, non presentano la struttura complessa descritta dal Némec, e sono semplicemente determinati dalla presenza di vacuoli allungati, come ammetteva anche l'Haberlandt.

2) che in *Aspidium aculeatum* si osservano strutture paragonabili ad alcune delle fibrille disegnate dal Némec. Esse sono determinate da condriosomi allungati e sinuosi a cui non mi sembra si possa attribuire il significato fisiologico loro riconosciuto dal Némec, sia per la loro distanza dalla zona sensibile, sia per la loro presenza in cellule, che si trasformeranno in elementi vascolari e il cui contenuto mostra già segni evidenti di degenerazione perchè destinato a scomparire.

Biologia. — *Nuovi fatti e nuovi problemi sulla biologia e sulla sistematica del genere Artemia* ⁽¹⁾. Nota III del dott. CESARE ARTOM, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽²⁾.

Risolto, come si è visto nella Nota precedente, e credo in modo definitivo, sia il problema della sistematica delle *Artemie* delle varie località, sia il problema della variazione di fronte ad uno speciale fattore (la « sal-sedine »), nuovi orientamenti devono prendere gli studi sulla variabilità generale dell'*Artemia* di fronte ai fatti da me messi in evidenza, e che cioè esiste un'*Artemia* *diploide amfigonica* (Cagliari) in contrapposizione ad un'altra *tetraploide partenogenetica* (Capodistria). Infatti questa dovrebbe prestarsi in modo incomparabile alla verifica della teoria delle così dette

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma.

⁽²⁾ Presentata nella seduta del 4 giugno 1920.

linee pure dello Johannsen, mentre l'*Artemia* di Cagliari potrebbe servire contemporaneamente di controllo per lo studio della variabilità normale dovuta all'*amfìgonia*.

Inoltre, ancora lo stesso studio del gigantismo dell'*Artemia* tetraploide in tutti i suoi vari organi, rispetto all'*Artemia* diploide (argomento questo già da me sommariamente trattato) ⁽¹⁾, merita ancora ulteriori ricerche, tanto più che recenti studi nel campo vegetale metterebbero in dubbio (almeno per certi bastardi dell'*Oenothera gigas*) una diretta dipendenza tra gigantismo e tetraploidismo ⁽²⁾.

La risoluzione però dei suddetti problemi di genetica sperimentale presenta per l'*Artemia salina* difficoltà molto gravi, in quanto che la sovrapposizione di una forte variabilità somatica, dovuta agli influssi più svariati, (concentrazione e composizione chimica delle acque, temperatura, nutrimento, ecc.) rende senza dubbio molto difficile, anche ricorrendo ai più elaborati metodi biometrici, mettere in evidenza quale parte della variazione sia dovuta esclusivamente a fattori genetici, e quale parte sia da imputare invece alle condizioni ambientali.

Pertanto, volendo verificare se anche per le *Artemie* di altre località sia possibile una separazione netta e precisa quale quella da me dimostrata per l'*Artemia* di Cagliari e di Capodistria, non vi è altro mezzo che ricorrere all'indagine citologica delle cellule sessuali. Ma anche tale indagine richiede un materiale molto abbondante, e adeguati mezzi di laboratorio.

Perciò, chi abbia a propria disposizione esclusivamente materiale da collezione, non può far altro che tentare di decidere se le *Artemie* delle varie località possano distinguersi per la diversa grandezza delle cellule somatiche.

Come è noto infatti da mie antecedenti ricerche e come risulta all'evidenza dalle seguenti figure ricavate da microfotografie, sta il fatto che specialmente i nuclei delle cellule dell'intestino di un'*Artemia* tetraploide (Capodistria) (fig. 2) sono molto più grandi di quelli di un'*Artemia* diploide (Cagliari) (fig. 4), e ciò in stretta dipendenza colla diversa quantità di sostanza cromatica contenuta inizialmente nell'uovo dell'una e dell'altra *Artemia* (figg. 1 e 3).

Grazie alla squisita cortesia dei proff. Bouvier e Gravier del museo di storia naturale di Parigi, e grazie ancora alla premura dei proff. Maas, Nactsheim, Sella e Wundsch, ho potuto fare il tentativo di separare nettamente le *Artemie* provenienti da circa venti diverse località, prendendo in considerazione per l'appunto la diversa grandezza dei nuclei delle cellule dell'intestino medio.

(1) C. Artom, *Le basi citologiche di una nuova sistematica del genere « Artemia »*, « Archiv. für Zellforschung », 9^o Band, 1^o Heft, 1912.

(2) Stomps Theod. J., *Ueber der Zusammenhang zwischen Statur und Chromosomenzahl bei den Oenotheren* « Biologisches centralblatt », Band. 36, n. 4, an. 1916.

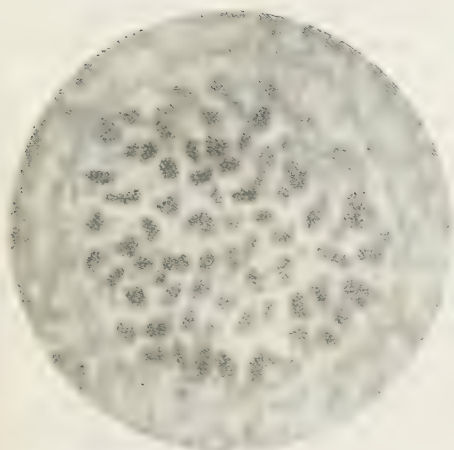


FIG. 1. --- Piastra equatoriale del primo fuso di segmentazione dell'uovo dell'*Artemia* di Capodistria (microfotografia). *Tetraploide* (4×21 cromosomi). *Parthenogenetica*.

Ingrandimento circa 2000 diametri.

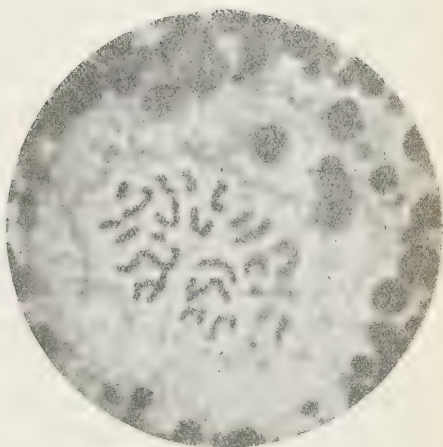


FIG. 3. — Piastra equatoriale del primo fuso di segmentazione dell'uovo dell'*Artemia* di Cagliari (microfotografia). *Diploide* (2×21 cromosomi). *Amfigonica*.

Ingrandimento circa 2000 diametri.

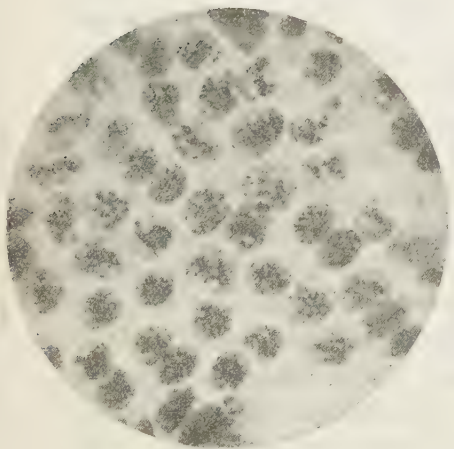


FIG. 2. — Nuclei delle cellule dell'intestino endodermico (parte addominale) dell'*Artemia tetraploide* di Capodistria (microfotografia).

Ingrandimento circa 600 diametri.

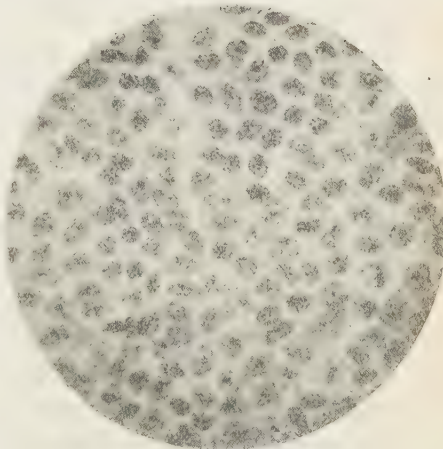


FIG. 4. — Nuclei delle cellule dell'intestino endodermico (parte addominale) dell'*Artemia diploide* di Cagliari (microfotografia).

Ingrandimento circa 600 diametri.

Orbene, riserbandomi al riguardo di riferire in seguito in modo particolareggiato, sta di fatto che le *Artemie*, in cui i maschi sono abbondanti, hanno i nuclei delle cellule dell'intestino medio considerevolmente più piccoli che non le *Artemie* in cui i maschi sono completamente assenti. E cioè le prime, le quali sono presumibilmente *amfigoniche*, si avvicinano considerevolmente, per il suddetto carattere citologico, all'*Artemia* sicuramente amfigonica diploide di Cagliari, le seconde, le quali sono invece presumibilmente partenogenetiche, si accostano (per quanto il carattere della grandezza nucleare sia piuttosto oscillante) sino ad un certo punto all'*Artemia*, sicuramente partenogenetica tetraploide, di Capodistria.

Perciò in conclusione (e ciò conformemente alle mie previsioni) le *Artemie* delle varie località possono dividersi, in base ad un carattere assai stabile e di notevole importanza, in due gruppi: *micropireniche* le une, *macropireniche* le altre. Le prime si può presumere sieno *diploidi amfigoniche*, come quella di Cagliari; le seconde invece (per quanto con molto maggiore riserbo) si può presumere sieno *tetraploidi partenogenetiche*, come quella di Capodistria.

Biologia. — *Sulla differenziazione delle caste nella società dei termitidi: i neotenici* ⁽¹⁾. Nota I di C. JUCCI, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽²⁾.

Ho ripreso il problema della differenziazione castale nei termitidi. A questo problema il Grassi aveva data una soluzione che fu generalmente accettata per lungo tempo, ma contro la quale, negli ultimi anni, si levarono voci discordi. Bugnion dapprima (1910) affermò, qualche fatto appena portando a sostegno delle sue vedute aprioristiche, l'ereditarietà delle caste; Thompson dipoi (1917) dimostrò o credè dimostrare collo studio anatomico la differenziazione intraembrionale delle caste di neutri; Thompson e Snyder infine (1919) questo differenziamento ereditario estesero alle caste riproduttive con processo di generalizzazione inverso a quello pel quale dallo studio dei reali neotenici il Grassi aveva indotto pei neutri la differenziazione avvenire nel corso dello sviluppo per cambiamento del regime alimentare.

Ho ripreso il problema. Il mio lavoro è in corso di sviluppo; ma sono ormai definitivi i risultati che ho raccolti nello studio della casta neotenica.

A confutazione di Thompson e Snyder, proclamanti « lo sfacelo delle fantastiche teorie di Grassi ed altri circa il volontario allevamento da parte

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1920.

degli operai di forme sostitutive reali », ho, con nuove osservazioni in natura ed esperimenti, confermato le scoperte del Grassi circa la differenziazione nel corso dello sviluppo dei reali neotenici.

Per il *Calotermes flavicollis* ho ripetuto ed esteso gli esperimenti del Grassi su nidini in provetta, orfanati in varie epoche dell'anno e di varia composizione per costringere la coloniola a farsi i reali di sostituzione con individui a vari stadi del loro sviluppo normale ad insetti perfetti. Anche in natura, del resto, ho rinvenuti reali di sostituzione derivati da vari stadi larvali (senza traccia di ali, con abbozzi ninfali ecc.).

Quanto al *Termes* (*Leucot.* Silvestri, *Reticulit.*, Holmgren) *lucifugus*, mi sono valso essenzialmente di osservazioni in natura per sfatare l'ipotesi, secondo la quale i reali di complemento e sostituzione rappresenterebbero caste riproduttive diverse a differenziazione ereditaria. Thompson e Snyder distinguono individui riproduttori di prima forma (i reali veri derivati, attraverso la ninfa di prima forma, da insetti perfetti alati), di seconda forma (i neotenici in abito ninfale derivati da ninfe di seconda forma), e di terza forma (i neotenici in abito larvale derivati da larve ancora senza traccia di ali), come tre caste distinte, ereditariamente differenziate; pretendono inoltre che le caste di seconda e terza forma diano luogo, oltre che a neutri, a individui riproduttori solo della loro casta. Tutto ciò appare inconsistente a un serio studio biologico che dimostra le pretese caste di seconda e terza forma essere non altro che le forme più comuni di reali complementari e sostitutivi i quali però possono, in contingenze particolari naturali o sperimentali della colonia, ottenersi da individui in un altro stadio qualunque del loro sviluppo normale ad insetti perfetti. Particolarmente dimostrativo è il caso dei reali di sostituzione da alato bianco, derivati cioè da ninfe di prima forma che han subito l'ultima muta traversando lo stadio quiescente, completamente sviluppati insomma, solo restati bianchi, non acquistando la pigmentazione bruna (melanotica) caratteristica degli insetti perfetti; per questi individui è innegabile la natura neotenica e inammissibile la differenza ereditaria, poichè conosciamo lo stadio al quale il loro sviluppo normale li condurrebbe e dal quale uno stimolo, che non possiamo concepire se non come esterno, all'ultim'ora li arresta permettendo lo sviluppo precoce degli organi genitali.

Ho trovato poi modo di allevare, in nidini Janet, colonioline di *Termes*, sulle quali ho cominciato a ripetere le esperienze che pel *Calotermes* così facilmente riescono, entrando inoltre in un nuovo ordine di esperimenti tendenti a ricercare come la colonia ottenga l'arresto dello sviluppo normale negli individui che sceglie per trasformarli in reali neotenici (mozzando le ali a ninfe di prima forma mature, ho riprodotto sperimentalmente la formazione di quegli alati bianchi, anneriti solo parzialmente, dai quali sovente troviamo derivati individui reali di sostituzione).

* * *

Ma, nel trattare con metodo essenzialmente biologico il problema, sono stato quasi trascinato dal corso delle mie ricerche a studiare con metodo istologico un capitolo di fisiologia: l'escrezione nei reali neotenici.

La mia attenzione fu particolarmente colpita dalla pigmentazione delle vecchie regine di complemento; nelle quali regioni determinate del corpo appaiono picchiettate di macchioline nere. Seguii l'insorgere e l'affermarsi progressivo della pigmentazione nei giovani reali; la ritrovai nelle regine sostitutive da alato bianco; conclusi essere dunque questa pigmentazione caratteristica dei reali di complemento e sostituzione, quale che sia lo stadio o forma larvale da cui si sviluppano e, non potendo spiegarla come dovuta ad arresto di questo (pigmentazione) come d'altri caratteri (non essendo negli insetti perfetti la pigmentazione mai preceduta da uno stadio iniziale a granuli), ne dedussi essere la pigmentazione, che insorge gradualmente nei reali complementari e sostitutivi, non un carattere specifico, sibbene l'espressione morfologica, per accumulo nei tegumenti di prodotti catabolici, d'uno stato fisiologico particolare legato evidentemente a una speciale dieta alimentare.

Ma troppo importante era il significato che io attribuivo al pigmento granulare caratteristico dei reali neotenici, perchè io potessi limitarmi al suo esame per trasparenza, *in toto*: mi si presentò necessario, a complemento e a controllo, lo studio istologico degli organi escretori e dei materiali escreti.

Con lo studio dei prodotti escretizi (materiali di rifiuto formati negli attivi processi di ricambio legati all'attività riproduttrice dei nostri insetti longevi), prodotti essenzialmente diversi nella natura chimica e per il processo di escrezione nei reali veri e nei neotenici, ho dimostrato l'esistenza, scoperta dal Grassi, di una dieta alimentare particolare, mercè la quale la deviazione dal corso dello sviluppo, la neotenia stessa è ottenuta. Ho gettato così qualche lume sui processi intimi del metabolismo nei reali veri e neotenici; soprattutto mi sono aperta la via a questo genere fecondo di studi. Ho mostrato nel *Termes* e nel *Calotermes* perfetta a questo riguardo l'identità dei fenomeni fisiologici.

Nello studiare l'escrezione dei reali neotenici, ho portato un contributo allo studio dell'escrezione negli insetti per i tegumenti, le cellule pericardiali, i tubi malpighiani, l'ovidotto e il tessuto adiposo.

Entro in qualche particolare.

Nei tegumenti dei vecchi neotenici, in corrispondenza agli scleriti, l'ipoderma monostratificato appiattito della cute molle si ispessisce in una fascia cellulare (a struttura complessa e sempre nettamente limitata dalla basale), nella quale appaiono, più o meno regolarmente allineati, dei grandi nuclei caratteristicamente vescicolari, con grosso nucleolo basofilo e bella rete debolmente cromatica, ai nodi punteggiata di granuli intensamente basofili; ognuno

di questi nuclei è contornato d'una aureola giallastra data dall'accumulo di granuli rotondati o angolosi, apparentemente amorfi, di colore in complesso giallo (cellule pigmentifere).

Tra areola ed areola appaiono interposte tante piccole cellule o, più esattamente (non vedendosi se non di rado netti limiti cellulari), tanti più o meno piccoli nuclei, sovente disposti su eleganti colonnine divisorie che il derma sovrastante sembra mandare e che raggiungono talvolta la basale (una tale struttura ricorda singolarmente la struttura dell'ipodermide in *Periplaneta*; v. Berlese).

Studiando i tegumenti nei giovani reali e nella ninfa di seconda forma, si assiste allo sviluppo delle suddette cellule pigmentifere: dapprima compaiono (si differenziano, pare, dalle comuni cellule di matrice verso la fine dello stadio ninfale) cellule ipodermali maggiori a nucleolo eosinofilo che vanno, man mano che l'individuo invecchia, ingrossando e caricandosi di materiali escretizi attorno al nucleo che assume la struttura suddescritta: vere ghiandole ipodermali escretrici. Escretrici nel senso che filtrano dal plasma circolante i materiali di rifiuto, non però per scaricarli all'esterno, sibbene per mantenerli immobilizzati, onde i tegumenti ne acquistano aspetto picchiettato caratteristico, dato appunto dalla discontinua distribuzione delle cellule pigmentifere nell'ipoderma.

Biologia. — *Differenze sessuali nei pesi del corpo e degli organi umani.* Nota I del dott. MARCELLO BOLDRINI, presentata dal Corrisp. D. LO MONACO ⁽¹⁾.

1. Con questa Nota e le seguenti, ci proponiamo di continuare lo studio delle differenze sessuali, iniziato con una nostra recente Memoria dal titolo: *Su alcune differenze sessuali secondarie nelle dimensioni del corpo umano alla nascita e alle età superiori* ⁽²⁾. Ci serviamo, a tal uopo, del materiale statistico che offre la letteratura, e di quello inedito che ci è stato possibile riunire a Roma, adottando, nell'elaborazione, gli stessi criteri impiegati in precedenza.

Un cenno sul metodo di studio e sul materiale statistico è necessaria premessa per la comprensione di quanto esporremo in seguito.

2. Diciamo che un dato carattere ha significato sessuale quando è abbastanza probabile che, scegliendo più volte a caso due individui qualunque

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1920.

⁽²⁾ Archivio per l'antrop. e l'etnol., vol. XLIX, Firenze, 1919 (stamp. nel 1920). Abbiamo riferite le osservazioni contenute nella Memoria citata e quelle che ora esponiamo al Congresso di fisiologia tenuto a Parigi nel luglio del 1920.

dei due sessi, essi differiscano, per quel carattere, ordinariamente allo stesso modo.

Il significato sessuale di un carattere, secondo questo concetto, scaturisce dalla più o meno grande probabilità che, in un certo numero di scelte, si presentino eccezioni: è dunque una questione quantitativa. E quindi, prendendo in esame non uno, ma più caratteri, dalla frequenza delle eccezioni rispettive è possibile stabilire una graduatoria della loro sessualità. Il che vuole anche dire che il significato sessuale di un carattere è una questione di confronto.

La capacità, che hanno le glandule mammarie, di secernere il latte ha significato sessuale, perchè è raro, per quante osservazioni si facciano, trovare un maschio con le glandule che posseggono tale capacità, e una femmina con le glandule che non la posseggono.

Anche i baffi hanno un significato sessuale, perchè pure è raro, per quante osservazioni si facciano, trovare un maschio glabro e una femmina coi baffi.

Se è più frequente che patisca eccezione la regola che i maschi abbiano baffi e le femmine non li abbiano, che non la regola che le femmine abbiano le mammelle capaci di secernere e i maschi no, la capacità di secernere il latte avrà maggior significato sessuale che non lo sviluppo pilifero del labbro superiore.

Per determinare la sessualità dei caratteri quantitativi, ci serviamo di due costanti, studiate dal Gini⁽¹⁾, e delle quali recentemente abbiamo cercato le modalità di applicazione⁽²⁾. Tali costanti, dette rispettivamente probabilità e intensità di transvariazione, rispondono alle formule:

$$P_{kh} = \frac{2s_{kh}}{n_k n_h} \qquad I_{kh} = \frac{2t_{kh}}{n_k n_h A_{kh}}$$

ed esprimono, per due serie, k (carattere maschile) e h (carattere femminile), rispettivamente di n_k e n_h termini, la probabilità che si presentino eccezioni alla regola che sarebbe dato di trarre dalla osservazione delle medie. Nella prima, s_{kh} indica il numero delle differenze fra i termini delle due serie aventi segno contrario al segno della differenza fra le mediane delle serie stesse, e il denominatore il doppio del numero massimo che tali differenze possono raggiungere. Nella seconda, t_{kh} indica la somma dei valori assoluti delle differenze fra i termini delle due serie aventi segno contrario al segno della differenza fra le medie aritmetiche delle serie stesse, e il denominatore il doppio dell'ammontare massimo che tali differenze possono raggiungere. La prima formula esprimerà la probabilità che due osservazioni

⁽¹⁾ *Il concetto di transvariazione e le sue prime applicazioni*, Roma, Athenaeum, 1916.

⁽²⁾ Archivio per l'autrop. e l'etnol. cit.

qualunque, fatte a caso nelle due serie, differiscano nel senso opposto al senso in cui differiscono le mediane; la seconda, la probabilità che due osservazioni qualunque fatte a caso nelle due serie, differiscano nel senso opposto e con la stessa intensità con cui differiscono le medie aritmetiche. Quanto più il valore di P_{hh} e di I_{hh} sarà elevato (cioè prossimo a uno), tanto minore sarà il significato sessuale della differenza osservata fra le mediane o fra le medie aritmetiche; e, reciprocamente, quanto più il loro valore sarà basso (cioè prossimo a zero), tanto maggiore sarà il significato sessuale di quella differenza. Graduando alcuni caratteri secondo i valori crescenti di P_{hh} oppure di I_{hh} (il che è praticamente indifferente per le serie numerose, mentre il secondo è preferibile per le serie più brevi), i caratteri stessi saranno anche graduati secondo la rispettiva sessualità decrescente. Le costanti di transvariazione rispondono quindi approssimativamente al concetto di sessualità precedentemente tracciato. Che esse poi abbiano valore generale e che si possano confrontare fra loro quelle ricavate per caratteri di individui differenti, dipende essenzialmente dalla sufficienza delle osservazioni, la quale, con le dovute cautele, dovremo solitamente ammettere. Per la tecnica del calcolo rinviamo alla nostra Memoria precedentemente citata.

3. Le costanti di transvariazione, come dicemmo già nella precedente Memoria, tengono conto di tre elementi: delle medie, della variabilità delle serie e della forma delle curve; e, quindi, rappresentano un progresso su tutte le soluzioni precedentemente ideate per interpretare la *tipicità* della differenza fra due medie, specialmente quando, come nel caso attuale, si tratti di medie di pesi, che, come già il Quételet riconobbe ⁽¹⁾, non rispondono di solito alla curva normale degli errori, ma a curve oblique. Abbiamo voluto controllare questa constatazione, e, tenendo presente che la classificazione dei poligoni di frequenza fra i vari tipi di curve unimodali dipende dalla rispettiva funzione critica secondo la formula del Pearson ⁽²⁾, abbiamo voluto determinare tale funzione per alcune serie di pesi di organi e di individui maschî. Abbiamo ottenuti i risultati seguenti, i quali provano che, ordinariamente, si presentano curve oblique e non normali, e, per giunta, di tipi diversi. Tener conto, quindi, della forma delle curve è indispensabile, quando si vogliano correttamente studiare i caratteri sessuali.

4. Il materiale statistico di cui possiamo disporre, per lo studio dei caratteri sessuali nei pesi del corpo e degli organi umani, ha varia prove-

(1) *Anthropométrie*, Bruxelles, 1871, pag. 354.

(2) La funzione critica corrisponde alla formula
$$F = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)}$$
,

dove β_1 e β_2 sono i rapporti dei momenti, dai quali anche dipende la forma della curva. Per il calcolo e per la classificazione delle curve secondo i valori di F , β_1 e β_2 , vedasi C. B. Davenport, *Statistical methods*, New-York, 2ª ed., s. a., pp. 21 seg.

ORGANI	AUTORE	F	β_1	β_2	TIPO DELLA CURVA (Class. del Pearson)
Encefalo	Boldrini	+ 1.159	1.608	6.146	VI
Cuore	"	— 1.258	1.883	4.990	I
Polmoni	"	— 0.269	0.090	3.003	Normale \div I
Milza	"	— 1.675	2.602	5.930	I
Fegato	"	+ 0.008	0.010	3.515	Normale \div IV
Reni	"	— 0.002	0.038	2.141	II
Encefalo	Bischoff	+ 0.130	0.146	3.657	IV
Peso complessivo .	"	+ 3.289	0.506	3.824	VI

nienza. Osservazioni sui neonati di Pisa⁽¹⁾ e sugli scolari di Bruxelles⁽²⁾ ci permetteranno di seguire il significato sessuale del peso del corpo durante lo sviluppo, mentre altre, molto attendibili, su adulti americani⁽³⁾, potranno indicarci il significato sessuale del peso definitivo. Preferiamo tali cifre a quelle ben più numerose rilevate in Germania, pesando i cadaveri di morti per lo più in seguito a malattie febbrili⁽⁴⁾, poichè è noto che, durante tali malattie, come durante il digiuno i singoli organi e i singoli tessuti, contenuti in proporzione diversa nell'organismo maschile e femminile, subiscono un logorio assai differente⁽⁵⁾, alterando quindi l'originario significato sessuale dei pesi. Dati tedeschi, poco attendibili per la detta ragione, e altri americani assai più importanti, perchè rilevati su cadaveri non visibilmente alterati e deperiti di individui morti in seguito a malattie acute o improvvisamente⁽⁶⁾, ci permetteranno di seguire il significato sessuale dei pesi di alcuni organi durante lo sviluppo, in due razze. Per le età adulte, i pesi dei maggiori organi ricavati con tecnica uniforme⁽⁷⁾, su cadaveri di uomini morti accidentalmente o improvvisamente e sottoposti ad autopsia giudiziaria, vennero da noi raccolti nelle sale incisorie di Roma. Ma utilizzeremo pure quanto la letteratura ci offre, anche relativamente a misure solo fino a un certo punto

(1) V. Frascani, *Annali d'ostetricia e ginecologia*, 1886.

(2) J. Demoor, *Bull. R. Académie de méd. de Belgique*, 4^{ème} série, tom. XXIX, Bruxelles 1919.

(3) F. G. Benedict e altri, *Journal of biological chemie*, vol. XVIII, 1914.

(4) Th. L. W. von Bischoff, *Das Hirngewicht des Menschen*, Bonn, 1880.

(5) L. Luciani, *Fisiologia dell'uomo*, IV ed., vol. V, Milano, 1913, pp. 4 e 22.

(6) R. Bennett-Bean, Publication 272 of the Carnegie Institution of Washington, pp. 263-286.

(7) La Circolare Ministeriale 30 giugno 1910, n. 1665, nel Bollettino ufficiale del Ministero di grazia e giustizia, 1910, pag. 325, detta tassativamente le norme per le autopsie giudiziarie

omogenee coi pesi di cui ci occupiamo; quindi, capacità cranica⁽¹⁾ e volume approssimativo dell'occhio, calcolato dalla media di cinque diametri⁽²⁾. Materiale sufficientemente ricco abbiamo anche potuto riunire sul peso di alcune ghiandole endocrine, come la pineale⁽³⁾, l'ipofisi e la tiroide⁽⁴⁾ e il timo⁽⁵⁾, e, coi dovuti accorgimenti, trattandosi talora di osservazioni di casi patologici, esamineremo il significato sessuale dei rispettivi pesi.

5. La maggior parte di questo materiale va adoperata con molta cautela, perchè i pesi degli organi provengono da cadaveri, e quindi possono essere più o meno alterati. Sotto questo aspetto, forse il più attendibile è quello da noi raccolto, sia perchè si tratta di individui appartenenti a classi sociali assai ristrette e quindi, come notò anche il Pearson⁽⁶⁾, probabilmente molto omogenee, sia perchè la causa di morte ebbe effetto così rapido (provato dalla necessità dell'autopsia) da non poter causare alterazioni nel peso degli organi. Tuttavia, è un fatto che i pesi rilevati mostrano una fortissima variabilità, la quale, necessariamente, deve attribuirsi alle tare morbose che, più o meno, affettano anche i viventi di ogni popolazione. E come, se si potessero pesare gli organi dei viventi, non si potrebbe concludere di aver osservato pesi normali, così è da stare guardinghi nel caso che ci interessa, quando anche si tratti di organi di individui morti per causa a rapidissimo effetto.

In prossime Note esporremo i dati e i risultati delle nostre ricerche.

(¹) L. Manouvrier, *Mém. Société anthrop. de Paris*, tom. III, 1888.

(²) Sappey, *Trattato di anatomia descrittiva*, Milano, s. a., vol. III, pag. 729.

(³) N. Pende, *Endocrinologia*, Milano, 1916, pag. 452; i dati sono di Cutore.

(⁴) A. Schoenemann, *Virchow's Archiv*, Bd. 129, an. 1912, pp. 310 seg.

(⁵) J. A. Hammar, *Archiv f. Anatomie u. Physiol., anat. Teil.*, Supplement Bd., 1906, pp. 21 seg.

(⁶) Nei crani dei parigini della *Cité*; vedi K. Pearson, *The chances of death*, vol. I, London, 1897, pp. 330-331

G. C.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1920.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo).



Mineralogia. — *Sulla presenza del crisoberillo nella dolomia di Campolongo* (Canton Ticino). Nota del Socio ETTORE ARTINI ⁽¹⁾.

Durante il riordinamento della ricca collezione mineralogica donata al Museo dal principe Giberto Borromeo, ebbi occasione di esaminare, tra altro, una bella serie di campioni provenienti da Campolongo, nel Canton Ticino, e, secondo ogni probabilità, precisamente dal classico giacimento nella dolomia del Passo Cadonighino. Numerosi sono sopra tutto gli esemplari di corindone, roseo o azzurro-violaceo, e di tormalina verde, del tipo noto e diffuso in tutte le collezioni: ma non mancano campioni di altri minerali meno comuni in questa località, e tra essi particolarmente notevole il diasporo, in limpidi cristalli prismatici.

In uno degli esemplari più piccoli colpì tosto la mia attenzione un cristallo di color verde piuttosto oscuro, molto aderente alla roccia dolomitica, e accompagnato da gruppetti di cristalli del già ricordato corindone, con nucleo azzurrastrò e zona periferica rosea; qualche laminetta di flogopite, e numerosi piccoli cristallini di pirite superficialmente limonitizzata vi si osservano pure disseminati. Il cristallo verde, del diametro di circa mm. 4, ha contorno nettamente esagonale, incompleto solo da un lato, dove è a contatto con un gruppetto di cristalli di corindone, e presenta abito

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1920.

tabulare, secondo la faccia esagona rivolta all'esterno, la quale è presso a poco parallela alla superficie della roccia in quel punto. Questa faccia esagonale è piuttosto brillante, e presenta tracce di striature, inclinate di 60° tra di loro; l'insieme ricorda l'aspetto di un piccolo trigemino di alessandrite, salvo un maggiore appiattimento e un colore alquanto meno brillante.

Che si trattasse di un cristallo di tormalina troncato ad una estremità da una larga faccia di base, come qualche volta se ne vedono negli esemplari di Campolongo, mi parve subito da escludere, e per il colore verde molto più carico, e per l'abito tabulare, evidentissimo nonostante la stretta aderenza del cristallo alla roccia.

Dal lato goniometrico pareva che non fosse il caso di sperare alcun risultato; si notavano infatti bensì, al contorno del cristallo, delle faccettine come di una apparente piramide esagona, ma ristrettissime, cariate, e non atte a dare riflessi utilizzabili al goniometro. Volli provare un saggio di durezza; ma, nel cimentare una faccia di quarzo con un vertice del cristallino, accadde che da questo si staccasse un frammento, relativamente grosso; questa piccola disgrazia mi fornì il materiale per una sicura determinazione del minerale.

Il frammento staccato, il quale verso l'esterno non presentava se non una sola faccia, parte della grande faccia esagona sopra ricordata, dal lato interno, verso la roccia, mi lasciò riconoscere tre nitide e brillanti faccette; l'osservazione goniometrica, resa così possibile, confermò nettamente la prima impressione da me ricevuta, che si trattasse di crisoberillo. Delle tre faccette, due sono di $\{111\}$ e la terza di $\{100\}$; quest'ultima è un poco striata secondo l'asse verticale, e ai due lati presenta tracce di prisma verticale, ma così profondamente solcate da non essere misurabili.

Ecco i valori ottenuti, posti a confronto coi calcolati dalle costanti di Melzer ⁽¹⁾: $a : b : c = 0,4707 : 1 : 0,5823$.

	Mis.	Medie	Calc.
$(100) . (111) =$	$42^\circ.58'$		
	43.10	$43^\circ.4'$	$43^\circ.5'$
$(111) . (1\bar{1}1) =$	40.9		40.13

Il frammento riga facilmente il quarzo, distintamente ma non facilmente il topazio. Esso affonda rapidamente nella soluzione di Rohrbach di densità = 3,5.

Il minerale è birifrangente biassico. Il potere rifrangente è elevatissimo, essendo il suo indice di rifrazione minimo, secondo le mie osservazioni, > 1.743 dello joduro di metilene. Dalla faccia (100), in joduro di metilene,

⁽¹⁾ G. Melzer, *Ueber einige Mineralien, vorwiegend von Ceylon*, Zeit. f. Kryst. XXXIII, 1900, pag. 240.

si vede uscire una bisettrice (l'ottusa); il piano degli assi ottici risulta parallelo a $\{010\}$.

Il pleocroismo è abbastanza forte, e sensibilmente diverso nel nucleo interno e nello strato superficiale; nel primo, che ricorda l'alessandrite, la tinta varia dal verde al rossiccio, mentre varia dal verde al giallognolo nella zona esterna. Non si può quindi riferire questo cristallo alla vera alessandrite, tanto più che a luce di candela il colore del frammento trasparente staccato non appare decisamente rosso, come nella alessandrite si osserva.

Sopra una minuta scheggiolina, tratta da una punta del frammento staccato, ho constatato che il minerale è affatto infusibile al cannello, e inattaccabile da tutti gli acidi, compreso il fluoridrico.

Queste proprietà insieme col risultato della osservazione goniometrica, mi pare che pongano fuori di dubbio il riferimento del nostro cristallino al crisoberillo. L'osservazione è tanto più interessante in quanto che non solo il minerale è nuovo per la località, ma è la prima volta, per quanto mi consta, che il crisoberillo viene trovato in una roccia carbonata. I suoi giacimenti finora noti erano infatti limitati a rocce granitiche filoniane, e a qualche roccia scistoso-cristallina, di tipo micascistoso o gneissico: il suo ritrovarsi caratteristico nelle pegmatiti accenna evidentemente ad una origine pneumatolitica.

La massa dolomitica di Campolongo e i minerali che vi si trovano (o, per meglio dire, che vi si trovavano soprattutto in passato) sono stati oggetto di numerosi studi, dei quali non è il caso di dar qui un riassunto; ricorderò solo, come particolarmente importante e ricco di notizie originali, frutto di pazienti osservazioni sul posto, il lavoro del Koenigsberger ⁽¹⁾, nel quale sono citati tutti i minerali finora trovati nella dolomia del Passo Cadonighino: corindone, diasporo, tormalina verde, tormalina bruna, fluorite, quarzo, pirite, flogopite e talco. Ora, sia in questa memoria particolareggiata, sia in altra più recente e di carattere più generale ⁽²⁾, nella quale ai sopra ricordati minerali si aggiunge la tremolite, sembra che l'autore riferisca la formazione dei minerali contenuti in questa e in altre dolomie alpine, essenzialmente ed esclusivamente a fenomeni di dinamometamorfismo. Nella seconda memoria egli anzi dice espressamente che « die Kalke und Dolomite wurden dynamometamorph umkrystallisiert und lokal in grobkörnige Marmore verwandelt. Die Beimengungen krystallisiren dann prächtig in kleinen Hohlräumen aus ». Che del resto egli non ritenga essere avvenuta una apprezzabile collaborazione da parte di agenti mineralizzatori di origine endo-

(1) J. Koenigsberger, *Geologische Beobachtungen am Pizzo Forno, und Beschreibung der Mineralagerstätten des Tessinermassivs*, N. Jahrb. für Min. Geol. Pal., Beil. Bd. XXVI, 1908, pag. 488.

(2) Idem, *Ueber Mineralfundorte in den Alpen, und über Gesteinsmetamorphismus*, Zeit. d. Deut. Geol. Gesell., Bd. 64, 1913, pag. 501.

gena, risulta chiaro dall'aver posto questo giacimento tra quelli di *tipo alpino*, i quali, secondo il suo modo di vedere, « stets nur Mineralien enthalten, deren chemischer Bestand durch Lateralsekretion aus dem Nachbargestein entnommen ist ».

Per ciò che si riferisce ai minerali nella dolomia del Passo Cadonighino, mi pare che questo modo di giudicare possa forse definirsi troppo assoluto ed esclusivo; e non posso che associarmi a quanto, molto sommariamente ma chiaramente, ne dice il Groth, il quale pure dell'opera diligente del Koenigsberger mostra di fare grande apprezzamento. Il geniale mineralogo di Monaco, dopo aver parlato appunto dei minerali della dolomia di Campolongo, dice, come per incidenza, « betrifft dieser, jedenfalls unter Mitwirkung von Pneumatolyse entstandenen Lagerstätten, sei, ecc. ecc. » ⁽¹⁾. La frequenza della tormalina era già molto espressiva a questo proposito; ma non priva di significato mi pare che possa ritenersi anche la constatazione della presenza del crisoberillo, sia pure in minima quantità: una tra le caratteristiche dell'opera dei mineralizzatori è appunto quella di concentrare in cristalli le tracce anche infinitesime di elementi rari da essi trasportate.

Matematica. — *Di alcune varietà abeliane.* Nota II di GIUSEPPE MARLETTA, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO (*).

10. Esaminiamo l'ipotesi $p = 5$ ⁽²³⁾, e quindi (n. 9) $r = 11$. Indicando con μ una radice primitiva 11^{esima} dell'unità, che sia inoltre uno dei cinque moltiplicatori della trasformazione T, le radici primitive 11^{esime} dell'unità sono

$$\mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \mu^5, \mu^6, \mu^7, \mu^8, \mu^9, \mu^{10}.$$

I moltiplicatori di T saranno dunque (n. 2)

1°) $\mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \mu^5$	9°) $\mu, \mu^3, \mu^4, \mu^5, \mu^9$
2°) $\mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \mu^6$	10°) $\mu, \mu^3, \mu^4, \mu^6, \mu^9$
3°) $\mu, \mu^2, \mu^3, \mu^5, \mu^7$	11°) $\mu, \mu^3, \mu^5, \mu^7, \mu^9$
4°) $\mu, \mu^2, \mu^3, \mu^6, \mu^7$	12°) $\mu, \mu^3, \mu^6, \mu^7, \mu^9$
5°) $\mu, \mu^2, \mu^4, \mu^5, \mu^8$	13°) $\mu, \mu^4, \mu^5, \mu^8, \mu^9$
6°) $\mu, \mu^2, \mu^4, \mu^6, \mu^8$	14°) $\mu, \mu^4, \mu^6, \mu^8, \mu^9$
7°) $\mu, \mu^2, \mu^5, \mu^7, \mu^8$	15°) $\mu, \mu^5, \mu^7, \mu^8, \mu^9$
8°) $\mu, \mu^2, \mu^6, \mu^7, \mu^8$	16°) $\mu, \mu^6, \mu^7, \mu^8, \mu^9$

(1) P. Groth, *Topographische Uebersicht der Minerallagerstätten.*, Verbesserter Sonderabdruck aus der Zeitschrift für praktische Geologie, 1916-17, pag. 15.

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1920.

(23) L'ipotesi $p = 3$ è stata studiata; cfr. Raciti, loc. cit. in (4).

Se la trasformazione T ha i moltiplicatori del caso 4°, la T^2 ha (a prescindere dall'ordine) quelli del caso 2°; se T ha i moltiplicatori del caso 5°, la T^3 ha quelli del 2°; se T ha i moltiplicatori del caso 6°, la T^6 ha quelli del 2°; se T ha i moltiplicatori del caso 7°, la T^7 ha quelli del 3°; se T ha i moltiplicatori del caso 8°, la T^2 ha quelli del 1°; se T ha i moltiplicatori del caso 10°, la T^4 ha quelli del 1°; se T ha i moltiplicatori del caso 11°, la T^5 ha quelli del 1°; se T ha i moltiplicatori del caso 12°, la T^4 ha quelli del 2°; se T ha i moltiplicatori del caso 13°, la T^3 ha quelli del 1°; se T ha i moltiplicatori del caso 14°, la T^3 ha quelli del 3°; se T ha i moltiplicatori del caso 15°, la T^5 ha quelli del 3°; se infine T ha i moltiplicatori del caso 16°, la T^2 ha quelli del 3°.

Si può dunque affermare che

per $p = 5$ la varietà Γ possiede una trasformazione birazionale periodica coi moltiplicatori

$$\begin{aligned} \mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \mu^5, & \text{ ovvero} \\ \mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \mu^6, & \quad " \\ \mu, \mu^2, \mu^3, \mu^5, \mu^7, & \quad " \\ \mu, \mu^3, \mu^4, \mu^5, \mu^9. & \end{aligned}$$

11. Concludiamo dunque (n. 3) che

se una varietà abeliana a 5 dimensioni ammette una trasformazione birazionale periodica in se stessa, rappresentata da una sostituzione lineare i cui moltiplicatori siano cinque radici dell'unità distinte e tutte appartenenti ad uno stesso esponente, allora essa varietà appartiene ad una matrice riemanniana isomorfa ad una delle seguenti quattro matrici, nelle quali μ è una radice primitiva 11^{esima} dell'unità:

$$A) \begin{vmatrix} 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & \mu^5 & \mu^6 & \mu^7 & \mu^8 & \mu^9 \\ 1 & \mu^2 & \mu^4 & \mu^6 & \mu^8 & \mu^{10} & \mu & \mu^3 & \mu^5 & \mu^7 \\ 1 & \mu^3 & \mu^6 & \mu^9 & \mu & \mu^4 & \mu^7 & \mu^{10} & \mu^2 & \mu^5 \\ 1 & \mu^4 & \mu^8 & \mu & \mu^5 & \mu^9 & \mu^2 & \mu^6 & \mu^{10} & \mu^3 \\ 1 & \mu^5 & \mu^{10} & \mu^4 & \mu^9 & \mu^3 & \mu^8 & \mu^2 & \mu^7 & \mu \end{vmatrix}$$

$$B) \begin{vmatrix} 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & \mu^5 & \mu^6 & \mu^7 & \mu^8 & \mu^9 \\ 1 & \mu^2 & \mu^4 & \mu^6 & \mu^8 & \mu^{10} & \mu & \mu^3 & \mu^5 & \mu^7 \\ 1 & \mu^3 & \mu^6 & \mu^9 & \mu & \mu^4 & \mu^7 & \mu^{10} & \mu^2 & \mu^5 \\ 1 & \mu^4 & \mu^8 & \mu & \mu^5 & \mu^9 & \mu^2 & \mu^6 & \mu^{10} & \mu^3 \\ 1 & \mu^6 & \mu & \mu^7 & \mu^2 & \mu^8 & \mu^3 & \mu^9 & \mu^4 & \mu^{10} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{C)} \quad \left\| \begin{array}{cccccccccc}
 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & \mu^5 & \mu^6 & \mu^7 & \mu^8 & \mu^9 \\
 1 & \mu^2 & \mu^4 & \mu^6 & \mu^8 & \mu^{10} & \mu & \mu^3 & \mu^5 & \mu^7 \\
 1 & \mu^3 & \mu^6 & \mu^9 & \mu & \mu^4 & \mu^7 & \mu^{10} & \mu^2 & \mu^5 \\
 1 & \mu^5 & \mu^{10} & \mu^4 & \mu^9 & \mu^3 & \mu^8 & \mu^2 & \mu^7 & \mu \\
 1 & \mu^7 & \mu^3 & \mu^{10} & \mu^6 & \mu^2 & \mu^9 & \mu^5 & \mu & \mu^8
 \end{array} \right\| \\
 \\
 \text{D)} \quad \left\| \begin{array}{cccccccccc}
 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & \mu^5 & \mu^6 & \mu^7 & \mu^8 & \mu^9 \\
 1 & \mu^3 & \mu^6 & \mu^9 & \mu & \mu^4 & \mu^7 & \mu^{10} & \mu^2 & \mu^5 \\
 1 & \mu^4 & \mu^8 & \mu & \mu^5 & \mu^9 & \mu^2 & \mu^6 & \mu^{10} & \mu^3 \\
 1 & \mu^5 & \mu^{10} & \mu^1 & \mu^9 & \mu^3 & \mu^8 & \mu^2 & \mu^7 & \mu \\
 1 & \mu^9 & \mu^7 & \mu^5 & \mu^3 & \mu & \mu^{10} & \mu^8 & \mu^6 & \mu^4
 \end{array} \right\|
 \end{array}$$

12. Consideriamo la matrice D).

Sommando agli elementi della prima orizzontale i corrispondenti delle altre, e posto $\mu + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5 + \mu^9 = \nu$ e $\mu^2 + \mu^6 + \mu^7 + \mu^8 + \mu^{10} = \nu'$, si ottiene la seguente matrice isomorfa alla D):

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc}
 5 & \nu & \nu' & \nu & \nu & \nu & \nu' & \nu' & \nu' & \nu \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
 \end{array} \right\|$$

Ma è $\nu + \nu' + 1 = 0$, quindi, operando per addizione e sottrazione sulle verticali, si riconosce subito che la matrice D) è isomorfa alla matrice

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \nu \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
 \end{array} \right\|$$

Ne segue senz'altro che la matrice D) è impura, e ad assi puri ellittici come già si avvertì nel n. 6.

13. Consideriamo ora la matrice A) del n. 11, e ammettiamo che essa sia impura e quindi (n. 6) ad indici di singolarità e di moltiplicabilità, massimi.

Gli spazî, a quattro dimensioni, τ e $\bar{\tau}$ immagini della detta matrice si possono ⁽²⁴⁾ dunque considerare come gli spazî fondamentali di un'omografia razionale biassiale Ω . L'equazione caratteristica di questa omografia ha quindi due sole radici distinte (imaginarie) ξ e ξ' , le quali sono anche radici del-

⁽²⁴⁾ Scorza, loc. cit. in ⁽¹⁾, parte I, n. 60.

l'equazione minima. Questa, giacchè Ω è generale, è ⁽²⁵⁾ di secondo grado; possiamo dunque affermare che ξ e ξ' sono radici di un'equazione quadratica a coefficienti interi. Ne risulta che le coordinate non omogenee di τ sono numeri della forma $g + l\xi$ con g ed l razionali. Ma siccome gli elementi di una stessa orizzontale della matrice A) sono le coordinate omogenee di un punto di τ , così dividendo per il determinante costituito dalle prime cinque verticali, quello che si ottiene sostituendo, in questo, agli elementi della quinta verticale quelli della sesta, si otterrà una coordinata non omogenea di τ ; ma il quoto ora detto è ⁽²⁶⁾ la somma degli elementi della seconda verticale, quindi indicando con s e t numeri razionali possiamo scrivere

$$\mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5 = s + t\xi,$$

e di conseguenza

$$\mu^{10} + \mu^9 + \mu^8 + \mu^7 + \mu^6 = s + t\xi';$$

ne seguirebbe che il prodotto dei primi membri dovrebbe essere un numero razionale, perchè tale è il prodotto dei secondi membri, cioè dovrebbe essere

$$4\mu^{10} + 3\mu^9 + 2\mu^8 + \mu^7 + \mu^4 + 2\mu^3 + 3\mu^2 + 4\mu + 5 = R,$$

indicando con R un numero razionale; e, infine, tenendo conto della

$$(1) \quad \mu^{10} + \mu^9 + \mu^8 + \mu^7 + \mu^6 + \mu^5 + \mu^4 + \mu^3 + \mu^2 + \mu + 1 = 0,$$

dovrebbe essere

$$\mu^9 + 2\mu^8 + 3\mu^7 + 4\mu^6 + 4\mu^5 + 3\mu^4 + 2\mu^3 + \mu^2 + (R - 1) = 0,$$

ciò che è assurdo, perchè questa eguaglianza, qualora si consideri μ come incognita, non è un'identità, mentre d'altra parte la (1) è un'equazione irriducibile nel corpo dei numeri razionali.

Possiamo dunque affermare che la matrice A) è pura; e siccome col medesimo procedimento si perviene allo stesso risultato anche per le matrici B) e C), così possiamo concludere che

le matrici riemanniane A), B), C) sono pure ⁽²⁷⁾.

⁽²⁵⁾ Loc. cit. in ⁽¹²⁾.

⁽²⁶⁾ Cfr. p. es. E. Pascal, *I determinanti* [Hoepli, Milano, 1897], pp. 171 e 172.

⁽²⁷⁾ Mediante considerazioni analoghe a quelle tenute in questo numero, si può dimostrare che sono *pure* le due seguenti matrici riemanniane:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^5 & \alpha \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^3 & \omega^7 & \omega^2 \end{vmatrix},$$

ove α e ω sono radici primitive dell'unità rispettivamente settima e nona; risultato a cui pervenne, per via completamente diversa, la Raciti nel loc. cit. in ⁽⁴⁾, n. 6.

Matematica. — *Sopra una equazione funzionale.* Nota II di PIA NALLI, presentata dal Corrisp. BAGNERA ⁽¹⁾.

4. Tutto quanto abbiamo esposto prelude alle proprietà delle soluzioni $u(x)$ dell'equazione integrale

$$(7) \quad u(x) = \lambda \left[g(x) u(\alpha x) + \int_0^x N(x, s) u(s) ds + \int_0^{\alpha x} P(x, s) u(s) ds \right] + f(x),$$

limitandoci per ora a supporre $|\alpha| < 1$.

Per $P(x, s) \equiv 0$ si ha l'equazione

$$u(x) = \lambda \left[g(x) u(\alpha x) + \int_0^x N(x, s) u(s) ds \right] + f(x)$$

che richiama quella studiata dal Picard ⁽²⁾, e cioè

$$u(x) = g(x) u(\alpha x) + \lambda \int_0^x N(x, s) u(s) ds + f(x)$$

e ne differisce soltanto per la posizione del parametro λ .

Ma a questo proposito (senza che per il momento io abbia potuto approfondire l'essenza del fatto) ho potuto constatare nel presente ordine di ricerche ed in quelle da me fatte sulle equazioni integrali del tipo

$$(8) \quad \varphi(x) = \lambda \left[k(x) \varphi(x) + \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds \right] + f(x),$$

che quando si tratta d'introdurre un parametro λ in una equazione funzionale

$$\varphi = S[\varphi] + T[\varphi] + f,$$

che dipende da due operazioni lineari S e T , conviene di mettere il parametro λ a fattore in entrambe le operazioni S e T invece che a fattore di una sola di esse, perchè allora riesce più semplice lo studio della soluzione come funzione di λ .

È così che nei miei lavori precedenti ho potuto dire di più sopra la soluzione dell'equazione (8) di quanto si è potuto dire sull'equazione di terza specie di Hilbert, che è del tipo

$$k(x) \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1920.

(2) Picard, *Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLIV (1^{er} semestre 1907), pp. 1009-1012].

Nello studio della sua equazione il Picard suppone $g(0) = 1$, il che porta, per la funzione data $f(x)$, la limitazione $f'(0) = 0$; e, così facendo, lascia fuori il caso normale dell'unicità della soluzione in corrispondenza ad un'arbitraria $f'(x)$. Difatti il Picard, per fissare una soluzione, dà ad arbitrio il valore della u per $x = 0$ e dimostra che allora la soluzione è funzione intera del parametro λ .

Osserviamo poi che la forma (7), da noi adottata, è tale che quando si fissa λ e si deriva rispetto ad x , si ottiene una equazione che può essere ricondotta allo stesso tipo (7), il che non avviene per la forma adottata dal Picard.

Aggiungiamo ancora che la (7), con $\lambda = 1$, nell'ipotesi che sia $|g(x)| < 1$, è compresa in un tipo più generale di equazioni funzionali studiato dal Picone (¹).

5. Mostrerò in altra Nota che, almeno sotto certe condizioni di derivabilità delle funzioni che vi figurano, l'equazione (7) ha una soluzione unica che è *funzione intera di λ se $g(0) = 0$; e se è $g(0) \neq 0$, la soluzione è funzione meromorfa di λ che ammette come poli semplici i punti*

$$\lambda_n = \frac{1}{\alpha^n g(0)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Uno o più di questi poli possono mancare se i valori della $f(x)$ e delle sue derivate, calcolati per $x = 0$, soddisfano ad alcune relazioni lineari omogenee che in appresso scriveremo.

In corrispondenza al valore λ_n c'è una funzione $u_n(x)$, determinata a meno di una costante moltiplicativa, che soddisfa all'equazione omogenea

$$u_n(x) = \lambda_n \left[g(x) u_n(\alpha x) + \int_0^\infty N(x, s) u_n(s) ds + \int_0^{\alpha x} P(x, s) u_n(s) ds \right].$$

Si hanno così le *funzioni fondamentali* $u_n(x)$ dell'equazione (7) e le corrispondenti *costanti caratteristiche* λ_n .

Qui si pone il problema della rappresentazione di una assegnata funzione in serie di funzioni fondamentali, serie che sono più da assimilarsi a generalizzazioni di serie di potenze anzichè a generalizzazioni di serie di Fourier, come sarebbero gli sviluppi in serie di funzioni fondamentali di un'equazione di Fredholm. Ed anche qui se $h(x)$ si rappresenta in serie di funzioni fondamentali, l'operazione funzionale

$$g(x) h(\alpha x) + \int_0^\infty N(x, s) h(s) ds + \int_0^{\alpha x} P(x, s) h(s) ds$$

(¹) Picone, *Sopra un problema dei valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second'ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXXI (1° semestre 1911), pp. 133-169].

eseguita su $h(x)$ equivale a dividere i vari termini della serie per le corrispondenti costanti caratteristiche.

Per esempio, se si fa $g(x) \equiv 1$, $N(x, s) \equiv 1$, $P(x, s) \equiv 0$, si ha l'equazione

$$(9) \quad u(x) = \lambda \left[u(\alpha x) + \int_0^x u(s) ds \right] + f(x).$$

In questo caso, come si vedrà in seguito, la funzione fondamentale $u_0(x)$ corrispondente al valore caratteristico $\lambda_0 = 1$, è data da

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! (1 - \alpha) (1 - \alpha^2) \dots (1 - \alpha^n)}.$$

Si trova poi facilmente l'espressione di $u_n(x)$ tenendo conto che questa (come del resto nel caso generale) ha per $x = 0$ uno zero di ordine n e tenendo conto della relazione ricorrente

$$u'_n(x) = u_{n-1} \left(\frac{x}{\alpha} \right).$$

6. Dalla (9), prendendo per $f(x)$ una costante, si ottiene, derivando,

$$(10) \quad u'_n(x) = \lambda [\alpha u'(\alpha x) + u(x)]$$

che si può considerare come una equazione differenziale lineare omogenea del prim'ordine generalizzata.

Per ogni valore di λ diverso da $\frac{1}{\alpha^n}$ ($n \geq 1$) questa equazione ammette una sola soluzione che prende un valore fissato per $x = 0$. In particolare, è nulla identicamente la soluzione che si annulla per $x = 0$.

Invece l'equazione (10), per il valore eccezionale $\lambda = \frac{1}{\alpha^n}$, ammette una soluzione non identicamente nulla, ma che si annulla per $x = 0$. Anche quando λ non è un valore eccezionale, tutte le soluzioni della (10) si ottengono moltiplicando una di esse per una costante arbitraria.

Risultati di indole più generale otterremo dallo studio delle soluzioni $u(x)$ di equazioni del tipo

$$\Phi[x, u(x), u(\alpha x), u'(x), u'(\alpha x), \dots, u^{(n)}(x), u^n(\alpha x)] = 0.$$

Se il primo membro contiene linearmente la u e le sue derivate calcolate in x ed in αx , faremo vedere che la risoluzione di una tale equazione si riconduce alla risoluzione di una equazione del tipo (7).

Fisica. — *Influenza della dissociazione sull'assorbimento del permanganato di potassio*. Nota del dott. EMILIO ADINOLFI, presentata dal Corrisp. M. CANTONE ⁽¹⁾.

Per essere la quantità di luce assorbita dalle soluzioni funzione esponenziale dello spessore dello strato assorbente e della concentrazione della sostanza che esercita l'assorbimento, le leggi di Lambert e di Beer offrono due vie distinte per la ricerca dei centri di risonanza. La identità dei risultati ottenuti da queste due vie diverse è subordinata alle condizioni che nelle differenti concentrazioni o lo stato molecolare della sostanza non varii o che la variazione non eserciti influenza sul modo di funzionare del vibratore. E, senza questa seconda ipotesi, non potremmo spiegarci perchè molte sostanze, per le quali si suole ammettere un potere colorante proprio del jone positivo o negativo, non presentano variazioni dell'assorbimento con la dissociazione. Sull'argomento vi è l'interessante produzione del Magnanini ⁽²⁾ con misure fotometriche eseguite sui cromossalati, sui violurati, su alcuni sali di Cu e Ni e sul permanganato potassico; e le conclusioni furono prima in disaccordo con la teoria degli joni colorati dell'Ostwald, e poi in concordanza con essa. Nè le misure del Vaillant ⁽³⁾, a giudizio dello stesso autore, sono decisive al riguardo, in quanto che, mentre per il permanganato di zinco si riscontra una influenza certa della dissociazione sull'assorbimento, per i corrispondenti sali di Ba e di K non si possono invece trarre conclusioni sicure. Il difetto comune a queste ricerche è la poca sensibilità dei metodi impiegati.

Una variazione dell'assorbimento, dovendo importare o uno spostamento dei centri o una variazione della loro intensità relativa, può facilmente essere messa in rilievo con il metodo spettrografico da me indicato nella Nota precedente. Si è fatto perciò il confronto tra soluzioni di permanganato in presenza del solvente puro e la stessa soluzione che diffonde in altra avente il medesimo catione e concentrata al punto da aversi un grado di dissociazione trascurabile. In questo secondo caso, se si opera con soluzione diluita di permanganato, la diffusione è accompagnata da una diminuzione del grado di dissociazione.

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1920.

(2) Rend. R. Acc. dei Lincei, 1891, vol. VII, 2° sem.; id. id., 1893, vol. II, 1° sem. id. id., 1893, vol. II, 2° sem.; id. id., 1895, vol. IV, 2° sem.

(3) Ann. de chim. et de phys., 1903, tom. 28, pag. 213.

Le fotografie della 3^a negativa riguardano due soluzioni di KMnO_4 , all' 1 ‰ (concentrazione alla quale la dissociazione è completa), l'una in presenza di una soluzione di KSO_4 al 5 % e l'altra in presenza di acqua distillata.

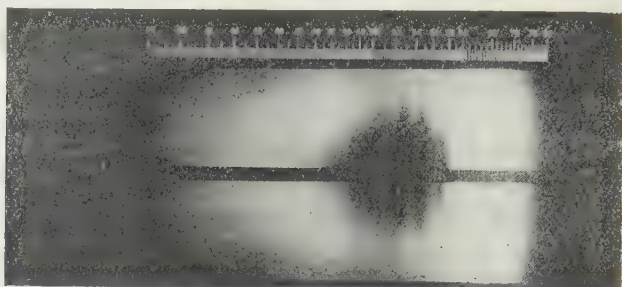


FIG. 3.

Si riscontra perfetta identità nella posizione dei massimi e nella loro intensità.

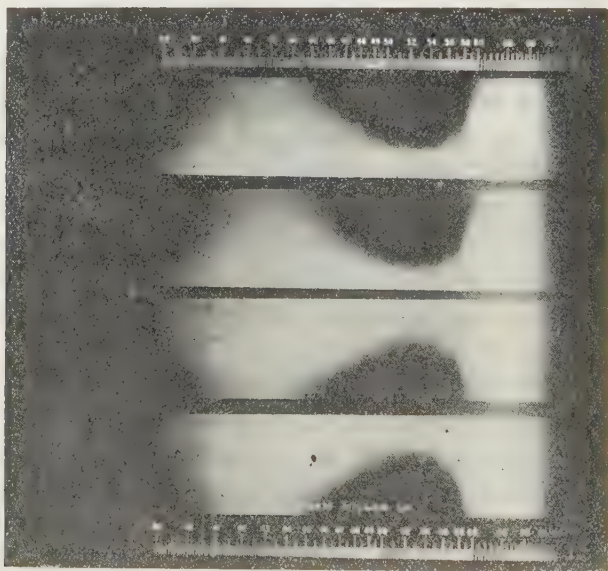


FIG. 4.

La seconda serie di fotografie mette a confronto soluzioni di KMnO_4 al 2 ‰, che diffonde nel solvente puro (fot. 1 e 2 della Nota precedente), con la stessa soluzione diffondente in altra di KCl alla concentrazione di 3 molecolegrammi per litro (fot. 3 e 4).

Parmi così ancora provato, e in modo molto semplice, che la dissociazione per il permanganato potassico non è seguita da una variazione nello

spettro di assorbimento, il che farebbe supporre che il gruppo atomico MnO_4 conserva la propria funzione anche nella molecola non dissociata, imponendo la sua vibrazione caratteristica.

* * *

I risultati delle ricerche, brevemente esposte in questa Nota e nella precedente, possono riassumersi nelle seguenti conclusioni:

1°) La ricerca dei centri di assorbimento può essere fatta con vantaggio, nei riguardi della precisione e speditezza, sottoponendo all'esame spettrografico soluzioni a concentrazione variabile per diffusione.

2°) I permanganati di potassio e di calcio hanno lo stesso spettro di assorbimento; e le frequenze degli otto centri, che li caratterizzano nello spettro visibile, sono legate dalla relazione $\nu = \nu_m \pm 753 \text{ n}$.

3°) La dissociazione non ha influenza sullo spettro di assorbimento del KMnO_4 .

Rendo al prof. Cantone pubbliche grazie per l'aiuto di cui mi è stato prodigo.

Chimica. — *L'analisi termica del sistema nitrato di tallio-nitrato di tallio-* ⁽¹⁾. Nota di VITTORIO CUTTICA, presentata dal Corrispondente GUIDO PELLIZZARI ⁽²⁾.

Lo studio termico di questo sistema, i cui risultati sono esposti nella presente Nota, è stato fatto, a complemento del lavoro pubblicato lo scorso anno da Rolla e Belladen ⁽³⁾, allo scopo di stabilire l'eventuale formazione di complessi nitroso-nitrici del tallio.

Dalla conducibilità specifica delle soluzioni acquose preparate sostituendo in una soluzione di TlNO_3 mano a mano a quantità crescenti di solvente volumi eguali di soluzione di TlNO_2 di nota concentrazione, non è possibile ricavare deduzioni sicure, poichè la curva rappresentante i valori delle conducibilità specifiche in funzione delle concentrazioni non presenta, secondo le determinazioni di Rolla e Belladen, un punto di flesso ben netto, come sarebbe richiesto per dedurre, seguendo il metodo di Kohlrausch, la formazione di un complesso.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica Inorganica e Chimica-Fisica del R. Istituto di studi superiori in Firenze, giugno 1920.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1920.

⁽³⁾ Gazzetta Chim. Ital., an. 49, parte II, pag. 223.

Il nitrato di tallio adoprato è stato ottenuto per soluzione del metallo nell' HNO_3 diluito. Le tracce di piombo furono eliminate precipitandole a mezzo dell' H_2S . Il TlNO_3 ottenuto fu ricristallizzato due volte.

Questo sale fonde a 205° 206° . Presenta due punti di trasformazione polimorfica: uno a $143^\circ.5$ dalla forma rombica alla forma romboedrica; un altro a $72^\circ.5$ ritornando alla modificazione rombica ⁽¹⁾.

Questi punti di trasformazione sono nettamente rivelabili alle evoluzioni termiche presentate dalla massa del sale durante il raffreddamento.

Il nitrito di tallio è stato preparato per doppia decomposizione, facendo reagire soluzioni equimolecolari di $\text{Ba}(\text{NO}_2)_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ e di Tl_2SO_4 ⁽²⁾. Filtrando il precipitato formatosi, concentrando nel vuoto il filtrato ed aggiungendo alcool assoluto, si separa dal liquido una massa pulverulenta di color arancio di TlNO_2 . Questo sale è facilmente ossidabile all'aria; più rapidamente coll'elevarsi della temperatura. A 120° l'ossidazione ha già un valore cospicuo ⁽³⁾, mentre elevando di molto la temperatura si scompone dando anidride nitrosa ed ossido talloso ⁽⁴⁾. Per determinarne il punto di fusione fu perciò riscaldato gradatamente, in corrente di idrogeno puro, e portato fino a 170° .

Fino a questa temperatura non fu notata nessuna alterazione nella composizione del sale. La massa fusa presentava un colore rosso vivissimo, manifesto già a 140° . L'operazione della fusione veniva condotta così:

il nitrito veniva messo in un tubetto di vetro collocato al fondo di una grossa provetta chiusa da un tappo a tre fori. Per uno passava un termometro, rivestito da un tubo di vetro, il cui bulbo era immerso nella massa del sale; attraverso il secondo foro passava il tubo adduttore dell'idrogeno, il terzo foro serviva per l'uscita del gas.

L'arresto dovuto alla solidificazione del TlNO_2 fu notato sempre a 149° . Un'altra evoluzione termica, nettamente apprezzabile, è stata notata intorno a 131° contemporaneamente al passaggio delle massa dal colore rosso al giallo arancio. Tale trasformazione, per quanto ci consta, non è stata finora citata.

Le miscele di nitrato e nitrito, ciascuna del peso complessivo di dieci grammi, sono state preparate con concentrazioni di nitrito crescenti di cinque in cinque per cento in peso. Esse venivano introdotte nella provetta dianzi cennata e portate a fusione in corrente di idrogeno la cui velocità era mantenuta il più possibile costante onde non influenzare la velocità di raffreddamento. La lettura delle temperature veniva fatta di 30 in 30".

⁽¹⁾ Abegg's Hand. An. Ch., vol III, parte I, pag. 430.

⁽²⁾ Vogel, Ztf. für An. Ch., XXXV, pag. 404.

⁽³⁾ Vogel, Ztf. für An. Ch., XXXV, pag. 406.

⁽⁴⁾ Thomas, C. R., 138, pag. 1699 (1904).

Nella tabella seguente sono riportate le temperature d'inizio e di fine delle cristallizzazioni e delle trasformazioni osservate durante il raffreddamento.

COMPOSIZIONE per 100 in peso		TEMPERATURE				COMPOSIZIONE per 100 in peso		TEMPERATURE			
TiNO ₃ TiNO ₂		di inizio della solidificazione	di fine della solidificazione	di inizio della trasformazione	di fine della trasformazione	TiNO ₃ TiNO ₂		di inizio della solidificazione	di fine della solidificazione	di inizio della trasformazione	di fine della trasformazione
100	—	206 ⁰	205 ⁰	143,5 ⁰	143 ⁰	50	50	185,5 ⁰	168 ⁰	— ⁰	— ⁰
95	5	205	197	112	106	45	55	180	164	—	—
93,5	6,5	—	—	105	95	40	60	175	160	—	—
90	10	202,5	191	—	—	35	65	172	157	—	—
85	15	201	189	—	—	30	70	166	155	—	—
80	20	199	184	—	—	25	75	164	151	—	—
75	25	197	182	—	—	20	80	161	149	—	—
70	30	195,5	179	—	—	15	85	158	147	113	107
65	35	193,5	177	—	—	10	90	156	145	118	112
60	40	191,5	174	—	—	5	95	153	148	122	118
55	45	187	170	—	—	—	100	149	149	131	130

Dalla forma delle curve di raffreddamento costruite in base ai dati ora riferiti si desume che il punto di fusione dell' α -TiNO₃ viene abbassato in modo continuo dalla presenza dell' α -TiNO₂. L'intervallo di cristallizzazione che si osserva, fa dedurre la formazione di soluzioni solide. Per nessuna concentrazione fu notato arresto entetico.

Il punto di trasformazione dell' α -TiNO₃ in β -TiNO₃ viene abbassato dal TiNO₂. Il punto di trasformazione dell' α -TiNO₂ in β -TiNO₂ viene del pari abbassato dalla presenza del TiNO₃. Mentre però i due sali nella modificazione α danno luogo ad una serie continua di cristalli misti, in proporzioni abbastanza estese; nella modificazione β la serie è discontinua.

La trasformazione dell' α -TiNO₃ in β -TiNO₃ è limitata alla concentrazione del 6,5 % in peso di TiNO₂; la trasformazione dell' α -TiNO₂ in β -TiNO₂ è limitata alla concentrazione del 15 % in peso circa di nitrato di tallio.

Le miscele fuse presentano tutte un colore rosso vivo persistente anche a solidificazione avvenuta ed a temperatura ordinaria. In esse il colore rosso diventa sempre più vivo a misura che aumenta la concentrazione del TiNO₂ fino al valore dell'85 % di quest'ultimo. Oltre tale concentrazione il colore della miscela solida e fredda presenta il colore arancio chiaro del β -TiNO₂.

Si può quindi ritenere che le soluzioni solide che si formano a caldo siano stabili anche a temperatura ordinaria.

Questo comportamento si differenzia da quello dei cristalli misti di NaNO_3 — NaNO_2 , i quali invece si decompongono completamente col raffreddamento ⁽¹⁾.

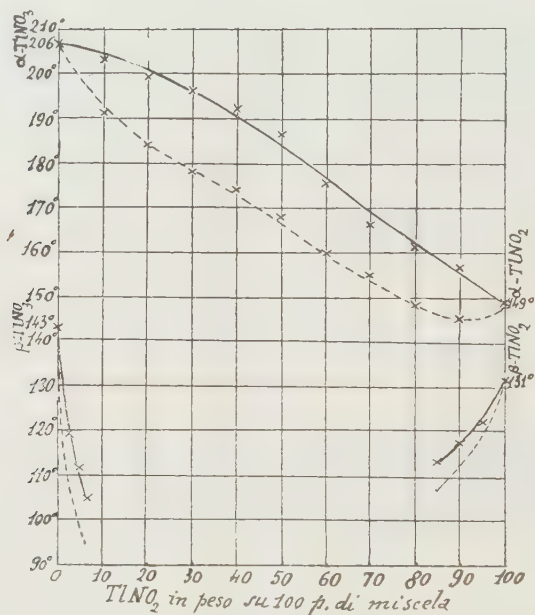


Diagramma di stato TlNO_3 - TlNO_2

Concludendo: In ordine al comportamento termico delle miscele fuse di nitrato e nitrito di tallio, è da escludersi la formazione di complessi. I due sali formano una serie continua di cristalli misti; e in questi la trasformazione, allo stato solido, è da riferirsi al tipo II della classificazione dei sistemi binari, con trasformazioni polimorfiche, fatta da Roozeboom ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Bruni e Menghini, Gazzetta Chim. Ital., 40, parte I, pag. 686 (1910).

⁽²⁾ B. Roozeboom, Zft. für Phy. Ch., XXX, pag. 418 (1899).

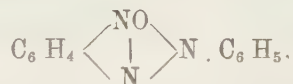
Chimica. — *Riduzione catalitica dell' o-nitroazossibenzolo* ⁽¹⁾.
Nota di GUIDO CUSMANO, presentata dal Socio A. ANGELI ⁽²⁾.

I comuni riducenti chimici, almeno nei casi finora studiati, agiscono sul gruppo ossiazoico $\text{— N} = \text{N} \text{—}$ più facilmente che non sul gruppo nitrico



— NO_2 . Difatti, Werner e Stiasny ⁽³⁾, trattando i *m, m'*- e *p, p'*- dinitroazossibenzoli con solfuro ammonico a caldo, passarono ai nitroidrazobenzoli: così pure Klinger e Zuurdeeg ⁽⁴⁾, agendo con stagno e acido cloridrico sui 2, 3, 4- e 2, 2', 4- trinitroazossibenzoli, pervennero agli azo- e agli idrazocomposti e perfino a rompere la catena azoica senza che fossero attaccati i gruppi nitrici.

Dall' *o*-nitroazossibenzolo, per mezzo del solfuro ammonico lo Zininn ⁽⁵⁾ ottenne quel composto che più tardi fu riconosciuto da Werner e Stiasny (loc. cit.) per aznitrosobenzolo,



e risultati analoghi furono ottenuti dai derivati del primo ⁽⁶⁾. Qui non possiamo stabilire con certezza come si svolga la riduzione; ma, poichè gli aznitrosocomposti si possono anche preparare o riducendo gli *o*-nitroazo-, o per azione degli alcali sugli *o*-nitroidrazobenzoli, è lecito pensare che pure nella suddetta riduzione dell' *o*-nitroazossibenzolo si modifichi il gruppo ossiazoico prima che entri in giôco il gruppo nitrico.

In una recente nota ⁽⁷⁾, sopra la riduzione con platino e idrogeno dei nitrocomposti aromatici, ho fatto conoscere che, impiegando a temperatura ordinaria questo processo, risulta invertito l'ordine con il quale i due gruppi

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di studi superiori in Firenze.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1920.

⁽³⁾ *B. d. deut. ch. Ges.* 32, 3272. [1899].

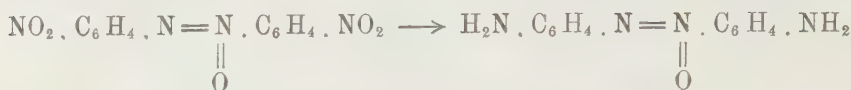
⁽⁴⁾ *Liebig's Ann.* 38, 222.

⁽⁵⁾ *Ibid.* 255, 382.

⁽⁶⁾ B. Valori, questi Rendiconti XXI, serie 5^a, 1^o sem., pag. 794 [1912].

⁽⁷⁾ *Ann. di chim. appl.*, vol. XII, pag. 123 (1919). Vedi anche Cusmano, *Rend. Accad. Lincei*, XXVI, serie 5^a 2^o sem., pag. 87 (1915); in quest'ultima nota sono contenute gran parte delle conclusioni pubblicate nel 1919 da F. F. Nord, in *Ber. d. d. chem. Ges.* 52, 1705, a proposito della riduzione catalitica del nitrobenzolo; però l'A. non cita il mio lavoro.

si fanno concorrenza di fronte ai comuni riducenti; vale a dire, delle due reazioni di riduzione il catalizzatore accelera quella che impegna il gruppo nitrico. Ho infatti constatato che dal *m, m'*-dinitroazossibenzolo si passa alla cosiddetta azossianilina:



Mi son ora valso di questa mia osservazione per determinare se dallo *o*-nitroazossibenzolo sia possibile giungere al composto amidico corrispondente: e ho verificato che appunto così avviene. Agitando a temperatura ordinaria una soluzione eterea del nitrocomposto (1 mol.), nella quale sia sospeso del nero di platino, in una atmosfera d'idrogeno (3 mol.), il gas viene assorbito rapidamente e si formano varii composti di riduzione. Fra di essi si ha, è vero, dell'aznitrosobenzolo, ma anche e principalmente l'*o*-aminoazossibenzolo, sino ad oggi sconosciuto: una sostanza che cristallizza dall'alcool, in lunghi prismi appiattiti, con il punto di fusione a 97°. Con gli acidi cloridrico e solforico forma sali ben cristallizzati incolori; dà con tutta facilità un derivato acetilico, che fonde a 157°.

La sua formola di struttura è la II. poichè, basandoci sulle ricerche del prof. Angeli sugli azossicomposti ⁽¹⁾, all'*o* nitroazossibenzolo originario va assegnata la I:

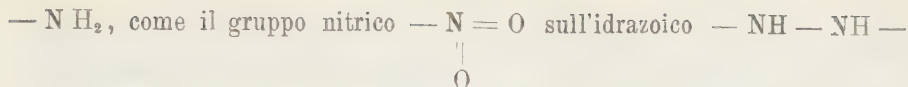


Il comportamento della nuova sostanza presenta un lato che vale la pena di segnalare; essa, riscaldata a b. m. con acido solforico concentrato puro, invece della trasposizione scoperta da O. Wallach, per cui dagli azossibenzoli si passa agli isomeri ossiazo-, subisce una disidratazione intramolecolare trasformandosi nel fenilaziminobenzolo:



Com'è noto, questa sostanza era stata ottenuta per riduzione dell'aznitroso-, o per ossidazione dell'*o*-aminoazobenzolo. Il nuovo modo di formazione, che qui descrivo, si può appunto riferire a quest'ultimo processo, salvo che nel mio caso l'ossigeno, anzichè dall'esterno, è fornito dal gruppo ossiazoico — $\underset{\text{O}}{\underset{\parallel}{\text{N}}} = \text{N}$ — il quale, per questo riguardo, agisce sull'amidico

⁽¹⁾ Gazz. ch. ital, XLVI, b, 86 [1916].



nella nota formazione dell'aznitrosobenzolo (l'ossido del fenilazimido-) dall'o nitroidrazobenzolo.

Ho fatto agire l'acido solforico concentrato anche sul derivato acetilico dell'o aminoazossibenzolo; ma questa volta, come era da aspettarsi, ho avuto la trasposizione del Wallach.

La descrizione dettagliata delle reazioni qui schematizzate sarà tra breve pubblicata nella Gazzetta chimica italiana.

Biologia. — *Sulla differenziazione delle caste nella società dei termitidi: i neotenici* ⁽¹⁾. Nota II di C. JUCCI, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽²⁾.

Nei reali neotenici, contemporaneamente al picchiettarsi dei tegumenti (la distribuzione delle macchioline nere corrisponde alla distribuzione delle cellule pigmentifere nell'ipoderma e la loro struttura anulare è data dall'accumulo anulare dei granuli pigmentari attorno ai grossi nuclei escretori), ha luogo un deposito progressivo della stessa sostanza pigmentaria nelle cellule pericardiali.

Nelle giovanissime regine dette cellule sono farcite di granuli, dei quali i meno piccoli, a forte ingrandimento, appaiono come concrezionule gialle d'aspetto solido e di forma cristallina, impiantate sui fili d'un netto reticolo citoplasmatico; ma la maggior parte hanno aspetto di grumetti della stessa natura del plasma emolinfatico, glomeruli di sostanza organica che, filtrata dal plasma, sarà dalla cellula pericardica elaborata concretandone in forma cristallina la parte salina escretanda. In meno giovani regine le cellule pericardiali, polinucleate, a reticolo citoplasmatico poco netto, appaiono tutte granulate di concrezionule gialle di forma angolosa (talvolta esagonale), d'aspetto cristallino, tanto più numerose e grandi quanto più l'individuo è avanzato in età. Nelle vecchie regine, più non si presentano elementi cellulari ben definiti e nemmeno lobuli plurinucleati pericardici: è tutta una zona escrettrice, tutta una fascia di tessuto sinciziale che, conservando più o meno nettamente la nota disposizione bipiramidale, comprende immerso nel suo seno il vaso dorsale divenuto piccolo e stretto e sembra obliterare, almeno nel torace, completamente la cavità pericardica. Questo tessuto sinciziale peri-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1920.

cardico è tutto vacuolare, come costituito da tanti otricoli ripieni di grosse concrezioni. In sezione gli otricoli si presentano come le larghe maglie d'una grossolana rete protoplasmatica, onde risulta, senza verun limite cellulare, tutto il tessuto. Sulle grosse briglie protoplasmatiche, che anastomizzandosi formano le pareti degli otricoli, e specialmente ai nodi della rete, appaiono nuclei sparsi. In qualche punto del tessuto le briglie, irraggiando da un nucleo, ricordano la struttura largamente vacuolare dei più vecchi elementi pericardici nelle giovani regine. Debbono essere elementi relativamente ancora giovani: e difatti contengono concrezioni più piccole se non meno numerose. Invece altri otricoli non mostrano se non uno straticolo parietale di protoplasma e sono ridotti a semplici sacculi ripieni di grosse concrezioni. Essi rappresentano evidentemente l'ultimo stadio evolutivo della cellula pericardiale.

Particolarmente dimostrativa a questo riguardo riesce l'osservazione dei nefrociti sparsi. Sono elementi cellulari identici ai pericardiali ma dislocati in altri punti del corpo. Due o tre ne compaiono costantemente nel torace tra le pareti dell'esofago e quelle dei dotti salivari. Nelle giovani regine questi nefrociti sono elementi cellulari ben definiti, mono- o binucleati, a struttura reticolare del protoplasma, fittamente granulati, alquanto più delle cellule pericardiche dello stesso individuo, di concrezionule gialle cristalline. Nelle vecchie regine si ritrovano, addossati alla parete dell'esofago, due o tre sacchetti a parete sottile, senza briglie protoplasmatiche, senza traccia di nuclei, pieni di grosse sferiche concrezioni di color giallo marrone.

Sicchè le cellule pericardiali sembrano funzionare da tipico rene d'accumulo.

Ma non così generalmente negli insetti (Cuénot e Marchal le vedono sempre col medesimo aspetto e contenuto, tanto nei giovanissimi individui quanto negli adulti; Hollande arriva a negar loro una funzione escrettrice) ⁽¹⁾, e l'acquisizione di tale carattere nei neotenici dei termiti appare un fenomeno particolare in relazione colle particolari condizioni fisiologiche di questi individui riproduttori: lunga durata della vita sessuale e regime speciale d'alimentazione.

Nei vecchi individui reali il materiale escretizio compare anche: 1°) nei tubi malpighiani, ove è concreto in forma granulare, solida, cristallina, in seno alle cellule ghiandolari donde passa, forse per processo d'escrezione merocrina, nel lume; 2°) nel tessuto adiposo, cui pure proviene certamente dall'emolinf; 3°) nell'ovidotto (con caratteri morfologici e forse costituzione chimica al-

(1) Secondo Hollande (1916), « les cellules péricardiques jouent un rôle important dans les processus vitaux des insectes; elles absorbent les matières albuminoïdes d'origine alimentaire et finissent de les transformer en substances assimilables...; ne sont pas des cellules excrétrices (reins acides des auteurs), car elles n'éliminent pas de l'organisme les produits de déchets de la vie cellulaire pour les accumuler dans leur protoplasme ».

quanto diversi) le cui pareti sembrano escretarlo; ma specialmente accumulato si vede nei calici degli ovariooli.

Dal complesso delle mie ricerche crederei potere provvisoriamente ricostruire nel seguente modo l'andamento dei fenomeni da me osservati finora: la pigmentazione, che insorge gradualmente nei reali di complemento e sostituzione, non è un carattere specifico: è l'espressione morfologica d'uno stato fisiologico particolare, legato evidentemente a una speciale dieta alimentare. Detta pigmentazione rappresenta il deposito, nei tegumenti, di materiali escretizi che vanno accumulandosi collo sviluppo e intensificazione dell'attività riproduttrice nell'individuo neotenico. Questa sostanza escretizia (che non ho potuto determinare chimicamente e che chiamo ptialurica, per indicare trattarsi d'un prodotto urinario caratteristico degli individui tenuti a regime di saliva) si origina, sembra, negli attivi processi di ricambio delle ghiandole sessuali come residuo inutilizzabile dei materiali assunti per l'elaborazione deutoplasmica. Dall'ovidotto, ove confluisce nei calici dei rispettivi ovariooli, questo prodotto finale del ricambio passa nel circolo, viene assorbito ed elaborato dalle cellule pericardiali e, riversato nuovamente nell'emolinfa, è scaricato dalle ghiandole ipodermiche nei tegumenti e filtrato dai tubi malpighiani per l'escrezione all'esterno. Ma il plasma stesso a poco a poco si satura del materiale escretizio, e questo allora va rimanendo accumulato negli organi stessi d'origine (calici) e d'elaborazione (cellule pericardiche), come pure penetrando e concretandosi nel corpo adiposo.

Questo prodotto escretivo, questo processo d'escrezione, sono comuni a tutti i reali neotenici, ai complementari da ninfa di seconda forma come ai sostitutivi senza traccia di ali o da alato bianco. E sono caratteristici di essi, come ho dimostrato con lo studio del *Calotermes* non potendo esaminare pel confronto reali veri di *Termes* giacchè non se ne rinvenivano in natura, qui in Italia almeno ⁽¹⁾.

I reali neotenici del *Calotermes* presentano processi d'escrezione similimi se non identici a quelli del *Termes*. Ma, nei reali veri, non più depositi pigmentari ipodermici, non più grosse concrezioni ptialuriche nel tessuto pericardiale ipertrofico, non più sostanza gialla granulare nei malpighiani e nei calici.

(1) Analizzando la questione dei reali veri del *Termes*, credo di ravvisare nella loro rarità un singolare adattamento biologico della specie alla propagazione diffusiva con formazione di reali complementari. Questo adattamento, comune a tutto il genere *Leucotermes*, sarebbe particolarmente spinto nel nostro termite lucifugo. In America però, secondo Snyder, si rinvenivano frequenti i reali veri del *lucifugus*, e frequentissimi li ha rinvenuti ultimamente Feytaud in Francia; ma il fatto che in Italia non se ne è mai trovati, aggiunto ad altre circostanze differenziali (come epoca dello sciamamento, aggressione o meno delle piante vive erbacee ecc.), spinge a supporre che, sotto il nome di termite lucifugo, sieno comprese due specie, o razze biologiche almeno, distinte.

Invece, tutto il tessuto adiposo è fittamente farcito di grossi urosferiti (danno la reazione della muresside, e cogli acidi acetico e cloridrico, cristalli d'acido urico; hanno le proprietà ottiche dei calcosferiti d'Henneguy), identici alle concrezioni d'urato di Na descritte da Cuénot nel corpo adiposo di Blattidi e come quelle, pare, accumulanti collo sviluppo dell'attività sessuale (in minor quantità compaiono nell'alato sciamante, più abbondanti però nel *Termes* che non nel *Calo'ermes*). Li ritengo, senza poterne per ora dare sicura dimostrazione, derivati dalla digestione intracellulare degli albuminoidi assimilati dall'intestino e immagazzinati dalle cellule adipose per esserne poi digeriti e finalmente utilizzati nella elaborazione deutoplasmica dagli elementi sessuali.

Il metabolismo è dunque profondamente diverso da quello dei reali neotenici, evidentemente in rapporto alla differenza dei processi anabolici, alla dieta alimentare caratteristica che conduce alla differenziazione degli individui neotenici dai riproduttori normali (1).

Biologia. — *Differenze sessuali nei pesi del corpo e degli organi umani*. Nota II del dott. MARCELLO BOLDRINI, presentata dal Corrisp. D. LO MONACO (2).

6. Nella tabella seguente, sono dati i rapporti tra le mediane (R_m), le probabilità di transvariazione (P_{kh}), i rapporti fra le medie aritmetiche (R_a), e le intensità di transvariazione (I_{kh}) calcolate per numerose serie di pesi di individui e di organi maschili ($_k$) e femminili ($_h$), le cui fonti sono state indicate in una precedente Nota (3). In essa è anche cenno della tecnica e del significato del calcolo, mentre più ampiamente se ne parla in altro nostro lavoro (4). I rapporti fra le mediane e le medie aritmetiche indicano, a seconda che superino o siano inferiori all'unità, la superiorità media maschile o quella femminile. Per le serie più numerose (serie di oltre 100 termini) ci siamo limitati a calcolare il valore di P_{kh} , essendo allora difficilissimo il calcolo di I_{kh} . Per le altre, invece, ci serviamo, di solito, di questo secondo. Ma, nella precedente Nota, abbiamo avvertito che, nelle serie numerose, si può, senza apprezzabile differenza, servirsi di P_{kh} o di I_{kh} per lo studio della sessualità.

(1) In vecchi reali veri, secondo le ultime osservazioni che spero presto completare, più non trovo urosferiti nel tessuto adiposo, sibbene depositi ptialurici nei tegumenti, nelle cellule pericardiali e nei calici dell'ovidotto. Evidentemente, dopo il periodo stentato della fondazione di nuova colonia, i reali vengono nutriti dalla loro prole; ed il loro metabolismo diviene, come il nutrimento, quello stesso dei reali neotenici.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1920.

(3) Atti Accad. Lincei, classe scienze fis., mat. e nat., vol. XXIX, 1920, pp.

(4) Archivio per l'Antropol. e l'Etnol., vol. XLIX, Firenze, 1919 (stamp. nel 1920).

Numero d'ordine	AUTORE e numero delle osservazioni	ETÀ	PRSO	R _m	P _{kh}	R _a	I _{kh}	emipio, omeo, p. g.	AUTORE e numero delle osservazioni	ETÀ	PRSO	R _m	P _{kh}	R _a	I _{kh}
1	Frascani 41 ♂ e 42 ♀	Neonati di Pisa 0 complessivo		1,042	0,888	1,025	0,874	12	Bischoff 47 ♂ e 42 ♀	Segue Cadaveri tedeschi adulti complessivo		1,139	0,641	1,152	0,524
2	Demoor 97 ♂ e 97 ♀	Scolari di Bruzelles 6 anni complessivo		1,117	0,957	—	—	13	Bischoff 22 ♂ e 23 ♀	Tedeschi 0-1 mese enerfalo		0,986	0,937	0,975	0,940
3	" 268 ♂ e 134 ♂	"	"	1,000	1,000	—	—	14	" 20 ♂ e 30 ♀	" 1 mese-5 an		0,848	0,794	0,901	0,719
4	" 245 ♂ e 168 ♀	"	"	1,000	1,000	—	—	15	" 19 ♂ e 22 ♀	" 5-15 anni		1,103	0,282	1,362	0,268
5	" 248 ♂ e 200 ♀	"	"	1,000	1,000	—	—	16	" 559 ♂ e 347 ♀	adulti		1,082	0,324	—	—
6	" 198 ♂ e 145 ♀	"	"	1,000	1,000	—	—	17	" 67 ♂ e 42 ♀	"		1,109	0,265	1,116	0,116
7	" 172 ♂ e 131 ♀	"	"	0,926	0,659	—	—	18	Bean 28 ♂ e 26 ♀	Americani bianchi 0-1 mese cuore		1,000	1,000	1,127	0,806
8	" 167 ♂ e 126 ♀	"	"	0,966	0,921	—	—	19	" 27 ♂ e 22 ♀	" 1-6 mesi		1,095	0,858	1,222	0,584
9	" 160 ♂ e 114 ♀	"	"	0,937	0,764	—	—	20	" 22 ♂ e 20 ♀	" 6-12 "		1,311	0,789	1,218	0,540
10	Benedict 87 ♂ e 68 ♀	Americani normali adulti complessivo		1,161	0,439	1,176	0,396	21	" 54 ♂ e 43 ♀	" 1-5 anni		1,230	0,772	1,121	0,759
11	Bischoff 535 ♂ e 340 ♀	Cadaveri tedeschi adulti complessivo		1,141	0,632	—	—	22	" 34 ♂ e 17 ♀	" 5-15 "		1,000	1,000	0,937	0,827
								23	" 15 ♂ e 14 ♀	" 15-22 "		1,270	0,633	1,230	0,543

Numero d'ordine	AUTORE e numero delle osservazioni	Età	Peso	R _m	P _{kh}	R _a	I _{kh}	Numero d'ordine	AUTORE e numero delle osservazioni	Età	Peso	R _m	P _{kh}	R _a	I _{kh}
<i>Americani negri</i>															
24	Bean 65 ♂ e 52 ♀	0-1 mese	cuore	1.187	0.896	1.088	0.851	36	Bean 65 ♂ e 52 ♀	0-1 mese	milza	1.100	0.895	1.067	0.927
25	" 38 ♂ e 33 ♀	1-6 mesi	"	0.962	0.985	1.021	0.961	37	" 38 ♂ e 33 ♀	1-6 mesi	"	1.111	0.906	0.823	0.656
26	" 23 ♂ e 15 ♀	6-12 "	"	1.000	1.000	0.943	0.858	38	" 23 ♂ e 15 ♀	6-12 "	"	0.800	0.869	0.848	0.839
27	" 34 ♂ e 44 ♀	1-5 anni	"	1.050	0.848	1.163	0.631	39	" 34 ♂ e 44 ♀	1-5 anni	"	1.018	0.935	1.033	0.938
28	" 25 ♂ e 34 ♀	5-15 "	"	1.000	1.000	0.929	0.828	40	" 25 ♂ e 34 ♀	5-15 "	"	0.833	0.863	0.920	0.869
29	" 35 ♂ e 39 ♀	15-22 "	"	1.364	0.400	1.282	0.318	41	" 35 ♂ e 39 ♀	15-22 "	"	1.455	0.629	1.383	0.445
<i>Americani bianchi</i>															
30	Bean 28 ♂ e 26 ♀	0-1 mese	milza	1.053	0.883	1.218	0.758	42	Bean 28 ♂ e 26 ♀	0-1 mese	fegato	0.909	0.930	1.055	0.897
31	" 27 ♂ e 22 ♀	1-6 mesi	"	1.200	0.926	0.908	0.842	43	" 27 ♂ e 22 ♀	1-6 mesi	"	0.923	1.000	1.054	0.867
32	" 22 ♂ e 20 ♀	6-12 "	"	1.175	0.643	1.163	0.363	44	" 22 ♂ e 20 ♀	6-12 "	"	1.314	0.727	1.330	0.471
33	" 54 ♂ e 43 ♀	1-5 anni	"	0.872	0.967	0.948	0.907	45	" 54 ♂ e 43 ♀	1-5 anni	"	1.127	0.726	1.154	0.591
34	" 34 ♂ e 17 ♀	5-15 "	"	1.000	1.000	1.066	0.860	46	" 34 ♂ e 17 ♀	5-15 "	"	0.975	0.962	0.950	0.851
35	" 15 ♂ e 14 ♀	15-22 "	"	0.615	0.942	0.971	0.947	47	" 15 ♂ e 14 ♀	15-22 "	"	1.068	0.700	1.176	0.563

Numero d'ordine	AUTORE e numero delle osservazioni	ETÀ	Peso	R _m	P _{ka}	I _{kh}	Numero d'ordine	AUTORE e numero delle osservazioni	ETÀ	Peso	R _m	P _{kh}	R _a	I _{ka}
48	Bean 65 ♂ e 52 ♀	0-1 mese	Americani negri fegato	1.200	0.903	1.116	58	Bean 34 ♂ e 17 ♀	Segue Americani bianchi 5-15 anni	media dei reni	0.895	0.933	0.956	0.889
49	" 38 ♂ e 33 ♀	1-6 mesi	"	0.862	0.847	0.865	59	" 15 ♂ e 14 ♀	15-22 "	"	0.983	0.890	1.055	0.841
50	" 23 ♂ e 15 ♀	6-12 "	"	0.909	0.777	0.894	60	Bean 65 ♂ e 52 ♀	Americani negri 0-1 mese	media dei reni	1.200	0.909	1.079	0.865
51	" 34 ♂ e 44 ♀	1-5 anni	"	1.053	0.842	1.098	61	" 38 ♂ e 33 ♀	1-6 mesi	"	0.891	0.887	0.941	0.884
52	" 25 ♂ e 31 ♀	5-15 "	"	0.703	0.581	0.778	62	" 23 ♂ e 15 ♀	6-12 "	"	0.833	0.942	0.975	0.906
53	" 35 ♂ e 39 ♀	15-22 "	"	1.146	0.722	1.127	63	" 34 ♂ e 44 ♂	1-5 anni	"	1.013	0.958	1.049	0.985
54	Bean 28 ♂ e 26 ♂	0-1 mese	Americani bianchi media dei reni	1.364	0.628	1.443	64	" 25 ♂ e 34 ♀	5-15 "	"	0.833	0.715	0.843	0.592
55	" 27 ♂ e 22 ♀	1-6 mesi	"	1.176	0.717	1.106	65	" 35 ♂ e 39 ♀	15-22 "	"	1.259	0.508	1.208	0.432
56	" 22 ♂ e 20 ♂	6-12 "	"	1.091	0.968	0.976	66	Bischoff 22 ♂ e 12 ♀	Cinesi e Tedeschi adulti	encefalo	1.205	0.269	1.119	0.241
57	" 54 ♂ e 43 ♀	1-5 anni	"	1.211	0.513	1.299	67	" 22 ♂ e 12 ♀	"	cervelletto	1.106	0.477	1.090	0.408

Numero d'ordine	AUTORE e numero delle osservazioni	ETÀ	PESO	R _m	P _{ka}	R _a	I _{ka}	Numero d'ordine	AUTORE e numero delle osservazioni	ETÀ	PESO	R _m	P _{kh}	R _a	I _{kh}
<i>Francesi</i>															
68	Sappey 14 ♂ e 12 ♀	adulti	volume occhio	1.134	0.542	1.081	0.416	78	Cutore 11 ♂ e 14 ♀	0 anni in su	encefalo	1.050	0.851	1.110	0.698
<i>Romani</i>															
69	Boldrini 53 ♂ e 22 ♀	adulti	encefalo	1.104	0.590	1.075	0.594	79	" 11 ♂ e 14 ♀	"	corpo pineale	1.550	0.818	1.257	0.746
70	" 53 ♂ e 25 ♀	"	polmone sinistro	1.238	0.477	1.357	0.417	80	" 11 ♂ e 14 ♀	"	ipofisi	1.026	0.928	1.004	0.994
71	" 53 ♂ e 25 ♀	"	polmone destro	1.238	0.593	1.337	0.341	81	Manouvrier 110 ♂ e 62 ♀	adulti	capacità cranica	1.120	0.334	1.121	—
72	" 53 ♂ e 25 ♀	"	cuore	1.217	0.668	1.074	0.829	82	Manouvrier 110 ♂ e 55 ♀	adulti	capacità cranica	1.134	0.225	1.135	—
73	" 53 ♂ e 24 ♀	"	milza	1.006	0.839	1.265	0.612	83	Hammar 20 ♂ e 16 ♀	0-10 anni	timo	1.013	1.000	1.042	0.956
74	" 53 ♂ e 24 ♀	"	fegato	1.039	0.895	1.047	0.858	84	" 51 ♂ e 14 ♀	10-61	"	1.331	0.644	1.345	0.555
<i>Tedeschi</i>															
75	" 21 ♂ e 8 ♀	"	pancreas	1.069	0.845	1.174	0.693	85	Schoenemann 44 ♂ e 25 ♀	adulti	tiroide normale	0.789	0.809	0.854	0.741
76	" 53 ♂ e 25 ♀	"	rene sinistro	1.200	0.801	1.077	0.774	86	" 19 ♂ e 13 ♀	"	tiroide anormale	1.168	0.777	1.199	0.512
77	" 53 ♂ e 25 ♀	"	rene destro	1.133	0.723	1.114	0.708	87	" 55 ♂ e 37 ♀	"	ipofisi	0.867	0.861	0.917	0.802

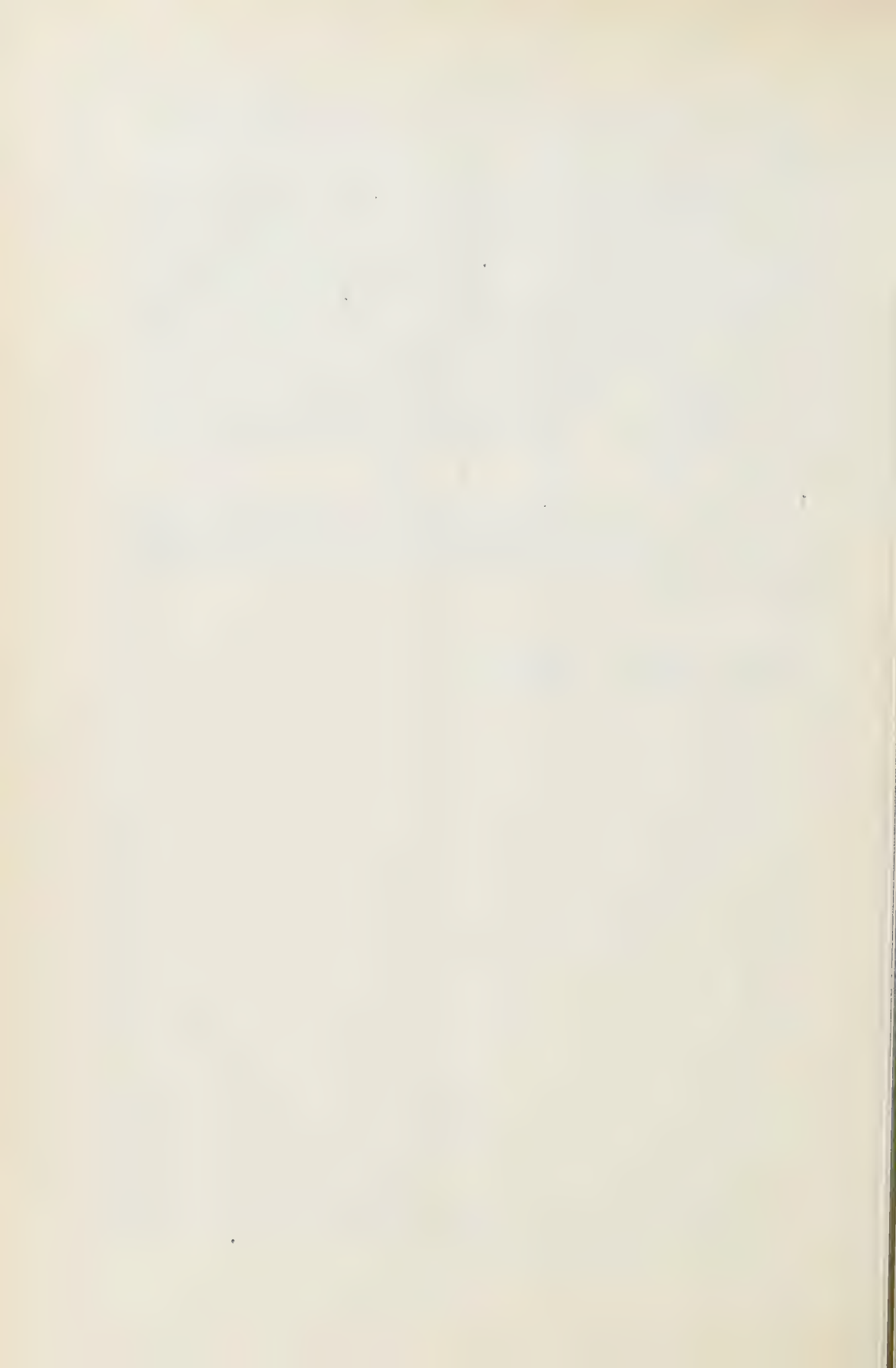
7. Esaminiamo, il più brevemente possibile, le cifre, considerando successivamente *i pesi complessivi, gli organi della testa e del collo, gli organi toracici e gli organi addominali.*

a) *Pesi complessivi.* Si è detto che il peso è carattere poco importante ⁽¹⁾ perchè non ha lo stesso significato nei due sessi data la differente proporzione dei varî tessuti nei maschi e nelle femmine. Ma non si può accogliere l'obiezione, a meno di non negare valore a ogni specie di confronto. Alla nascita, come lo prova l'elevato valore delle costanti di transvariazione, il peso ha scarso significato sessuale, che scema negli anni successivi. A 11 anni, il peso medio delle femmine supera quello dei maschi, con una tipicità notevole, che scema a 12 e aumenta di nuovo in seguito. Non abbiamo modo di seguire ulteriormente il processo; ma, esso deve certamente fare la strada in senso inverso, data la forte tipicità del peso medio maschile alle età adulte (num. 10).

* Ciò concorda perfettamente con quanto già osservammo per la statura ⁽²⁾. Il peso complessivo ha elevato significato sessuale per gli adulti; minore alla nascita e durante lo sviluppo, quando ora i maschi, ora le femmine hanno il sopravvento.

(¹) H. Hellis, *L'uomo e la donna*, ediz. ital., Palermo, s. a., pp. 41-42.

(²) Arch. per l'antrop. e l'etnogr., cit.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1920.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo).

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi. XIII: Contrattura da freddo nei muscoli striati* ⁽¹⁾. Nota del Socio F. BOTTAZZI ⁽²⁾.

Ho sperimentato su strisce di diaframma di cane, sospese fra due uncini d'oro e immerse in liquido di Ringer o in paraffina liquida (circa 50 cm³), per i quali gorgogliava ossigeno, e che erano lentamente e progressivamente riscaldati o raffreddati, a partire dalla temperatura dell'ambiente, seguendo lo stesso metodo da me già descritto in una precedente pubblicazione ⁽³⁾.

Lasciando da parte per ora gli effetti del lento riscaldamento, che formeranno oggetto di una Nota successiva, riferirò soltanto quelli del lento e progressivo raffreddamento.

Quando la temperatura del liquido in cui è immerso il preparato, indicata da un termometro disposto in maniera che il bulbo si trovasse a livello della parte media dalla striscia diaframmatica, raggiunge circa 0° C, il preparato compie un lento accorciamento, che ho chiamato « contrattura da freddo »

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia sperimentale della R. Università di Napoli.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1920.

⁽³⁾ F. Bottazzi, *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi. XII: Azione delle alte e basse temperature sui muscoli lisci*. Archivio di Scienze Biologiche, I, pag. 37, 1919. (Ved. la descrizione e la figura dell'apparecchio a pp. 42-45).

(*contractura a frigore*). Spesso, l'accorciamento più cospicuo è preceduto da un lieve aumento del tono che può iniziarsi anche a 10°C e che può aumentare un poco intorno ai 5°C .

Se, raggiunta la temperatura di -2° o -4°C , si sospende il raffreddamento e si torna un poco a riscaldare il liquido, riportandolo a circa 0°C , la contrattura subito si risolve, e il preparato presto ritorna presso a poco alla sua lunghezza primitiva. Ma se la temperatura bassa di circa -2° o -4°C è mantenuta approssimativamente costante, la contrattura permane, pur presentando lievi oscillazioni.

Il fenomeno è, dunque, completamente reversibile, e la durata della contrattura dipende dalla durata del raffreddamento, raggiunto che sia quel grado di temperatura al quale corrisponde il massimo dell'accorciamento.

Il massimo dell'accorciamento è sempre considerevole, come risulta dalle figure qui riprodotte, ma esso non eguaglia mai, nei preparati diaframmatici normali, quello che la stessa striscia di diaframma è capace di raggiungere nella « contrattura da caldo » (a circa 45° - 46°C).

Entro i limiti di temperatura, nei quali si presenta la contrattura da freddo, il preparato si dimostra ineccezionale dagli ordinari stimoli di corrente indotta; ma dopo la contrattura, esso si presenta eccitabile (intorno ai 15° - 18°C) come prima che fosse raffreddato.

Il liquido di Ringer, per il quale gorgoglia l'ossigeno, in generale non gela a qualche grado sotto lo zero, per il fenomeno del sottoraffreddamento. Ciò non ostante, ho fatto esperimenti anche con liquido di Ringer di concentrazione doppia, e nel maggior numero dei casi, per evitare sicuramente il congelamento del liquido nel quale il preparato era immerso, mi sono servito della paraffina liquida (comunemente detta olio di vaselina).

Le curve di contrattura da freddo dei preparati immersi in liquido di Ringer di concentrazione doppia (ved. fig. 2) o in paraffina sono state sempre identiche a quelle ottenute dai preparati immersi in liquido di Ringer ordinario.

Il preparato muscolare non gela prima che la temperatura del liquido in cui è immerso abbia raggiunto i -7° o -8°C . Per accertarmene, ho interrotto rapidamente l'esperimento a varie temperature sotto lo zero, e ho palpato la striscia diaframmatica dopo averla messa fuori dall'apparecchio. Solo a -7° o -8°C la si trova irrigidita, indurita; ma basta tenerla per qualche istante fra le dita, perchè ritorni floscia e pieghevole. Il congelamento del preparato si annunzia sul tracciato (ved. fig. 5) con un'improvvisa elevazione della curva, prima debole, ma che poi aumenta se il raffreddamento continua. Ammesso che la temperatura della striscia diaframmatica sia press'a poco eguale (e tale deve essere, se il raffreddamento è abbastanza

lento) a quella della paraffina liquida in cui è immerso, si può affermare che il succo interstiziale dei muscoli striati gela a circa — 8° C.

I preparati diaframmatici di canini neonati presentano (ved. fig. 3) una cospicua contrattura da freddo (e anche una fortissima contrattura da caldo, ved. la stessa figura).

La contrattura da freddo sembra essere un fenomeno molto labile. Due o tre ore dopo la morte dell'animale, durante la stagione calda (giugno, luglio), ventiquattr'ore dopo, durante l'inverno, non si riesce più a provocarla, per quanto si raffreddi il preparato diaframmatico (ved. fig. 4). Eppure il muscolo è sempre eccitabilissimo. (La contrattura da caldo, invece, è dimostrabile ancora 5-7 ore dopo la morte dell'animale, durante la stagione calda; poi anch'essa scompare, e il muscolo presenta soltanto l'« accorciamento termico terminale », che dipende dalle strutture commettivali, collagene del muscolo; ved. fig. 5, B).

La contrattura da freddo (e lo stesso posso dire della contrattura da caldo) è affatto indipendente dalla normale innervazione del diaframma. Ho operato quattro cani di taglio del n. frenico destro al collo. Cinque giorni, dodici giorni, trenta giorni e quarantatré giorni dopo l'operazione, i quattro cani, che erano perfettamente guariti *per primam*, sono stati sacrificati, e ho fatto esperimenti comparativi su striscie del diaframma destro (enervato) e del diaframma sinistro (normale). In tutti i casi, la recisione delle radici del frenico era stata completa, e rigenerazione di esse non era avvenuta, perchè la stimolazione del frenico destro nel torace fu sempre del tutto inefficace sul diaframma. Cinque giorni e dodici giorni dopo il taglio del nervo, il diaframma destro non presentava ancora segni visibili, a occhio nudo, di degenerazione. Negli ultimi due cani, invece, la degenerazione era visibilissima, per il color rosso-giallastro sporco che presentava il diaframma destro fino a una netta linea di demarcazione, in avanti e in dietro, dal diaframma sinistro.

In tutti e quattro i cani, il preparato di diaframma enervato presentò la contrattura da freddo (e la contrattura da caldo). Ma una differenza, che se fosse costante avrebbe grande significato, ho notato fra la contrattura da freddo del diaframma del quarto cane, che presentava segni più gravi di degenerazione, e quella degli altri preparati enervati, oltre che di quelli normali. Come si vede nella fig. 6, quella contrattura fu straordinariamente durevole. Cessato il raffreddamento, che era stato spinto fino a — 4° C, e riscaldato lentamente il muscolo, questo, cosa insolita, non cominciò subito ad allungarsi, ma solo dopo che la temperatura ebbe raggiunto circa 12° C. In altre parole, il muscolo degenerato si distingue dal normale per una spiccata capacità di rimanere più lungamente contratturato sotto l'azione del freddo, e anche per un tempo considerevole (nel caso della fig. 6, nove mi-

nuti) dopo che la sua temperatura ha raggiunto quel grado, al quale i muscoli normali si distendono spontaneamente dopo aver presentato la contrattura. Nei muscoli degenerati in seguito ad enervazione, si direbbe che la funzione tonica o posturale è più accentuata.

I muscoli (gastrocnemio, sartorio ed altri) degli animali pecilotermi (rana, rospo) non presentano traccia alcuna di contrattura da freddo (mentre presentano una tipica contrattura da caldo). Raffreddati fino a -8°C (in paraffina liquida), gelano accorciandosi debolissimamente (di una frazione di millimetro), senza aver presentato la contrattura. Giova rammentare, a questo proposito, che Kühne non riesci a provocare nei plasmi contrattili indifferenziati (amebe, pseudopodii di *Actinophrys Eichhornii*, *Aethalium septicum*), raffreddandoli fino a 0°C . un « Kältetetanus » analogo al « Wärmetetanus » che in essi poteva provocare riscaldandoli fino a $35-45^{\circ}\text{C}$ ⁽¹⁾.

I tendini, fortemente raffreddati, gelano anch'essi, come i muscoli, a circa -8°C , ma senza presentare traccia di accorciamento prima di quello, debolissimo, che coincide col congelamento.

Per quanto riguarda la spiegazione chimico-fisica della contrattura da freddo, che sembra essere dovuta al sarcoplasma, non ho nulla, per ora, da aggiungere all'ipotesi da me formulata nel lavoro dianzi citato (pp. 74-76). Vi tornerò su con maggiori ragguagli sperimentali e più sviluppata discussione teorica quando pubblicherò la Memoria completa concernente l'azione della temperatura sui muscoli.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

FIG. 1. — Preparato diaframmatico di cane, in liquido di Ringer ossigenato. Peso: g. 3. Tempo: 1'.

Due successive contratture da freddo, separate da un periodo durante il quale il muscolo fu gradatamente riscaldato fino a 38°C . (21 aprile 1920).

FIG. 2. — Preparato diaframmatico di cane, in liquido di Ringer di doppia concentrazione (eccetto il contenuto in NaHCO_3), ossigenato. Peso: g. 5. Tempo: 1'.

Contrattura da freddo tipica, che s'inizia a 5°C , ma diventa forte e rapida fra 0° e -1°C . Poco dopo che la temperatura è scesa a -2°C , si riscalda lentamente, e a 0°C la contrattura si risolve.

A 48°C , contrattura da caldo dello stesso muscolo (luglio 1920).

FIG. 3. — Preparato diaframmatico di canino neonato, lungo 15 mm, sottilissimo, in liquido di Ringer ossigenato. Peso: g. 1. Tempo: 1'.

Contrattura da freddo a 2°C . Contrattura da caldo a 46°C (7 luglio 1920).

(1) W. Kühne, *Untersuchungen über das Protoplasma und die Contractilität*, pp. 42-43, 46-47, 88, 101-103. Leipzig, 1864.

Fig. 4. — Preparato diaframmatico di cane decapitato poco meno di quattro ore avanti, in liquido di Ringer ossigenato. Peso: g. 3. Tempo: 1'.

La contrattura da freddo è già scomparsa.

La contrattura da caldo, a 45° C, è cospicua.

In (b), continuazione di (a), si vede l'allungamento del preparato fra 55° e 63° C, e l'*accorciamento terminale*, d'origine tendineo-connettivale, a 63° C (14 giugno 1920).

Fig. 5. — (A) Preparato diaframmatico di cane, tolto subito dopo la morte dell'animale, immerso in paraffina liquida. Peso: g. 5. Tempo: 1'.

(B) Preparato diaframmatico tolto circa 7 ore dopo la morte dello stesso cane. Peso: g. 5.

Il tracciato (A) dimostra una normale contrattura da freddo fra 1° e —2° C, e il congelamento del muscolo che avviene fra —7° e —8° C.

Il tracciato (B) dimostra, in *a*) la scomparsa della contrattura da freddo, in *b*) la quasi scomparsa anche della contrattura da caldo e la presenza del solo accorciamento terminale a 63° C (10 giugno 1920. Temperatura dell'ambiente: 26° C).

Fig. 6. — Preparato diaframmatico (diaframma destro) di cane operato di frenotomia destra al collo, 43 giorni avanti (il 18 giugno 1920), in paraffina liquida. (Il diaframma destro era degenerato, di color giallastro sporco. La stimolazione elettrica del tronco del frenico nel torace fu, naturalmente, del tutto inefficace. La stimolazione elettrica diretta del muscolo (3 volta, DR = 160 mm.) provocava contrazioni deboli e lente, come quelle ben note dei muscoli degenerati). Peso: g. 5. Tempo: 1'.

Contrattura da freddo a 2° C, caratterizzata da un lungo altipiano, che non si risolve esercitando una trazione sul muscolo (in *a* e in *b*), nè prima che la temperatura abbia raggiunto in 12° C.

Contrattura da caldo a 45° C, ma non molto alta.

(A 29° C, un tentativo di contrattura precoce, che si risolve spontaneamente a circa 33° C). (30 luglio 1920).

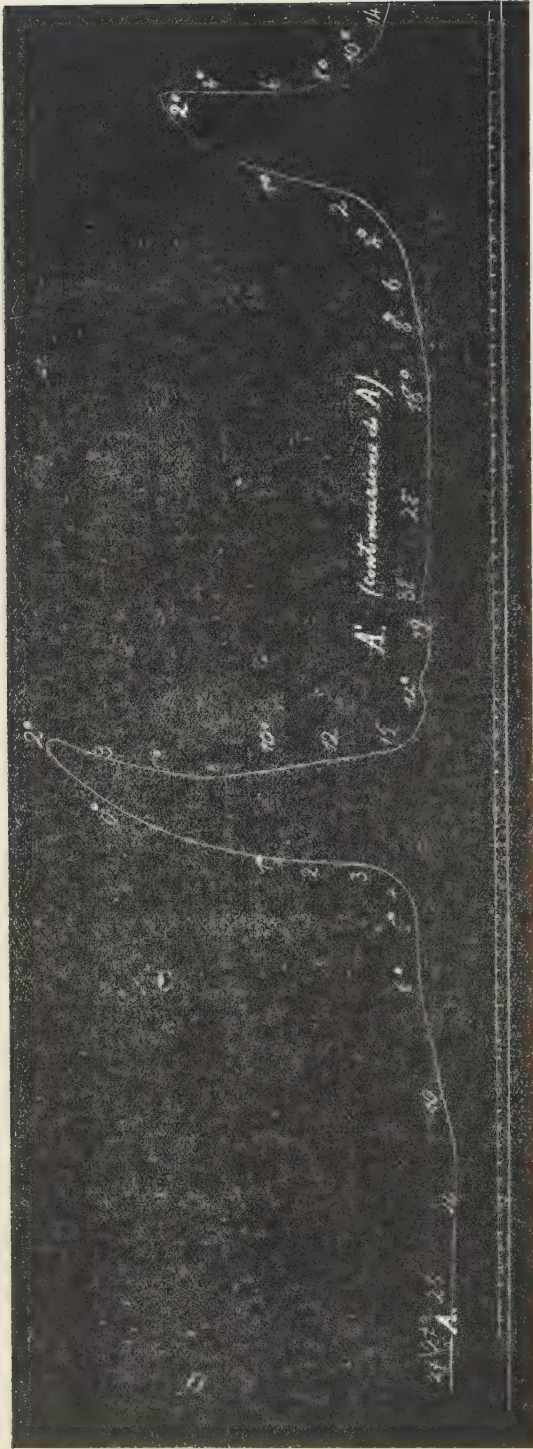
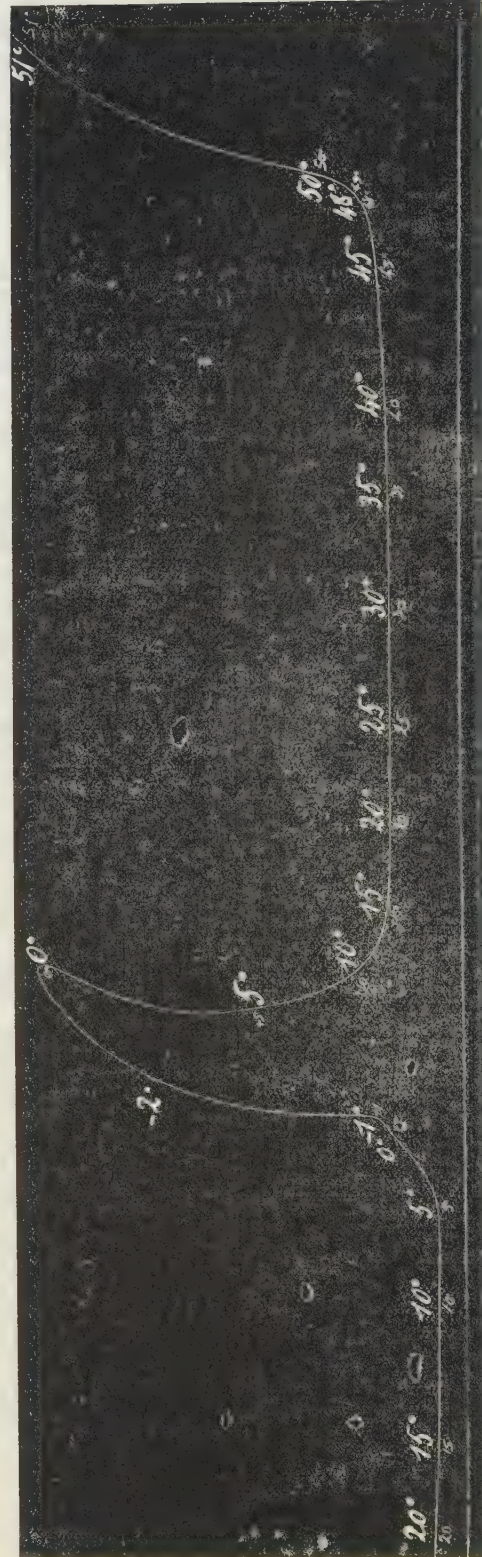


FIG. 1.



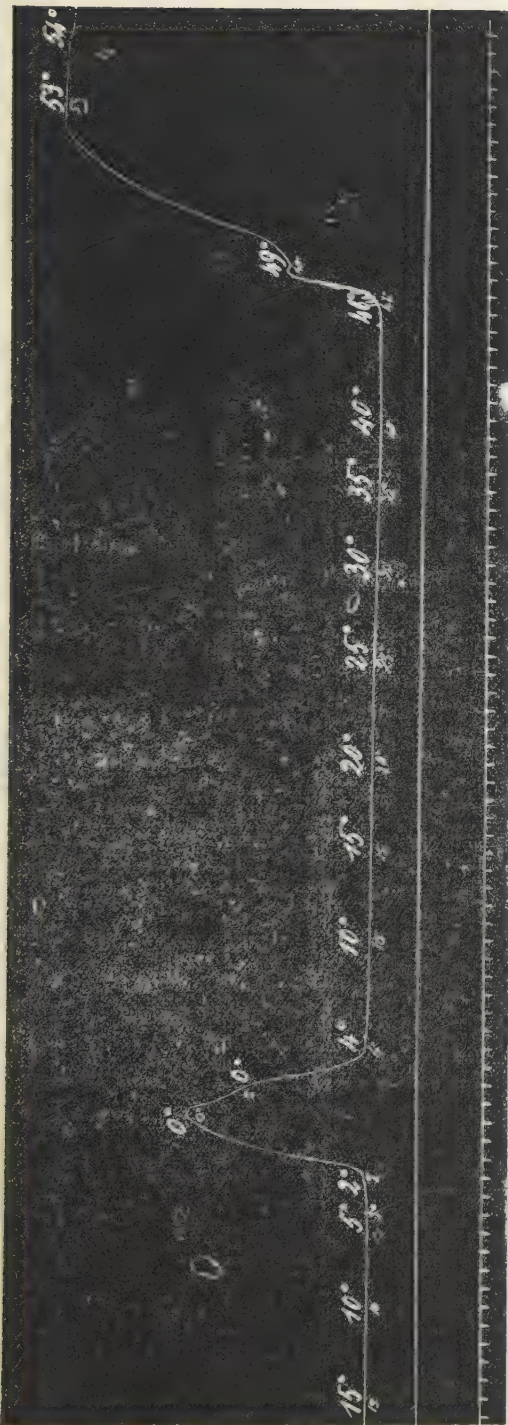


FIG. 3.

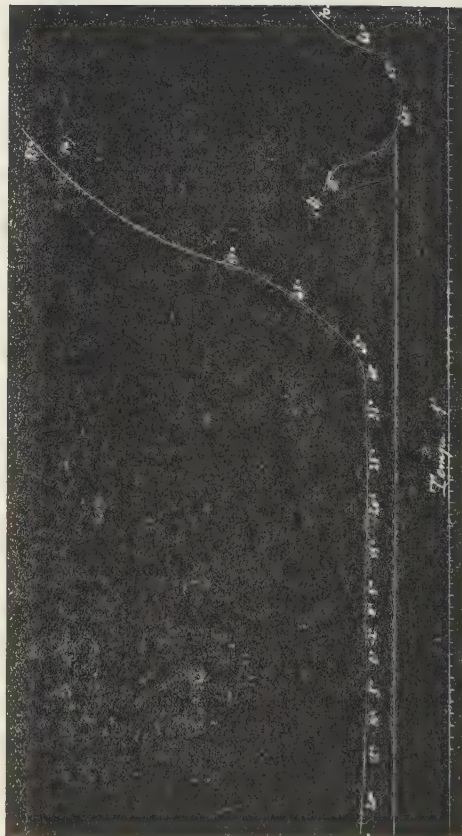


FIG. 4.

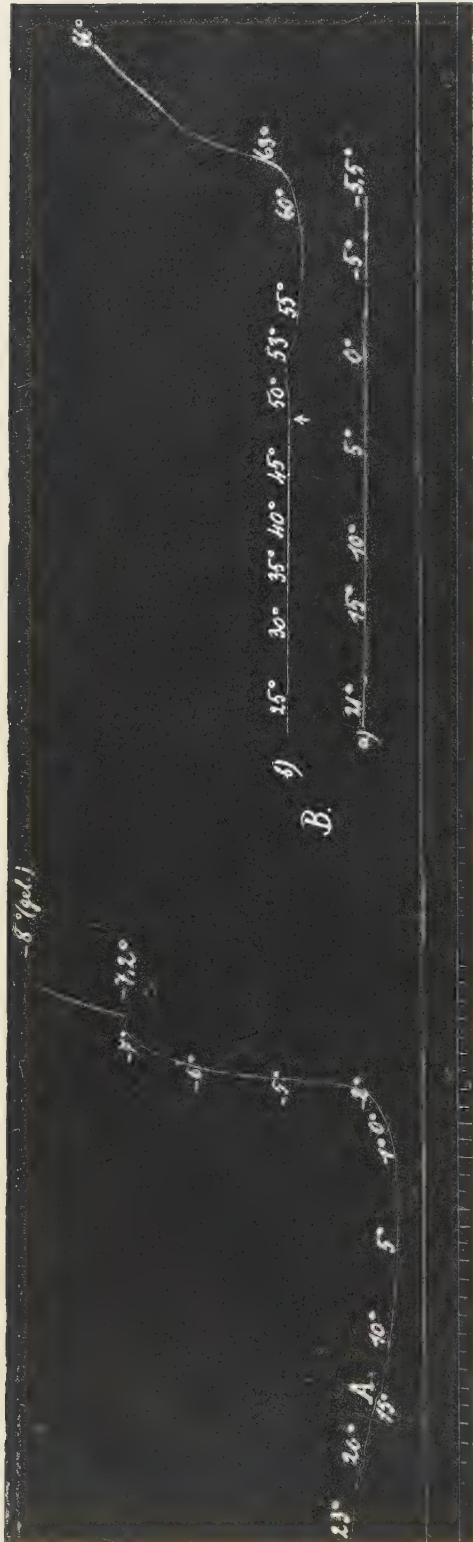


FIG. 5.

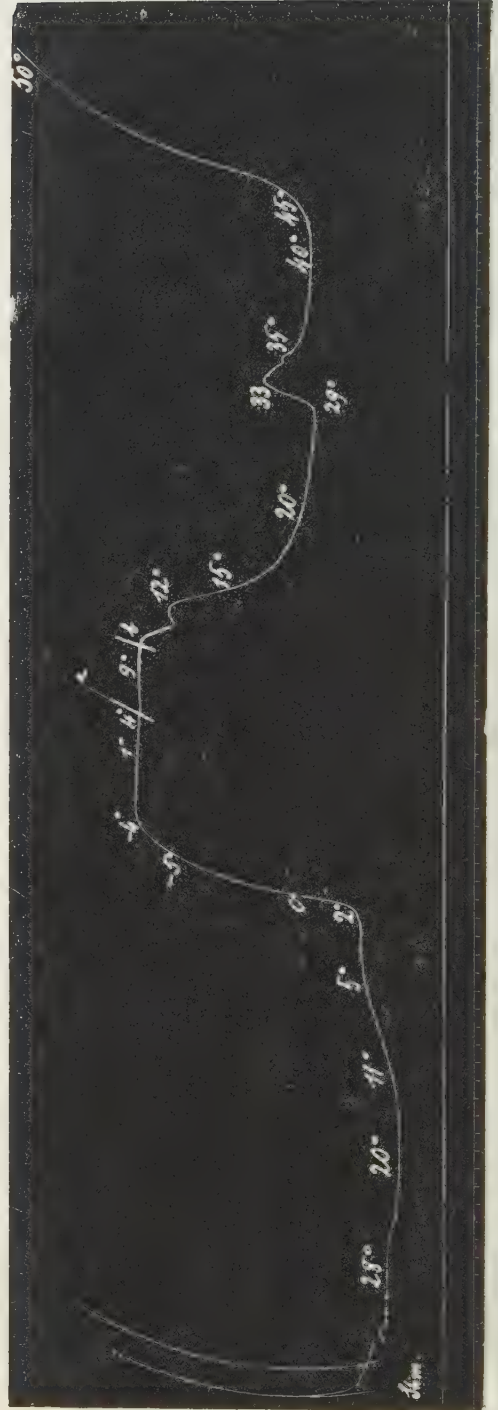


FIG. 6.

Matematica. — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota III del Corrispondente GINO FANO (¹).

1. La presente Nota è dedicata alla superficie del 4° ordine più generale, F^4 , contenente un punto doppio O e una retta r passante per questo punto (superficie dipendente da 17 moduli). Anche questa superficie, come quella oggetto delle due Note precedenti (²), non ammette trasformazioni proiettive. Invero, una trasformazione così fatta non potrebbe lasciare fissi tutti i punti della retta r , perchè sarebbero allora invarianti anche le singole cubiche γ segate sopra F^4 dai piani per r ; mentre invece una cubica piana non ammette trasformazioni proiettive aventi come punti uniti tutti i punti di una retta *generica* del suo piano (quale è appunto la r per le γ). Sulla r (certo unita) verrebbe dunque subordinata una proiettività ciclica, per la quale sarebbe O un punto unito; e poichè nel fascio $|\gamma|$ vi sono *due* cubiche tangenti a r fuori di O , queste due dovrebbero venire scambiate fra loro, e così i loro punti di contatto con r . Il quadrato di questa (supposta) omografia determinerebbe dunque l'identità sopra r , e perciò anche sopra F^4 ; l'omografia stessa sarebbe dunque involutoria, il che non è possibile, in quanto F^4 dovrebbe allora dipendere da soli 11 moduli al più (³).

Il gruppo delle trasformazioni birazionali di F^4 si rispecchierà pertanto in un gruppo oloedricamente isomorfo di sostituzioni lineari della forma fondamentale della superficie.

La superficie F^4 , essendo condotta nel modo più generale per il punto O , che si suppone doppio per essa, e per la retta r , conterrà soltanto curve composte mediante le sezioni piane, il punto doppio (considerato come curva d razionale, di ordine zero, e grado -2), e la retta r . Introducendo nella base, in luogo delle sezioni piane C , le cubiche $\gamma \equiv C - d - r$, segate dai piani per r , il determinante della base (d, r, γ) sarà

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 14.$$

(¹) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1920.

(²) Ved. questi Rendiconti, 1° sem. 1920 (vol. 29), pp. 408 e 485. A queste Note rinvio per la citazione precisa delle Memorie qui richiamate in modo abbreviato.

(³) Severi, *Complementi* ecc., n. 12, b).

La detta base è dunque intermediaia, e perciò minima, non avendo il numero 14 nessun divisore > 1 e quadrato perfetto. Ogni curva di F^4 potrà esprimersi mediante una combinazione $xd + yr + z\gamma$, per valori interi (positivi, negativi, o nulli) di x, y, z . Notiamo in particolare che le curve $\gamma + r \equiv C - d$ sono le quartiche di genere 2 segate dai piani passanti per il punto doppio.

La forma fondamentale della superficie è

$$(1) \quad f \equiv -2x^2 - 2y^2 + 2xy + 2xz + 4yz.$$

2. Sulla superficie F^4 si possono facilmente assegnare due trasformazioni birazionali:

a) L'involuzione I risultante dalla proiezione doppia di F^4 dal punto doppio O. Questa trasformazione muta in sè stessa ogni cubica γ , nonchè la retta r ; e fa corrispondere all'intorno (d) del punto doppio O la curva intersezione di F^4 col cono quadrico ad essa tangente in O medesimo, all'infuori della r (che di tale intersezione è parte). Poichè quest'intersezione, compresa anche la r , è espressa da $2(C - d) - d \equiv 2(r + \gamma) - d$, l'involuzione I opererà sulle curve di F^4 e, conseguentemente, sulle x, y, z nel modo seguente:

$$(2) \quad \begin{cases} d' = -d + r + 2\gamma \\ r' = r \\ \gamma' = \gamma \end{cases} \quad (2') \quad (1) \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = x + y \\ z' = 2x + z \end{cases}$$

b) Una trasformazione non ciclica S sopra le singole cubiche γ , costruita in modo analogo alle F_1 e F_2 delle due Note precedenti. Essendo razionalmente noti, sopra ogni γ , il punto O (doppio per F^4) e la coppia di punti A, B intersezioni ulteriori con r , sarà ivi definita la trasformazione:

$$P' \equiv P + 2 \cdot O - (A + B).$$

Applicando tale trasformazione, sopra ogni γ , al punto ivi segato dall'interno d del punto doppio, e ai 2 punti segati da r , si vede che le curve d'' e r'' , trasformate rispett. di d e di r , potranno differire rispett. da $d + 2d - r \equiv 3d - r$ e da $r + 4d - 2r \equiv 4d - r$ solo per multipli di γ ; sarà cioè:

$$d'' = 3d - r + k\gamma \quad r'' = 4d - r + i\gamma$$

dove i coefficienti incogniti k, i potranno determinarsi in base alla proprietà che tanto d'' quanto r'' devono essere (come d ed r) di grado virtuale -2 . Si ricava $k = 12, i = 10$. La S opererà pertanto sulle curve di F^4 e

(1) Interpretando le x, y, z come coordinate proiettive omogenee nel piano, la (2') è l'omologia armonica di asse $x = 0$ e centro $(-2, 1, 2)$.

rispett. sulle x, y, z nel modo seguente:

$$(3) \begin{cases} d'' = 3d - r + 12\gamma \\ r'' = 4d - r + 10\gamma \\ \gamma'' = \gamma \end{cases} \quad (3') \begin{cases} x'' = 3x + 4y \\ y'' = -x - y \\ z' = 12x + 10y + z \end{cases}$$

Dimostreremo che sopra F^4 non esistono altre trasformazioni birazionali all'infuori di quelle composte mediante **I** ed **S** ⁽¹⁾ ⁽²⁾.

3. Vediamo ora se sulla superficie F^4 esistano altre curve ellittiche, effettive e irriducibili, all'infuori delle cubiche γ . A tal uopo, occorre anzitutto trovare le soluzioni intere dell'equazione $f=0$, ossia:

$$x^2 + y^2 - xy - xz - 2yz = 0.$$

⁽¹⁾ La trasformazione determinata da **S** sopra ogni singola γ è il prodotto della **I** per l'altra involuzione che ivi risulta dalla proiezione doppia fatta dal punto tangenziale di **O** (anch'esso razionalmente noto). Perciò, anche sopra F^4 , la **S** è il prodotto di **I** per un'altra involuzione; e il gruppo complessivo di F^4 si potrà generare anche con queste due involuzioni.

⁽²⁾ Si può riconoscere facilmente che invece *Sulla F^4 più generale contenente un (solo) punto doppio* (non contenente perciò nessuna curva effettiva, all'infuori delle intersezioni complete con altre superficie) *non vi sono altre trasformazioni birazionali all'infuori dell'involuzione che risulta dalla proiezione della superficie stessa dal punto doppio*. Sopra tale superficie, una base minima è costituita dal punto doppio d e dalle sezioni piane δ condotte per esso (di genere 2); il determinante di questa base vale infatti -8 , e ammette perciò come unico divisore quadrato perfetto il 4; mentre il determinante di altra base, essendo anche del tipo $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ con a_{11}, a_{22} pari, non potrebbe in nessun caso assumere il valore $-8:4 = -2$. Dico che, sopra questa F^4 , la rete $|\delta|$ è la sola rete di curve effettive, irriducibili, di genere 2. Invero, la determinazione di queste reti, di grado virtuale anche 2, e del tipo $x\delta + yd$, dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione $x^2 + 2xy - y^2 = 1$; la quale, mediante la sostituzione $x = t - u, y = u$, si trasforma nell'equazione di Fermat-Pell:

$$(1) \quad t^2 - 2u^2 = 1.$$

Le reti di genere 2 sono date perciò dalle combinazioni $(t - u)\delta + ud$, colla condizione (1); avvertendo inoltre che si avranno curve effettive (ossia di ordine > 0) solo per $t > u$, e perciò (essendo altresì $t^2 > 2u^2$) per valori positivi di t . Essendo inoltre:

$$(t - u)\delta + ud \equiv (t - u)(\delta + d) + (2u - t)d,$$

si vede che, per u positivo (nel qual caso $u < t < 2u$), l'accennata combinazione risulta dalla somma di un multiplo del sistema delle sezioni piane $|\delta + d|$, di genere 3 e dimensione 3, e del punto doppio, contato $2u - t$ volte; è dunque un sistema riducibile (poichè detto punto doppio, contato $2u - t$ volte, è parte fissa del sistema). Per u negativo, si hanno i sistemi trasformati dei precedenti mediante la proiezione dal punto doppio di F^4 (la quale corrisponde alla sostituzione $t' = t, u' = -u$); anch'essi dunque riducibili. Rimane perciò la sola soluzione $u = 0, t = 1$, che conduce alla rete $|\delta|$. Infine, è pure ovvio che la forma quadratica $t^2 - 2u^2$ (equivalente alla $x^2 + 2xy - y^2$) non ammette altre sostituzioni lineari che mutino in sè la soluzione $t = 1, u = 0$, cioè la rete $|\delta|$, all'infuori della sostituzione $t' = t, u' = -u$, alla quale corrisponde sopra F^4 la sola proiezione dal punto doppio.

Poichè z vi compare soltanto a 1° grado, si ricava $z = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x + 2y}$; e le soluzioni intere sono perciò date dalle formole:

$$(4) \quad x = kp(p + 2q) \quad y = kq(p + 2q) \quad z = k(p^2 - pq + q^2)$$

per valori interi non entrambi nulli di p e q (uno dei quali potrà supporre non negativo), mentre k potrà anche assumere convenienti valori fratti.

Introducendo come nuovo parametro, in luogo di q , il valore $q_0 = p + 2q$, che è pure numero intero ogni qualvolta siano tali p e q , si ricavano per x, y, z le nuove espressioni (nelle quali sopprimiamo l'indice di q_0 , scrivendo q in luogo di q_0):

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= kpq & y &= \frac{k}{2} q(q - p) \\ z &= \frac{k}{4} (7p^2 + q^2 - 4pq) = \frac{k}{4} \{ 3p^2 + (2p - q)^2 \}. \end{aligned}$$

Sopra questi ultimi parametri, l'involuzione I determina la sostituzione involutoria $p' = p, q' = -q$, e la S determina la sostituzione parabolica $p'' = p + 2q, q'' = q$.

Per le soluzioni (4) o (5) che conducono a curve ellittiche $xd + yr + zy$ effettive e irriducibili, dovranno inoltre verificarsi le condizioni seguenti:

1°. L'ordine $y + 3z$ di tale curva deve essere > 0 . E poichè dalle (4) si ricava $y + 3z = k(3p^2 - 2pq + 5q^2)$, dove la forma entro parentesi è definita e positiva, sarà altresì $k > 0$.

2°. Essendo $k > 0$, dall'ultima delle (4), dove $p^2 - pq + q^2$ è anche forma definita positiva, segue che sarà pure $z > 0$.

3°. Disponendo ad arbitrio del segno di uno dei parametri p e q , possiamo supporre, nelle (5), $p \geq 0$. E possiamo supporre ivi altresì $q > 0$, poichè per $q = 0$ si ha soltanto il fascio $|y|$ (prescindendo dai suoi multipli, che sono riducibili); e, se fosse $q < 0$, potremmo riferirci alle curve trasformate di quelle in esame, mediante la I.

Essendo nelle (5) $k > 0, p \geq 0, q > 0$, sarà altresì $x \geq 0$. D'altra parte la combinazione $xd + yr + zy$, per valori positivi o nulli delle x, y, z , non può mai essere un fascio di curve ellittiche, effettive e irriducibili, distinto da $|y|$. Per un tal fascio (distinto sempre da $|y|$) dovrà perciò essere negativo almeno un coefficiente; e questo, essendo già $z > 0, x \geq 0$, non può essere che y . Ora, $y < 0$ implica $p > q$; e allora, applicando al corrispondente fascio di curve ellittiche la trasformazione inversa di S (colla quale si muta p in $p - 2q$, lasciando invariato q), eventualmente più volte, se ne ricaverebbe un altro fascio, pel quale sarebbe $|p| \leq q$. Per quest'ultimo fascio, o per il suo trasformato mediante I, sarebbero dunque p e q positivi con $p \leq q$, il che va escluso.

Sulla superficie F^4 non esiste dunque nessun fascio di curve ellittiche, effettive ed irriducibili, all'infuori del fascio di cubiche γ . Perciò qualunque trasformazione birazionale sopra F^4 muterà in sè stesso quest'ultimo fascio (e risulterà anzi dal seguito ch'essa deve lasciare invariata ogni singola curva di tale fascio).

4. Si indichi ora con T una qualsiasi trasformazione birazionale della superficie F^4 . Poichè essa muta il fascio di cubiche $|\gamma|$ in sè stesso, dovrà trasformare l'intorno d del punto doppio in una linea $xd + yr + z\gamma$ unisecante le γ . D'altra parte, il numero dei punti d'intersezione della linea $xd + yr + z\gamma$ colle γ è $x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 0 = x + 2y$; sarà perciò $x + 2y = 1$; e possiamo porre $y = k$, $x = -(2k - 1)$. Il valore di z si può allora determinare eguagliando a -2 il grado virtuale della curva in parola, e si trova così $z = k(7k - 5)$. Detta curva, unisecante le γ , sarà perciò del tipo:

$$-(2k - 1)d + kr + k(7k - 5)\gamma$$

e la indicheremo (in corrispondenza ai singoli valori interi di k) con η_k . Si verifica allora che, applicando alla linea η_k l'operazione S , essa si muta nella η_{k-1} (p. es. la η_0 , che è lo stesso intorno d , si muta in

$$d'' = 3d - r + 12\gamma = \eta_{-1} \quad (1).$$

Supponiamo pertanto che l'operazione T sopra considerata trasformi l'intorno d nella linea η_k , unisecante le γ . Allora il prodotto $T \cdot S^k$ riporterà l'intorno d alla sua posizione iniziale; e per conseguenza (lasciando esso invariati d e il fascio $|\gamma|$) detto prodotto opererà sopra i sistemi di curve della superficie F^4 secondo una sostituzione del tipo

$$\begin{cases} d^* = d \\ r^* = ad \pm r + b\gamma \\ \gamma^* = \gamma \end{cases}$$

dove a e b sono coefficienti ancora sconosciuti, ma che si possono determinare tenendo conto del fatto che la linea r^* deve incontrare d in un punto e γ in due punti. Secondo che, nell'espressione di r^* , si prende per r il segno superiore o quello inferiore, si hanno per a e b le due equazioni:

$$-2a + 1 + b = 1 \qquad a + 2 = 2$$

(1) La linea η_k ha come *linea satellite* rispetto al fascio $|\gamma|$ (cioè come luogo dei tangenziali dei suoi punti, sopra le singole γ) la linea $\eta_{-(2k-1)}$. Infatti la somma $2\eta_k + \eta_{-(2k-1)}$ differisce da $d + r$ (la quale ultima sega sulle γ una terna di punti allineati) solo per un multiplo di γ .

da cui $a = b = 0$; oppure:

$$-2a - 1 + b = 1 \qquad a - 2 = 2$$

da cui $a = 4$, $b = 10$. Nel primo caso si ha l'identità, onde $T = S^{-k}$; nel secondo caso si ha l'involuzione:

$$\begin{cases} d^* = d \\ r^* = 4d - r + 10\gamma \\ \gamma^* = \gamma \end{cases}$$

la quale non è altro che il prodotto $I \cdot S$; perciò $T = IS^{-(k-1)}$.

La superficie F^4 non ammette dunque altre trasformazioni birazionali, all'infuori delle operazioni I ed S , e loro prodotti. Di queste, è già noto che lasciano invariata ogni singola curva γ .

Si ottengono già tutte le trasformazioni anzidette, prendendo le potenze (positive e negative) di S , e i loro prodotti (a destra oppure a sinistra) per I .

Le sostituzioni lineari della forma fondamentale f in cui si rispecchiano le trasformazioni birazionali di F^4 non esauriscono però il gruppo complessivo di f ⁽¹⁾.

Matematica. — Differenziali controvarianti. Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI ⁽²⁾.

In una mia Nota, pubblicata recentemente in questi Rend., è messa in luce l'importanza che avrebbe per certi studi l'introduzione dei differenziali *controvarianti*, quando come forma fondamentale non si assumesse più (come negli studi del Ricci di calcolo assoluto) una forma differenziale quadratica del primo ordine, ma una forma del primo ordine e di grado qualunque ⁽³⁾. La generalizzazione non sembra agevole; qui farò un primo passo, definendo i differenziali controvarianti del *secondo* ordine; e, soltanto per semplicità di notazioni, assumerò a forma fondamentale una forma cubica

$$F = \sum b_{rst} du_r du_s du_t.$$

⁽¹⁾ La forma f ammette per es. la sostituzione involutoria

$$x' = -x + y + z, \quad y' = y, \quad z' = z$$

la quale, applicata ai sistemi di curve di F^4 , opererebbe su di essi nel modo seguente:

$$d' = -d, \quad r' = d + r, \quad \gamma' = d + \gamma$$

trasformando perciò sistemi irriducibili in sistemi riducibili.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1920.

⁽³⁾ Cfr. la mia Nota, *I differenziali controvarianti*, negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIV (1918), pp. 5-7.

Cambiando variabili coordinate, si abbia

$$F = \Sigma b'_{rst} du'_r du'_s du'_t,$$

ove u' , b' siano le nuove variabili, e i nuovi coefficienti; sarà

$$b'_{ijt} = \sum_{r,s,t} b_{rst} \frac{\partial u_r}{\partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_t}.$$

Posto, generalizzando i simboli di Christoffel:

$$\left[\begin{smallmatrix} r s t \\ v \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{6} \left\{ \frac{\partial b_{vst}}{\partial u_r} + \frac{\partial b_{rst}}{\partial u_s} + \frac{\partial b_{rst}}{\partial u_t} - \frac{\partial b_{rst}}{\partial u_r} \right\},$$

troviamo facilmente che:

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} i j l \\ m \end{smallmatrix} \right]' &= \sum_{r,s,t,v} \left[\begin{smallmatrix} r s t \\ v \end{smallmatrix} \right] \frac{\partial u_r}{\partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_l} \frac{\partial u_v}{\partial u'_m} + \\ &+ \frac{1}{3} \Sigma b_{rst} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_i \partial u'_j} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_m} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_j \partial u'_l} \frac{\partial u_s}{\partial u'_l} \frac{\partial u_t}{\partial u'_m} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_l \partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_m} \right]. \end{aligned}$$

Indichiamo con B_r, C_r, D_r, E_r quattro sistemi controvarianti, distinti o no. (Per es. poniamo $B_r = C_r = D_r = E_r = du_r$). Posto

$$a_{rs} = \sum_t b_{rst} B_t,$$

indicato con A_{rs} il complemento di a_{rs} nel determinante $|a_{rs}|$ diviso per $|a_{rs}|$, sarà:

$$a'_{ij} = \Sigma a_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \quad A'_{ij} = \Sigma A_{rs} \frac{\partial u'_i}{\partial u_r} \frac{\partial u'_j}{\partial u_s}.$$

(equazioni che si possono derivare rispetto alle u , se le B sono funzioni soltanto delle u , ma non si possono derivare se per es. $B_r = du_r$).

Deduciamo facilmente dalle formole precedenti, posto:

$$\sum_m A_{m\mu} \left[\begin{smallmatrix} i j l \\ m \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{smallmatrix} i j l \\ \mu \end{smallmatrix} \right\},$$

che:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} i j l \\ \mu \end{smallmatrix} \right\}' &= \sum_{\sigma, r, s, t} \left\{ \begin{smallmatrix} r s t \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\sigma} \frac{\partial u_r}{\partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_l} - \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{\substack{\sigma, \sigma \\ r, s}} A_{\sigma\sigma} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\sigma} b_{rst} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_i \partial u'_j} \frac{\partial u_s}{\partial u'_l} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_l \partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_j \partial u'_l} \frac{\partial u_s}{\partial u'_i} \right]. \end{aligned}$$

Donde:

$$\sum_{i,j,l,\mu} \frac{\partial u_\gamma}{\partial u'_\mu} \left\{ \begin{matrix} i j l \\ \mu \end{matrix} \right\}' C'_i D'_j E'_l = \sum_{r,s,t} \left\{ \begin{matrix} r s t \\ \gamma \end{matrix} \right\} C_r D_s E_t + \\ + \frac{1}{3} \sum A_{\rho\gamma} b_{r\sigma\rho} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_i \partial u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial u_h} \frac{\partial u'_j}{\partial u_k} C_h D_k E_s + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_i \partial u'_l} \frac{\partial u'_i}{\partial u_h} \frac{\partial u'_l}{\partial u_k} C_h D_s E_k + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_j \partial u'_l} \frac{\partial u'_j}{\partial u_h} \frac{\partial u'_l}{\partial u_k} C_s D_h E_k \right].$$

D'altra parte, se F_r è un sistema controvariante, si ha:

$$\sum_\mu \frac{\partial u_\gamma}{\partial u'_\mu} dF'_\mu = dF_\gamma - \sum \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial u'_i \partial u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial u_h} \frac{\partial u'_j}{\partial u_k} F_h du_k,$$

come si vede, differenziando la $F_\gamma = \sum \frac{\partial u_\gamma}{\partial u'_\mu} F'_\mu$ e ricordando che

$$F'_\mu = \sum_r \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_r} F_r, \quad du'_i = \sum_s \frac{\partial u'_i}{\partial u_s} du_s.$$

Supposto $B_r = C_r = D_r = E_r = F_r = du_r$, ricordando che:

$$\sum_s b_{rsi} du_s = a_{rit} \quad \text{e che} \quad \sum_r a_{rit} A_{rs} = \varepsilon_{st} \quad (\varepsilon_{ss} = 1, \varepsilon_{st} = 0 \text{ per } s \neq t),$$

otterremo, sommando le formole precedenti, che:

$$\sum_\mu \frac{\partial u_\gamma}{\partial u'_\mu} \left[d^2 u'_\mu + \sum_{i,j,l} \left\{ \begin{matrix} i j l \\ \mu \end{matrix} \right\}' du'_i du'_j du'_l \right] = d^2 u_\gamma + \sum_{r,s,t} \left\{ \begin{matrix} r s t \\ \gamma \end{matrix} \right\} du_r du_s du_t.$$

Indicato con $\delta^2 u_\gamma$ il secondo membro, ne deduciamo che $\delta^2 u_1, \delta^2 u_2, \dots$ costituiscono appunto, come si voleva, un sistema controvariante. Si noti, per maggior chiarezza, che i simboli $\left\{ \begin{matrix} r s t \\ \gamma \end{matrix} \right\}$ sono soltanto formalmente analoghi ai simboli di Christoffel; infatti essi (come le A_{rs} da noi definite ponendo $B_r = du_r$) sono espressioni omogenee di grado -1 nei differenziali du_r : essi sono precisamente frazioni, il cui denominatore è lo Hessiano della forma differenziale data. Che questo Hessiano debba comparire come denominatore, quando si vogliano estendere le formole del calcolo assoluto, si deduce facilmente *a priori*, quando si voglia generalizzare la teoria delle linee geodetiche ⁽¹⁾. Dai risultati di questa Nota segue il teorema: *Lo studio di un sistema di forme differenziali del primo o del secondo ordine (di grado anche maggiore di 2) si può sempre ridurre allo studio di un sistema di forme del primo ordine.* (Cfr. l'ultima osservazione della Nota citata per le applicazioni di questo teorema).

⁽¹⁾ Cfr. Lipschitz, *Untersuch. in Betreff der ganzen homog. Functionen von n Differentialen* [Journ. für die reine u. angewandte Mathem., Band 70 (1869), pp. 71-102]. In questa Memoria è studiato un problema di variazione analogo a quello delle linee geodetiche.

Geometria. — *Determinazione proiettiva di una congruenza W.*

Nota di MARIA TERESA AMBROSETTI, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI ⁽¹⁾.

Il metodo dato dal sig. Fubini di determinare, dal punto di vista proiettivo, una congruenza di rette ⁽²⁾, si estende alle congruenze W. Sieno x, y , ecc., coordinate di retta legate dalla equazione

$$Sx^2 = x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + q^2 + l^2 = 0.$$

Se esse sono funzioni di due parametri u, v , la retta genererà una congruenza.

Posto $\varphi_2 = \sum_{r,s} a_{rs} du_r du_s = Sdx^2$, l'equazione delle sviluppabili si otterrà uguagliando φ_2 a zero. Supposto non nullo il discriminante Δ di φ_2 , indicheremo con A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in Δ , diviso per Δ , con x_i, x_{ij} , ecc. derivate covarianti secondo φ_2 ; porremo

$$\begin{aligned} D_2 x &= \sum x_{ij} du_i du_j, \quad D_3 x = \sum x_{rst} du_r du_s du_t, \\ \varphi_4 &= -S(D_2 x)^2 = Sdx D_3 x = \sum k_{rsij} du_r du_s du_i du_j \\ &\quad (r, s, t, i, j = 1, 2). \end{aligned}$$

Data la φ_4 , si dimostra come loc. cit. che restano determinate le

$$h_{rspq} = Sx_r x_{pq} = -Sx_{rs} x_{pq} \quad \text{e le} \quad Sx_{rs} x_{ijt}.$$

Se la congruenza è W, le x, y , ecc. soddisfano a una stessa equazione

$$Ax_{11} + 2Bx_{12} + Cx_{22} + \alpha x_1 + \beta x_2 + Mx = 0 \quad (\text{e analoghe in } y, z, \dots).$$

Moltiplicando per x_i e sommando con le analoghe, si trova $\alpha = \beta = 0$, cosicchè, supposto $M \neq 0$, l'equazione si ridurrà al tipo

$$(1) \quad C_{11} x_{11} + 2C_{12} x_{12} + C_{22} x_{22} + x = 0 \quad (\text{e analoghe in } y, \dots)$$

dove le C_{rs} formano un sistema controvariante. Indicheremo con c_{rs} il sistema covariante duale, ponendo poi $\psi_2 = \sum c_{rs} du_r du_s$. Moltiplicando (1) per x e sommando con le analoghe, si trova

$$(2) \quad 0 = \sum C_{rs} a_{rs}.$$

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1920.

⁽²⁾ Cfr. le Note di Fubini in questi Rendiconti, serie 5^a, vol. XXVII, pag. 304, e vol. XXVIII, pag. 32.

Supporremo $c_{11} c_{22} - c_{12}^2 \neq 0$.

Il determinante $(x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_1, x_2, x)$ ⁽¹⁾ è nullo. Indicheremo con $\xi, \eta, \zeta, \pi, \kappa, \lambda$ i complementi dell'ultima colonna divisi per

$$\sqrt{c_{11} c_{22} - c_{12}^2} \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}.$$

È facile riconoscere che

1°) Le ξ, η, \dots non variano cambiando i parametri u_1, u_2 .

2°) Le ξ, η, \dots restano divise per ϱ , se si moltiplicano le coordinate omogenee x, y, \dots per uno stesso fattore ϱ .

3°) Le ξ, η, \dots sono le coordinate del complesso lineare osculatore.

Si trova

$$(3) \quad \begin{aligned} & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \pi^2 + \kappa^2 + \lambda^2 = S\xi^2 = \\ & = \frac{1}{\sqrt{A^3}} \frac{1}{\sqrt{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}} (x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_1, x_2, \xi) \quad (2). \end{aligned}$$

Porremo

$$h = \begin{vmatrix} h_{1111} & h_{1112} & h_{1122} \\ h_{1211} & h_{1212} & h_{1222} \\ h_{2211} & h_{2212} & h_{2222} \end{vmatrix} \quad H = \begin{vmatrix} H_{1111} & H_{1112} & H_{1122} \\ H_{1211} & H_{1212} & H_{1222} \\ H_{2211} & H_{2212} & H_{2222} \end{vmatrix}.$$

È

$$HA^3 = H \begin{vmatrix} a_{11}^2 & 2a_{11} a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11} a_{12} & a_{11} a_{22} + a_{12}^2 & a_{12} a_{22} \\ a_{12}^2 & 2a_{12} a_{22} & a_{22}^2 \end{vmatrix} = h.$$

Supposto non degenerare il complesso lineare osculatore, e quindi $S\xi^2 \neq 0$, avremo, innalzando (3) al quadrato, e dividendo per $S\xi^2$, che

$$S\xi^2 = \frac{h}{A^3(c_{11} c_{22} - c_{12}^2)} \quad \text{ossia} \quad H = \frac{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} S\xi^2.$$

Potremo fissare le coordinate omogenee x in guisa che $S\xi^2 = \varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$); così tali coordinate omogenee saranno determinate senza ambiguità in modo indipendente dalla scelta delle u_1, u_2 , che si conserva per trasformazioni proiettive; e sarà

$$(4) \quad H = \varepsilon \frac{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}.$$

(1) Come in loc. cit., con questa notazione indico il determinante, di cui gli elementi scritti tra () formano la prima riga, e le altre righe si deducono sostituendo alla x le y, z , ecc.

(2) Con $(x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_1, x_2, \xi)$ indico il determinante, di cui la prima riga è formata dalle quantità scritte tra () e le altre se ne deducono sostituendo alle x, ξ le y, η , oppure le z, ζ , ecc.

Affinchè la congruenza sia completamente determinata a meno di una collineazione, basterà pertanto che siano determinati i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, b, e, d$ delle seguenti equazioni differenziali:

$$(5) \quad x_{rst} = \sum_{i,j,m,n} \alpha_{rstij} A_{im} A_{jn} x_{mn} + \sum_{ij} \beta_{rsti} A_{ij} x_j + \gamma_{rst} \xi$$

$$(6) \quad \xi_r = \sum b_{rij} A_{im} A_{jn} x_{mn} + \sum e_{ri} A_{ij} x_j + d_{rst} \xi$$

$(r, s, t, m, n, i, j = 1, 2)$

a cui soddisfano sia le x, ξ , che le y, η , che le z, ζ , ecc.

Supponiamo, per fissar le idee, $\varepsilon = 1$. Formole analoghe si hanno se $\varepsilon = -1$.

Moltiplicando ciascuna di queste equazioni per ξ , o per x , o per x_r , o per x_{rs} e sommando con le analoghe, si trova facilmente che le e e le d della (6) sono nulle, che le γ non sono che i coefficienti della forma $\varphi_3 = S \xi D_3 x$, che $\beta_{rsti} = \sum x_{rst} x_i = h_{irst}$; e infine che le α, b sono determinate dalle

$$S x_{pq} x_{rst} = \sum_{i,j,m,n} \alpha_{rstij} A_{im} A_{jn} h_{mnpq}$$

$$S \xi_r x_{pq} = \sum b_{rij} A_{im} A_{jn} h_{mnpq}.$$

Questi sono sistemi di equazioni lineari nelle incognite α e b ; il determinante dei coefficienti di tali incognite coincide a meno di un fattore numerico, con la quantità $H \neq 0$ data da (4); restano così completamente determinate le α, b .

La congruenza resta perciò determinata dalle forme $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_2$, legate dalle (4), (2) e dalle condizioni di integrabilità delle (5), (6), (1). La brevità dello spazio mi impedisce di sviluppare tutte queste relazioni, e di esaurire lo studio di quei casi estremamente particolari (specialmente quello in cui $M = 0$, oppure $S \xi^2 = 0$), che abbiamo escluso in questo studio. Questi calcoli si fanno nel modo più semplice, assumendo a linee coordinate u_i le sviluppabili (per cui $\varphi_2 = 0$), oppure le assintotiche delle falde focali (per cui $\psi_2 = 0$).

Termodinamica. — *Sulle trasformazioni isentropiche di certi sistemi univarianti*. Nota di UGO BORDONI, presentata dal Socio CASTELNUOVO ⁽¹⁾.

1. Lo studio quantitativo delle trasformazioni isentropiche dei sistemi univarianti del tipo dei miscugli di un vapore saturo e del proprio liquido riesce grandemente agevolato dalle semplici osservazioni che seguono; le quali, se fossero state fatte in addietro, avrebbero probabilmente contribuito a contrastare lo sviluppo, in questa parte della termodinamica applicata, di alcuni di quei procedimenti di carattere empirico, concettualmente poco soddisfacenti e di impiego non privo di pericoli, che sono per lo più l'indizio della incompleta maturità del ramo della scienza al quale si riferiscono.

2. L'equazione, nelle variabili T (temp. ass.) ed x (titolo, del vapore o della fase corrispondente, se si tratta di altri sistemi) delle trasformazioni isentropiche dei sistemi univarianti del tipo sopra accennato viene messa generalmente sotto la forma:

$$(1) \quad \gamma_1 \cdot dT + T \cdot d\left(\frac{x}{T}\right) = 0$$

indicando con r il calore di trasformazione e con γ_1 il calore specifico del liquido (o della fase corrispondente); il quale γ_1 vien fatto quasi sempre coincidere non solo numericamente, ma anche concettualmente (lo si può constatare esaminando libri e pubblicazioni varie, italiane e straniere, antiche e recenti) col calore specifico *a pressione costante*. Ora, ammettere questa ultima coincidenza significa fare un vero e proprio errore, in quanto, dovendosi necessariamente supporre (implicitamente o no), per giungere alla (1), decomposta ogni trasformazione infinitesima del sistema in due altre, l'una a *temperatura costante* e l'altra a *titolo costante*, per γ_1 deve intendersi, senza ombra di dubbio, il « *calore specifico a titolo costante* » del liquido (o della fase corrispondente), cioè un calore specifico a pressione variabile con la temperatura in guisa da rimanere sempre eguale alla corrispondente tensione del vapore saturo; ma anche la coincidenza numerica approssimata non può ammettersi che a temperature assai lontane dalla critica. Lo scrivente ha avuto difatti occasione di mostrare ⁽²⁾ che, per qualunque fluido, *la differenza fra i valori dei due calori specifici tende a diventare infi-*

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1920.

⁽²⁾ Nuovo Cimento, 1920, *Sulle trasformazioni isentropiche dei vapori saturi*.

nitamente grande alla temperatura critica; per la CO_2 , ad es., il calcolo mostra che la differenza è già del 30° , a 25°C ., temperatura superata durante le trasformazioni che avvengono nelle macchine refrigeranti.

3. Ora la (1), intendendo x come funzione di T (lungo la trasformazione), può anche scriversi:

$$(2) \quad \frac{dx}{dT} - x \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dT} \right) + \frac{\gamma_1}{r} = 0$$

E poichè r e γ_1 dipendono solo da T , e ne dipendono anzi in modo che, per ragioni di origine sperimentale, si può affermare che le espressioni $\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dT} \right)$ e $\frac{\gamma_1}{r}$ si mantengono continue e finite in tutto il campo di variabilità che interessa, ad eccezione degli estremi (zero assoluto, temp. critica). gli integrali particolari della (2) (*lineare*) godono, fra altro, della seguente proprietà. Siano tracciate, in un piano cartesiano x, T , le infinite curve come $ABCD \dots$, $A'B'C'D' \dots$, $MN \dots$ integrali particolari della (2); le *punteggiate* che queste curve determinano su ciascuna delle infinite rette, come $BM B'$, $CN C'$, \dots , parallele all'asse delle x , sono *simili* fra di loro; sicchè, ad es., si ha: $\frac{CN}{BM} = \frac{CC'}{BB'}$.

Questa proprietà, se si tien conto del significato dei simboli e della via per la quale si giunge alla (1), dà intanto luogo a quello che potremo chiamare brevemente *il principio della proporzionalità delle variazioni di titolo* e che si enuncia: « Se un determinato sistema univariante del tipo qui considerato percorre successivamente più trasformazioni isentropiche, i rapporti fra le differenze dei valori che il titolo assume negli stati (di una qualsiasi coppia di trasformazioni) corrispondenti alle stesse temperature (od alle stesse pressioni) non dipendono dalla particolare coppia di isentropiche considerata ». E questo principio permette, allora, di *risolvere immediatamente e rigorosamente* il problema di *calcolare le variazioni di titolo che avvengono lungo una qualsiasi isentropica* del sistema.

Siano noti, difatti, per mezzo di una tabella o di un grafico, due degli integrali particolari della (2), cioè, ad es., le coordinate (che indicheremo con lettere maiuscole) dei punti delle due curve $ABCD \dots$, $A'B'C'D' \dots$; e sia noto uno (x_M, T_M) degli stati per cui passa una qualsiasi altra isentropica (e che serve appunto ad individuarla). Allorchè, percorrendo questa isentropica, il sistema ha assunto la temperatura T_N , il titolo corrispondente x_N sarà dato dalla relazione:

$$(3) \quad x_N = X_C - (X_B - x_M) \cdot \frac{X_C - X_{C'}}{X_B - X_{B'}}$$

il cui calcolo, assai semplice, può essere ancora facilitato ove le tabelle che

definiscono le curve ABCD..., A'B'C'D'.... contengano anche le differenze del tipo $(X_c - X_c')$. Lo scrivente ha preparato queste tabelle per alcuni dei vapori saturi il cui studio è più frequente (acqua, SO_2 , CO_2 , NH_3 , ecc.) ⁽¹⁾.

4. La (1) si può trasformare in una relazione fra le nuove variabili *volume* (v) e *pressione* (p), non meno importanti delle altre, ove si faccia uso delle relazioni:

$$(4) \quad v = \sigma + x(s - \sigma)$$

$$(5) \quad T = \varphi(p)$$

nelle quali σ ed s sono i volumi specifici del liquido e del vapore, o delle fasi corrispondenti (se si trattasse di sistemi di altra natura). Ma se la (4) si presta senz'altro allo scopo, non è così della (5); in quanto la dipendenza, per un medesimo fluido, fra T e p è nota solo sotto forma di tabelle (di origine sperimentale) o di relazioni sostanzialmente empiriche (e di forma complicata, per poco che la (5) debba valere in un intervallo di temperatura non troppo ristretto). Queste difficoltà, presentatesi veramente in forma non sempre limpida e precisa, fecero in addietro sorgere il problema di ricercare se gli integrali particolari della (1), trasformata adottando v e p come variabili (una funzione dell'altra), non potevano essere rappresentati *approssimativamente* da espressioni empiriche di tipo semplice; e si giunse a soluzioni (Rankine, Zeuner), largamente usate, delle quali, per altro, lo scrivente ha mostrato, nove anni or sono, il carattere non soddisfacente, derivante da contraddizioni implicite ch'esse contengono; indicando poi, più di recente ⁽²⁾, quale sia il loro campo reale di validità ed in qual modo possa togliersi, senza complicazioni apprezzabili, il grave difetto accennato.

Ma è facile verificare che se, pur mantenendo alla (5) la sua forma puramente simbolica, si fa uso delle (4) e (5) per introdurre nella (2) le nuove variabili v, p e si tien conto che s, σ, γ_1, r sono funzioni solo di T , cioè, nelle nuove variabili, solo di p , la (2) (considerando v come funzione di p) conserva la sua forma di equazione *lineare*. Anche nelle nuove variabili, dunque, vale la proprietà già segnalata per gli integrali particolari della (2), al pari di un principio (che potremo dire brevemente della *proporzionalità delle variazioni di volume*) il quale si enuncia: « Se un determinato sistema univariante del tipo qui considerato percorre successivamente più trasformazioni isentropiche, i rapporti fra le differenze dei valori che il volume assume negli stati (di una qualsiasi coppia di trasformazioni) corrispondenti alle stesse pressioni (od alle stesse temperature) non dipendono dalla particolare coppia di isentropiche considerata ». E nello stesso modo già accen-

⁽¹⁾ Esse vengono qui omesse per ovvie ragioni di spazio; ma saranno senz'altro inviate, al pari di quelle di cui nel § 4, a chi voglia richiederle (al Lab. di Fisica Tecnica della R. Scuola per gli Ingegneri di Roma).

⁽²⁾ Nuovo Cimento, 1920, loc. cit.

nato (§ 3), questo principio permette di risolvere, facilmente e rigorosamente, il problema di calcolare le variazioni di volume che avvengono lungo trasformazioni isentropiche, mediante l'impiego di una relazione del tipo:

$$(6) \quad v_N = V_0 - (V_B - v_M) \cdot \frac{V_0 - V_{C'}}{V_B - V_{B'}}$$

analoga alla (3) tanto come forma quanto come origine, giustificazione ed impiego. Per ogni determinato sistema, basterà conoscere come varii il volume in funzione della temperatura (o della pressione) lungo due isentropiche quali che siano ABCD..., A'B'C'D'...; sarà ovviamente sufficiente limitarsi a considerare l'unità di massa del sistema. Lo scrivente ha già calcolato le tabelle occorrenti per l'applicazione della (6) ai vapori che d'ordinario più interessano (acqua, CO₂, SO₂, NH₃, ...) (1).

Geometria. — *Le superficie proiettivamente applicabili*. Nota di LINDA STIPA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI (2).

Il problema della deformazione proiettiva delle ipersuperficie è stato dal prof. Fubini ridotto al problema analogo per le superficie (3). Questo si riduce (4) a trovare, date β e γ come funzioni di u, v , le eventuali soluzioni del sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} L'_v = -(2\beta\gamma'_u + \gamma\beta'_u) & , & M'_u = -(2\gamma\beta'_v + \beta\gamma'_v) , \\ \beta M'_v + 2M\beta'_v + \beta''_{vv} = \gamma L'_u + 2L\gamma'_u + \gamma''_{uu} . \end{cases}$$

Ad ogni soluzione di questo sistema corrisponde una superficie, per cui le linee di Darboux-Segre sono definite dalla $\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$, e per cui le u, v sono assintotiche.

Se $L = L_i$, $M = M_i$ ($i = 1, 2$) sono due sistemi di soluzioni di (1), le corrispondenti superficie sono proiettivamente applicabili; e, posto

$$\lambda = L_1 - L_2 \quad , \quad \mu = M_1 - M_2 ,$$

la forma $\lambda du^2 + \mu dv^2$ ha significato *intrinseco*; e le λ, μ soddisfano alle

$$(2) \quad \lambda'_v = \mu'_u = 0 \quad ; \quad \beta\mu'_v + 2\mu\beta'_v = \gamma\lambda'_u + 2\lambda\gamma'_u .$$

(1). Come già le altre, anche queste tabelle, che vengono qui omesse per ragioni di spazio, verranno senz'altro inviate a chi voglia richiederle (al Lab. di Fisica Tecnica della R. Scuola per gli Ingegneri di Roma).

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1920.

(3) E. Cartan si è occupato recentemente dello stesso problema per altra via (Comptes Rendus, 1920, 1° sem., fasc. 24).

(4) Fubini, *Fondam. di geom. proiett. differenz. di una superf.* (questi Rend. 1918, pag. 47).

Se una delle λ, μ è uguale a zero, potremo, permutando, caso mai, u con v supporre $\mu = 0$ e scegliere poi il parametro delle u in guisa che $\lambda = 1$ (la forma $\lambda du^2 + \mu dv^2$ ha significato intrinseco e per (2) λ è funzione della sola u). Se $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$, potremo in modo simile rendere $\lambda = \mu = 1$.

I caso: $\lambda = 1, \mu = 0$. Le (2) danno $\gamma'_u = 0$; prescindendo dalle rigate (caso più facile), e quindi supponendo $\gamma \neq 0$, potremo cambiare il parametro delle v in guisa che $\gamma = 1$. La 2^a delle (1) prova potersi porre: $M = \varphi'_v, -2\beta = \varphi'_u$, essendo φ funzione delle u, v . La condizione di integrabilità delle altre due equazioni nella L dà che φ deve soddisfare alla

$$(3) \quad \varphi''_{uuu} + \frac{\partial}{\partial v} (\varphi'_u \varphi''_{vv} + 2\varphi'_v \varphi''_{uv} + \varphi'''_{vvv}) = 0.$$

Date $\gamma = 1$ e $\beta = -\frac{1}{2} \varphi'_u$, la φ non è determinata; ad essa potremo sostituire la $\psi = \varphi + W$, ove W è funzione arbitraria di v ; ma, poichè anche la ψ dovrà soddisfare a (3), sarà, posto $V = W'$:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial v} (\varphi'_u V' + 2\varphi''_{uv} V) = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\varphi V' + 2\varphi'_v V) = 0.$$

La soluzione più generale della seconda delle (1) sarà:

$$M = \varphi'_v + V.$$

E la L si otterrà dalle altre (1) con integrazione, e cioè con una nuova costante additiva arbitraria. Se dunque la V soddisfacente a (4) dipende da h costanti arbitrarie, otterremo ∞^{h+1} superficie tra loro applicabili. Sarà $h = 0$, se la (4) ammette come unica soluzione $V = 0$; in ogni altro caso è $h \leq 2$, perchè la (4) è del secondo ordine in V ⁽¹⁾. La ricerca delle funzioni φ soddisfacenti a (3) per cui la (4) è risolubile con $V \neq 0$ si riduce a un facile calcolo, che la brevità dello spazio mi vieta di riprodurre. Noterò solo che, posto $\frac{1}{\sqrt{V}} = V'_1$, la (4) si può scrivere:

$$(\varphi \sqrt{V})'_v = U_1 V'_1 + V'_2,$$

$$\varphi = (U_1 V_1 + V_2 + U_2) V'_1, \quad \beta = -\frac{1}{2} (U'_1 V_1 V'_1 + U'_2 V'_1)$$

ove U_1, U_2 sono funzioni della sola u , V_1 e V_2 della sola v .

II caso: $\lambda = \mu = 1$. In tal caso le (2) danno: $\beta = f'_u, \gamma = f'_v$ ove la f è una funzione delle u, v , che è determinata (a meno di una inessenziale costante additiva), appena siano date le β, γ . La f naturalmente deve soddisfare alla condizione della risolubilità delle (1). Se per questi valori

(¹) Tale equazione non può ridursi a identità, perchè, se escludiamo le rigate, è $\beta \neq 0$, e quindi $\varphi'_u \neq 0$.

di β, γ le (2) ammettono la sola soluzione $\lambda = \mu = \text{cost.}$, le L, M definite da (1) dipenderanno da una sola costante arbitraria; e corrispondentemente avremo ∞^1 superficie proiettivamente applicabili. Se così non è, allora da (2) si deduce:

$$(5) \quad \lambda = U, \mu = V; \quad f'_u V' + 2 f''_{uv} (V - U) - f'_v U' = 0$$

dove U è funzione della sola u , V della v . Il caso *che*

$$0 = \frac{\partial^2 \log f'_u}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log f'_v}{\partial u \partial v} = 0$$

si deve studiare a parte ⁽¹⁾. Se $(\log f'_u)''_{uv}$ è p. es. differente da zero, cioè se $f''_{uu} f''_{vv} - f'_u f'''_{uv} \neq 0$, dall'ultima delle (5) e dall'equazione che se ne trae, derivando rispetto ad u , si deduce facilmente:

$$V = U + \frac{(f'_v f''_{uu} - 3 f'_u f''_{vv}) U' - f'_u f'_v U''}{2(f''_{uu} f''_{vv} - f'_u f'''_{uv})}$$

che, sostituito nell'ultima delle (5), dà un'equazione lineare omogenea del primo ordine per la U' . Dunque le U, V dipendono al massimo da due costanti arbitrarie, e vi saranno al più ∞^2 superficie proiettivamente applicabili. Lo studio completo, che deve tener conto delle condizioni enunciate più sopra per la f' , è lungo, ma non offre più difficoltà fondamentali.

E, senza ulteriore sviluppo di calcoli, noi siamo già in grado di trovare le eventuali superficie applicabili su una superficie data di questo secondo tipo.

(1) Questo studio si può evitare nel modo seguente. Nel caso qui escluso sia $\beta = f_u$ che $\gamma = f_v$ sono prodotti di una funzione della u per una funzione della v . Potremo cambiare i parametri u, v in guisa che l'una o l'altra delle β, γ valga 1; e siamo così ricondotti al I° caso.

Matematica. — *Sulla varietà degli spazi tangenti a una data varietà*. Nota I di ALESSANDRO TERRACINI, presentata dal Socio C. SEGRE ⁽¹⁾.

In varie ricerche di geometria proiettiva differenziale, insieme con una varietà di k dimensioni, V_k , fu introdotta la varietà W formata dai suoi S_k tangenti ⁽²⁾. Così, fu considerato il problema dell'abbassamento di dimensione che può presentare la varietà W , rispetto al valore $2k$ che le compete in generale (per varietà immerse in spazi sufficientemente elevati), problema che fu completamente risolto per le varietà a non più di quattro dimensioni ⁽³⁾. Una nuova questione relativa a certe altre particolarità che può, per particolari V_k , presentare la varietà W , viene studiata in questo lavoro.

1. Supporremo che la varietà V_k sia immersa in uno S_r con $r > 2k$ ⁽⁴⁾, e che la varietà W abbia dimensione $2k$ (cosicchè escludiamo dalle nostre considerazioni quelle particolari V_k a cui abbiamo or ora accennato). Allora, si riconosce senza difficoltà che, per una V_k generica, la W_{2k} è toccata da uno stesso S_{2k} nei punti di ogni retta tangente alla V_k ⁽⁵⁾; gli S_{2k} tangenti alla W_{2k} nei singoli punti di un suo S_k generatore (vale a dire nei singoli punti di uno S_k tangente a V_k) sono dunque ∞^{k-1} , o meno, anzichè ∞^k ; anzi, in generale, sono proprio ∞^{k-1} . D'altra parte, quegli S_{2k} tangenti nei singoli punti di uno S_k tangente di V_k coincidono addirittura tutti quanti

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1920.

(2) Per la prima volta, se non erro, con qualche diffusione, nei lavori del prof. Segre:

a) *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLII (1907);
b) *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXX (1910).

(3) Nelle mie Note: *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, Nota I (vol. XLIX, 1913); Nota II (vol. LI, 1916); Nota III (vol. LX, 1920); ved. particolarmente la Nota II. — Alcune V_k con varietà W di dimensione $< 2k$ furono considerate anche dal Bompiani, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLIX (1913).

(4) Per $r < 2k$ la varietà W ha dimensione $< 2k$; e per $r = 2k$, se la W non ha dimensione $< 2k$, essa coincide collo spazio ambiente, cosicchè il problema che stiamo per porre perde ogni interesse.

(5) Cfr. Segre, op. cit.: a), n. 24-26; e b), n. 20.

fra loro, quando la V_k rappresenta $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti ⁽¹⁾; e viceversa (sempre quando si escludano, come si è detto, le V_k per cui la W ha dimensione $< 2k$). Infatti, stabilito un sistema di coordinate proiettive omogenee, se x è un punto (di coordinate x_0, x_1, \dots, x_r), funzione di k parametri essenziali $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, che descrive la V_k , e

$$(1) \quad y = x + \sum_i \lambda_i x^{(i)}$$

un punto generico dello S_k tangente in x alla V_k (dove, come nel seguito, sottintendiamo che l'indice i della sommatoria varii da 1 a k , e poniamo $x^{(1)} = \frac{\partial x}{\partial \tau_1}$, ecc.), lo S_{2k} ξ tangente in y alla W_{2k} è determinato dai punti

$$(2) \quad x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \sum_i \lambda_i x^{(i1)}, \sum_i \lambda_i x^{(i2)}, \dots, \sum_i \lambda_i x^{(ik)}.$$

Da ciò emerge senz'altro che, se la V_k rappresenta $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, vale a dire ha, nel punto generico x , uno S_{2k} osculatore, questo S_{2k} contiene i punti (2), e perciò, quali che siano i valori che si attribuiscono alle λ , coincide con ξ ; e, viceversa, che, se i punti (2) stanno in uno stesso S_{2k} , quali che siano i valori delle λ , tale S_{2k} contiene il punto x e tutti i suoi derivati primi e secondi, ed è pertanto osculatore alla V_k in x .

Per $k=2$, non sono possibili altri casi, diversi dai due ora accennati; ma, per $k>2$, si potranno avere delle V_k che si comportino in modo, per così dire, *intermedio*, rispetto a quei due. Si potranno cioè avere delle V_k tali che, entro ogni loro S_k tangente generico, gli spazî, γ , di contatto della W_{2k} coi singoli suoi S_{2k} tangenti abbiano dimensione g con $1 < g < k$. Appunto la ricerca di tali particolari V_k viene iniziata in questo lavoro per i primi valori di k .

2. Se il punto (1) e il punto $x + \sum_i \mu_i x^{(i)}$ sono due punti generici situati entro un medesimo spazio γ , la proprietà che abbiamo supposta per la V_k si traduce in questa, che i punti

$$(3) \quad \sum_i \mu_i x^{(ij)} \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

stanno nello S_{2k} dei punti (2). Scrivendo che ciò avviene, si avranno per x delle equazioni di Laplace, tra le quali non potranno esservene che $m < \frac{k(k-1)}{2}$ linearmente indipendenti (ved. il num. precedente).

(1) Cfr. Segre, op. cit.: b), n. 21.

Per semplificare il linguaggio, introduciamo, in relazione col sistema di equazioni di Laplace rappresentato dalla V_k , il sistema lineare Σ delle quadriche ad esso *associate* ⁽¹⁾: sono le quadriche di uno spazio S_{k-1} , dove si fissi un sistema di coordinate proiettive omogenee $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, rappresentate dalle equazioni che si ottengono annullando le *forme quadratiche associate* a quelle equazioni di Laplace, cioè ricavate da esse trascurando i termini in x e nelle sue derivate prime, e sostituendo le derivate seconde $x^{(ij)}$ coi prodotti $\theta_i \theta_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$). E, finalmente, indichiamo per brevità le $\sum_i \lambda_i \theta_i$, $\sum_i \mu_i \theta_i$, ecc., rispettivamente con λ , μ , ecc.

Allora, se al punto (1) (e a tutti quelli della retta che lo proietta da x) si fa corrispondere nello S_{k-1} $[\theta]$ l'iperpiano $\lambda = 0$, ai punti di uno spazio γ corrisponderanno in $[\theta]$ gli iperpiani per uno spazio σ di dimensione $k - g - 1$; e alla totalità degli spazi γ corrisponderà una totalità Γ, ∞^{k-g} , di σ_{k-g-1} , tale che in un iperpiano generico di $[\theta]$ ne giaccia uno.

Le equazioni di Laplace, di cui prima si è detto, avranno per associate le quadriche di equazione

$$(4) \quad \theta_i \mu + m_i \lambda = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

dove le m_i sono convenienti forme lineari (eventualmente evanescenti) nelle θ . Si chiami, per un momento, Σ_1 il (minimo) sistema lineare cui appartengono le (4) per una λ fissata, e variando la μ (in modo, naturalmente, che $\mu = 0$ passi per lo σ_{k-g-1} di $\lambda = 0$), e Σ' la sezione di Σ_1 con $\lambda = 0$. In Σ_1 , che è contenuto in Σ , non vi è nessuna quadrica passante per $\lambda = 0$ [se no, l'equazione di Laplace, di cui questa sarebbe la quadrica associata, esprimerebbe che i punti (2) non sarebbero linearmente indipendenti, e perciò la varietà W avrebbe, contro l'ipotesi, dimensione $< 2k$]; cosicchè Σ_1 e Σ' hanno notoriamente la medesima dimensione. Ora, le quadriche di Σ' contengono tutte lo σ_{k-g-1} di $\lambda = 0$, e inoltre fa evidentemente parte di Σ' ogni quadrica costituita da uno S_{k-3} generico insieme con uno S_{k-3} qualunque per σ_{k-g-1} : perciò Σ' coincide col sistema lineare, di dimensione

$$(5) \quad \mathcal{A} = \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-g+1)(k-g)}{2} - 1,$$

costituito dalle quadriche di $\lambda = 0$ passanti per σ_{k-g-1} . Tale sarà adunque la dimensione di Σ_1 ; quindi si avrà intanto

$$(6) \quad \frac{k(k-1)}{2} > m \geq \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-g+1)(k-g)}{2}.$$

Di più, per σ_{k-g-1} passa bensì un sistema lineare di quadriche, contenuto in Σ , la cui dimensione è \mathcal{A} (il sistema Σ_1), ma non un sistema più

⁽¹⁾ Cfr. il n. 2 della I fra le mie Note citate.

ampio, perchè, nella ipotesi contraria, entro questo sistema vi sarebbero delle quadriche distinte che produrrebbero su $\lambda = 0$ una medesima sezione; e questo implicherebbe l'appartenenza di $\lambda = 0$ a qualche quadrica di Σ , ciò che abbiamo già visto doversi escludere. Viceversa, si supponga che il sistema Σ sia dotato delle proprietà che abbiamo finora trovate come *necessarie*, e siano $\lambda = 0$ e $\mu = 0$ due S_{k-2} generici secantisi in uno σ_{k-g-1} di Γ . Allora, se la quadrica $\theta_i \mu = 0$ sta in Σ , questo sistema contiene la quadrica (4) dove si supponga m_i evanescente; se no, quella quadrica e il sistema lineare Σ_1 delle quadriche di Σ passanti per σ_{k-g-1} determinano un sistema lineare, avente ancora per base σ_{k-g-1} , la cui dimensione è $A + 1$; e poichè la sezione di questo sistema con $\lambda = 0$ ha invece dimensione A , si trae che in esso sistema vi è una quadrica contenente come parte $\lambda = 0$: quindi si arriva ancora a concludere l'esistenza, entro Σ , di una quadrica avente per equazione la (4).

Possiamo quindi concludere:

Le V_k per le quali, entro ogni loro S_k tangente generico, gli spazi di contatto della varietà W_{2k} coi suoi singoli S_{2k} tangenti hanno dimensione g ($1 < g < k$) sono, tutte e sole, le V_k rappresentanti un sistema di m equazioni di Laplace linearmente indipendenti, con

$$(6) \quad \frac{k(k-1)}{2} > m \geq \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-g+1)(k-g)}{2},$$

tale che, nello spazio S_{k-1} delle quadriche associate, esista un sistema Γ , ∞^{k-g} , di spazi σ_{k-g-1} dotato delle seguenti proprietà:

- 1) *in un iperpiano generico di S_{k-1} giace uno e un solo σ_{k-g-1} di Γ ;*
- 2) *per uno σ_{k-g-1} generico di Γ passa un sistema lineare di quadriche, contenuto entro quello, Σ , delle quadriche associate, di dimensione*

$$(5) \quad A = \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-g+1)(k-g)}{2} - 1;$$

ma non esiste un analogo sistema di spazi σ aventi dimensione $< k - g - 1$; nè esistono quadriche di Σ contenenti un iperpiano arbitrario.

3. La determinazione delle V_k che stiamo indagando si potrà quindi fare risolvendo successivamente questi due problemi:

A) trovare tutti i sistemi di quadriche che soddisfanno alle condizioni ora enunciate;

B) assegnare le soluzioni (o almeno un certo numero di soluzioni linearmente indipendenti) dei sistemi di equazioni di Laplace, le cui quadriche associate costituiscono un sistema di quelli trovati in A).

Per $k = 3$, il solo caso possibile è quello di $g = 2$; per esso, anzi, più in generale, per k qualunque (purchè > 2) e $g = k - 1$, il problema A) si risolve senz'altro e si trova così:

Le V_k ($k > 2$) per le quali, entro ogni loro S_k tangente generico, gli spazi di contatto della varietà W_{2k} coi suoi singoli S_{2k} tangenti hanno dimensione $k-1$, sono, tutte e sole, le V_k rappresentanti un sistema di $\frac{k(k-1)}{2} - 1$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, le cui quadriche associate passano per una retta, senza formare però un sistema entro cui vi siano quadriche contenenti un iperpiano arbitrario ⁽¹⁾.

Matematica. — Sviluppo degli integrali di un'equazione differenziale in serie di integrali definiti. Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO ⁽²⁾.

1. Sia

$$(1) \quad f[y, y', y'', \dots y^{(n)}, x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(m)}(x)] = 0$$

un'equazione differenziale di ordine n , contenente, a guisa di parametro, la funzione $\varphi(x)$ e le sue derivate sino all'ordine m . È chiaro che i valori che un determinato integrale particolare y di essa riceve in un intervallo (a, b) dipendono da tutti i valori assunti in questo da $\varphi(x)$ e dalle sue prime m derivate; in altri termini la linea $[y]$ è una funzione $F([\varphi])$ della linea $[\varphi]$.

Il Volterra ⁽³⁾ ha mostrato come, riuscendo ad integrare una certa equazione differenziale lineare di n^{esimo} ordine, sia possibile calcolare le derivate dei vari ordini di questa funzione $F([\varphi])$, la quale però, in generale, non appartiene alla classe di quelle sviluppabili in serie di Taylor generalizzata, presentando dei punti eccezionali.

Se però $m=0$, cioè se nell'equazione figura solo $\varphi(x)$ e non le sue derivate

$$(2) \quad f[y, y', y'', \dots y^{(n)}, x, \varphi(x)] = 0,$$

questa difficoltà non si presenta più ed $[y]$, almeno in un certo campo,

⁽¹⁾ Per $k=3$, questa limitazione è ovviamente superflua. Ma non sempre: per es., per $k=4$, essa conduce a escludere i sistemi Σ costituiti da ∞^4 quadriche (di S_3) che segano un piano fisso in una stessa coppia di rette (eventualmente coincidenti); e non altri, come si rileva dalla considerazione, che il non essere soddisfatta quella limitazione equivale all'essere indeterminata la jacobiana del sistema lineare ∞^4 di quadriche, duale del sistema apolare a Σ , ciò che può solo avvenire nel caso indicato (cfr. Toeplitz, *Ueber Systeme von Formen deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet*. Breslau, 1905).

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1920.

⁽³⁾ V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913), pag. 30 e seg.

sarà sviluppabile in *serie di potenze* di $[\varphi]$ ⁽¹⁾, cioè sarà una *funzione analitica* di questa linea. In altre parole possono ottenersi degli sviluppi degli integrali della (2) in serie di integrali definiti, validi nell'intorno di un *valore* assegnato della funzione $\varphi(x)$, p. es. $\varphi(x) = 0$.

Nella presente Nota considererò il caso che la (2) sia un'equazione lineare di 2° ordine e si assuma come $\varphi(x)$ il coefficiente della y , caso nel quale gli sviluppi in discorso si presentano sotto una forma molto semplice. Le formule che così stabilirò sono interessanti specialmente pel fatto che, sotto certe condizioni, esse restano valide anche se l'equazione presenti delle singolarità non rientranti nel caso di Fuchs, cioè sia un'equazione ad integrale generale irregolare, come quelle studiate dal Thomè.

2. Sia dunque l'equazione

$$(3) \quad y'' + p(x) y' + \varphi(x) y = 0,$$

dove $p(x)$ è una funzione definita nell'intervallo $(0, a)$ nel quale, per momento, supporremo non presenti alcuna singolarità. Siano $y_1^0(x)$ ed $y_2^0(x)$ due integrali linearmente indipendenti dell'equazione

$$(4) \quad y'' + p(x) y' = 0$$

ottenuta ponendo nella (3) $\varphi(x) = 0$, e sia $W(x)$ il loro Wronskiano. Applicando una formula del Volterra ⁽²⁾ si trova immediatamente che la derivata n^{esima} di $[y]$ rispetto a $[\varphi]$ e ai punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, ($\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$) dell'intervallo $(0, a)$, per $[\varphi] = [0]$, è *nulla* se $x \leq \xi_n$ mentre, se $x > \xi_n$, è data dalla formula

$$(5) \quad \left[\frac{\partial^n [y]}{\partial^n [\varphi] (\xi_1, \dots, \xi_n)} \right]_{[\varphi]=[0]}(x) = \\ = \{c_1 y_1^0(\xi_1) + c_2 y_2^0(\xi_1)\} \prod_{i=1}^n \frac{1}{W(\xi_i)} \begin{vmatrix} y_1^0(\xi_{i+1}) & y_2^0(\xi_{i+1}) \\ y_1^0(\xi_i) & y_2^0(\xi_i) \end{vmatrix}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti dipendenti dai valori iniziali che individuano l'integrale $[y]$ e, per comodità di notazione, si è posto $x = \xi_{n+1}$.

Per la formula di Taylor generalizzata avremo dunque, con facili trasformazioni, *almeno formalmente*

$$(6) \quad y(x) = c_1 + c_2 P(x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^x d\xi_n \int_0^{\xi_n} d\xi_{n-1} \dots \int_0^{\xi_2} \{c_1 + c_2 P(\xi_1)\} d\xi_1 \prod_{i=1}^n \frac{P(\xi_{i+1}) - P(\xi_i)}{P'(\xi_i)} \varphi(\xi_i),$$

(1) Cfr. F. Tricomi, *Le serie di potenze nel campo delle funzioni di linee* (Rend. Accad. Sc. fis. mat. di Napoli, serie 3^a, vol. 26, 1920).

(2) Loc. cit., prima formula della pag. 33.

avendo osservato che due integrali linearmente indipendenti dalla (4) sono evidentemente

$$y_1^0 = 1, \quad y_2^0 = P(x)$$

dove

$$(7) \quad P'(x) = e^{-\int_0^x p(u) du}, \quad P(x) = \int_0^x P'(u) du.$$

3. Mostriamo ora come la soluzione trovata non sia solo formale ma bensì effettiva e rappresenti inoltre, ove le c_1 e c_2 si riguardino costanti arbitrarie, l'integrale generale della (3).

All'uopo osserviamo anzitutto come, indicando con ξ'_i un opportuno punto compreso fra ξ_i e ξ_{i+1} , ($i = 1, 2, \dots, n$), la (6) possa scriversi

$$y(x) = c_1 + c_2 P(x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^x d\xi_n \int_0^{\xi_n} d\xi_{n-1} \dots \int_0^{\xi_2} \{c_1 + c_2 P(\xi_1)\} d\xi_1 \prod_{i=1}^n (\xi_{i+1} - \xi_i) \frac{P'(\xi'_i)}{P'(\xi_i)} \varphi(\xi_i),$$

da cui, indicando con z il *modulo* della linea $[\varphi]$ ed osservando che, come è facile vedere,

$$(x - \xi_n)(\xi_n - \xi_{n-1}) \dots (\xi_2 - \xi_1) \leq (x - \xi_1)^n / n^n < a^n / n^n \leq a^n / n!,$$

si trae

$$(8) \quad |y(x)| < |c_1| + |c_2| |P(x)| + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} \int_0^x d\xi_n \int_0^{\xi_n} d\xi_{n-1} \dots \int_0^{\xi_2} \{|c_1| + |c_2| |P(x)|\} d\xi_1 \prod_{i=1}^n \frac{P'(\xi'_i)}{P'(\xi_i)}.$$

Avendo supposto che $p(x)$ non presenti alcuna singolarità in $(0, a)$, esisterà un numero fisso M tale che sia sempre $|p(x)| < M$ e quindi

$$e^{-Ma} < P'(x) < e^{Ma}, \quad ae^{-Ma} < P(x) < ae^{Ma}.$$

Pertanto, ponendo per brevità $|c_1| + |c_2| ae^{Ma} = C$, dalla (8) potrà ricavarsi

$$|y(x)| < C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} C e^{2nMa} \int_0^x d\xi_n \int_0^{\xi_n} d\xi_{n-1} \dots \int_0^{\xi_2} d\xi_1,$$

da cui, *a fortiori*,

$$|y(x)| < C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} C e^{2nMa} a^n = C e^{a^3 e^{2Ma} z},$$

il che mostra che, se $\varphi(x)$ si conserva sempre limitata, cosa che supporremo sempre, la serie (6) è assolutamente ed uniformemente convergente.

Ricavando dalla (6), con la derivazione termine a termine, i valori di y' ed y'' , è agevole verificare direttamente che quella serie soddisfa effettivamente la (3).

Inoltre dico che se si riguardano c_1 e c_2 come costanti arbitrarie, la (6) è l'integrale generale dell'equazione (3).

Infatti, sia $J([\varphi])(x)$ il determinante funzionale di y ed y' rispetto a c_1 e c_2 . Si vede immediatamente che per $[\varphi] = [0]$ si ha

$$J([0])(x) = P'(x) \neq 0;$$

ma $J([\varphi])$ è manifestamente una funzione continua di $[\varphi]$ ⁽¹⁾, dunque, almeno in un certo intorno di $[\varphi] = [0]$, dovrà essere $J([\varphi])(x) \neq 0$, il che prova l'asserto.

4. Consideriamo ora il caso in cui $p(x)$ presenti nell'intervallo $(0, a)$ un numero finito di punti singolari; anzi, poichè ciò può farsi evidentemente senza diminuzione di generalità, supponiamo che $p(x)$ divenga infinita soltanto nell'estremo di destra dell'intervallo. L'ipotesi restrittiva che introdurremo è che $p(x)$, *al tendere di x ad a , si conservi, da un certo α in poi, sempre positiva*, ma l'ordine del polo o anche l'essere a eventualmente un punto singolare essenziale, è indifferente.

Per semplicità supporremo che sia $\alpha \leq 0$, chè, se così non fosse, spezzerebbero l'intervallo $(0, a)$ nei due $(0, \alpha)$ e (α, a) , nel primo dei quali $p(x)$ sarebbe sempre limitata, mentre l'altro si troverebbe nelle condizioni suaccennate.

Essendo $p(x) > 0$, la prima delle (7) mostra che $P'(x)$ è una funzione sempre *decescente* al crescere di x , sicchè si avrà, da una parte,

$$P'(\xi'_i)/P'(\xi_i) < 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e dall'altra
$$P(x) < \int_0^x P'(0) dx \leq P'(0) a.$$

Pertanto, ponendo per brevità $|c_1| + |c_2| a P'(0) = C'$, dalla (8) potrà trarsi

$$|y(x)| < C' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} C' a^n = C' e^{a^2 x},$$

il che mostra che, anche in queste nuove ipotesi, la serie (6) converge assolutamente ed uniformemente in tutto l'intervallo $(0, a)$, estremo destro incluso.

Se $p(x)$ ha in a un polo di ordine superiore al primo, il risultato trovato sembra a prima vista in contraddizione col teorema fondamentale del Thomè ⁽²⁾ che in questo caso, essendo l'unità l'indice caratteristico della equazione (3), ci dice non potere esistere più di un integrale linearmente indipendente regolare per $x = a$.

Questa difficoltà si toglie però facilmente osservando che, nel caso in esame, si ha manifestamente $P'(a) = 0$, il che, come è facile vedere, implica che pure $J(a)$ deve essere zero, sicchè, per $x = a$, la (6) non rappresenta più l'integrale generale della (3), ma soltanto un suo integrale particolare.

(1) Ved. Tricomi, loc. cit., teorema VI.

(2) Ved. per es. E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2^e éd., tome III (Paris, Gauthier-Villars, 1908), pag. 297.

Fisica. — *Sulle variazioni residue della resistenza elettrica prodotte da processi termici negli acciai al nichel* ⁽¹⁾. Nota I del dott. WASHINGTON DEL REGNO, presentata dal Corrispondente M. CANTONE ⁽²⁾.

Nella presente Nota sono contenuti alcuni risultati preliminari di uno studio sulle variazioni residue della resistenza elettrica degli acciai al nichel portati ad alte temperature cessato il processo termico al quale essi vengono sottoposti. Tale indagine ha come scopo la ricerca di elementi di guida e di orientamento per lo studio delle proprietà elastiche di queste leghe alle alte temperature ed i possibili contributi di natura sperimentale nella questione, oggi tanto discussa, della natura elettrica delle forze di coesione ⁽³⁾.

Il materiale per ora sottoposto ad esperienza è costituito da tre delle leghe *reversibili* (Osmond) corrispondenti alle percentuali 36 % Ni (invar), 44 % e 49 % (platinite). Esso veniva impiegato in fili dello stesso diametro (mm. 0,5) della lunghezza di circa un metro, tesi fra serrafili portati da un telaio collocato nell'interno di un involucro a temperatura costante il più che possibile e ben nota. Questi fili venivano riscaldati a mezzo della corrente fornita da una batteria di accumulatori: per la misura delle resistenti veniva usato un ponte di Wheatstone con un galvanometro sensibilissimo ($s = 10^{-8}$) del tipo Depretz-D'Arsonval e con una resistenza variabile nella diagonale della pila in modo da potersi sempre ottenere nella misura la quarta cifra significativa.

Le esperienze in seguito riportate sono relative alle seguenti condizioni sperimentali:

1) riscaldamento dei fili nell'aria a mezzo della corrente elettrica per la durata di un'ora a temperature inferiori a quelle del calor rosso;

2) raffreddamento rapido nell'aria prodotto con l'interruzione della corrente: il filo una volta interrotto il circuito subisce un raddrizzamento brusco ritornando teso tra i serrafili. Tutte le misure di resistenza erano accompagnate dalla lettura della temperatura ambiente nell'interno della scatola onde potere riportare i valori alla temperatura iniziale del filo: per coefficiente termico della resistenza elettrica furono assunti i valori dati dal Sacerdote ⁽⁴⁾ di 30×10^{-4} per la platinite e 20×10^{-4} per l'invar.

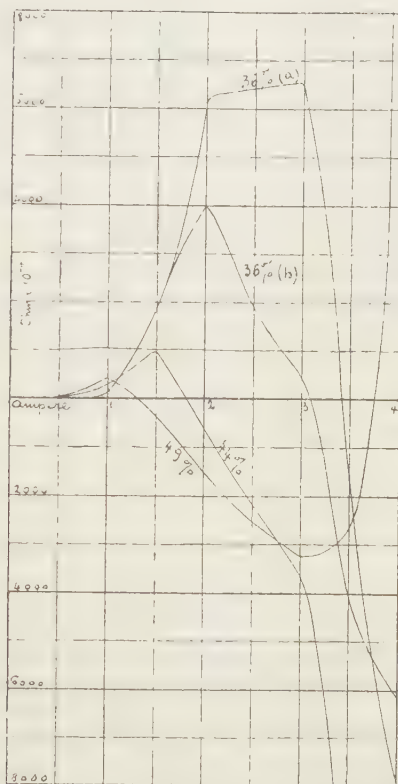
⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 21 agosto 1920.

⁽³⁾ Cantone, « R. Acc. dei Lincei », vol. XXVI, serie 5^a, 2° sem., fasc. 8, ottobre 1917, pag. 167.

⁽⁴⁾ Abraham e Sacerdote, *Recueil de constantes physiques*. Paris, 1913.

Nelle prime esperienze furono sottoposti a ricuocimenti di un'ora, fili dello stesso diametro e provenienti dalla stessa matassa: per ogni filo fu eseguito un solo ricuocimento con intensità di corrente determinata e costante. Giova notare che la costanza della intensità della corrente di riscaldamento è condizione essenziale pel genere di esperienze in esame: essa è necessario sia ottenuta senza variare la resistenza nel circuito, mantenendo



invece costante la differenza di potenziale ai capi del filo ciò che si ottiene agevolmente usando una batteria di accumulatori sempre ben carica. Le variazioni di resistenza risultano allora dovute esclusivamente alla diversa temperatura di ricuocimento ed alla natura del filo: usando fili sempre vergini sono poi esclusi gli effetti susseguenti che non possono mancare nei ricuocimenti successivi sullo stesso filo. Per l'invar (vedi tabella I e II e figura) ⁽¹⁾, la variazione residua nel senso di un aumento della resistenza e che chiamerò positiva, aumenta con l'aumentare della temperatura prima

⁽¹⁾ Le ordinate della figura rappresentano le variazioni residue percentuali, cioè

$$y = \frac{\Delta R}{R_{\text{iniziale}}} \times 100 \quad \text{essendo } \Delta R = R_{\text{finale}} - R_{\text{iniziale}}.$$

TABELLA I.

Invar crudo (36 % Ni).

1 Ampère		1,5 Ampère		2 Ampère		3 Ampère		3,5 Ampère		4 Ampère	
Resistenza iniziale R = ohm 3.2943		Resistenza iniziale R = ohm 3.3254		Resistenza iniziale R = ohm 3.3120		Resistenza iniziale R = ohm 3.3066		Resistenza iniziale R = ohm 3.3255		Resistenza iniziale R = ohm 3.3039	
Tempo di raffreddamento	ΔR ($\times 10^{-4}$)	Tempo di raffreddamento	ΔR ($\times 10^{-4}$)	Tempo di raffreddamento	ΔR ($\times 10^{-4}$)	Tempo di raffreddamento	ΔR ($\times 10^{-4}$)	Tempo di raffreddamento	ΔR ($\times 10^{-4}$)	Tempo di raffreddamento	ΔR ($\times 10^{-4}$)
0.30'	+ 3	0.30'	+ 65	0.30'	+ 207	0.30'	+ 217	0.30'	— 59	0.30'	— 261
1.0	+ 1	1.0	+ 66	1.0	+ 210	1.0	+ 223	1.0	— 55	1.0	— 274
1.30	+ 8	1.30	+ 69	1.30	+ 205	1.30	+ 224	2.0	— 50	1.30	— 273
2.0	+ 4	2.0	+ 69	2.0	+ 207	3.0	+ 223	2.30	— 275
3.30	+ 8	3.0	+ 69	4.0	+ 205	4.0	+ 223	3.30	— 272
4.30	+ 3	3.30	+ 66	5.0	+ 206	5.0	+ 224	4.30	— 272
5.30	— 14	7.0	+ 204	6.0	+ 225	5.30	— 271
6.30	— 4	25.0	+ 202	6.30	— 273
..	70.0	+ 221	7.30	— 272
..	8.30	— 273
..	22.30	— 270
..	49.0	— 276
..	70.0	— 271

TABELLA II.

INTENSITÀ della corrente di riscaldamento (Ampère)	VARIAZIONI RESIDUE PERCENTUALI (ohm)		
	Invar	Platinite 44 o/o	Platinite 49 o/o
1.0	+ 0.009	+ 0.026	+ 0.039
1.5	+ 0.195	+ 0.100	— 0.033
2.0	+ 0.624	— 0.065	— 0.157
3.0	+ 0.656	— 0.363	— 0.334
3.5	— 0.177	—	+ 0.276
4.0	— 0.790	— 3.106	+ 1.870

lentamente, poi più rapidamente fino a diventare negativa dopo un breve intervallo in cui la variazione si mantiene assai piccola. Per la platinite 44 % le variazioni residue sono più piccole ad eccezione dell'ultimo valore che è circa quattro volte quello ottenuto per l'invar.

Per quanto non paragonabili con i risultati precedenti, perchè il ricuo-
cimento influisce sui valori della variazione residua, pure, per l'interesse
che possono presentare, si danno anche i risultati ottenuti per la platinite
49 % Ni ricotta (¹). I valori residui sono in questo caso anche più piccoli
di quelli ottenuti per l'invar e nei limiti delle temperature raggiunte si ha
dopo un massimo per la variazione negativa un ritorno a variazioni residue
positive. Per questa lega si è spinto lo studio fino alle alte temperature,
apprezzate grossolanamente con uno stereo-pirometro, e come dimostra la
tabella III si ha una seconda variazione nell'andamento della curva e nel
senso di una diminuzione della variazione residua ciò che elimina il dub-
bio che l'aumento di resistenza a temperature piuttosto alte sia dovuto alle
variazioni di sezione per l'ossidazione.

TABELLA III.

INTENSITÀ della corrente di ricuoimento (Ampère)	TEMPERATURE	VARIAZIONI residue percentuali
4.5	625°	+ 3.155
5.0	680°	+ 3.298
5.5	785°	+ 2.757
7.0	910°	+ 0.963

Come si rileva poi da tutti i risultati ottenuti, i valori della resistenza
subiscono nel tempo dopo il ricuoimento delle variazioni continue per quanto
piccolissime: anche dopo periodi piuttosto lunghi di riposo si hanno difatti
valori che presentano differenze solo nella quarta cifra decimale come si può
rilevare, ad esempio, per i ricuoimenti alle temperature corrispondenti alle
intensità di 3 e 4 ampère per l'invar malgrado a queste temperature si abbia
una brusca variazione nel comportamento del filo.

Le maggiori variazioni si hanno nella prima mezz'ora da che è cessato
il riscaldamento: queste variazioni, che non sono dovute ad effetto di tem-
peratura, indicano un vero e proprio processo interno che continua lunga-
mente per quanto in proporzioni sempre più ridotte, ciò che conferma il ca-
rattere poco stabile di queste leghe come risulta da tutte le esperienze del
Guillaume.

In quanto al cambiamento di segno della variazione residua, si è indotti
a pensare che la detta variazione corrisponda al passaggio per il punto di
trasformazione che per queste leghe è compreso nell'intervallo 400°-460°
(H. Le Chatelier).

(¹) Per la platinite 49 % Ni non fu possibile eseguire esperienze su fili crudi man-
candone nella provvista esistente in questo laboratorio, e non potendone ottenere per tra-
filatura di fili più grossi ricotti per mancanza di filiere d'agata.

Si può però sin d'ora stabilire che il ricuocimento, non oltre una determinata temperatura e seguito da un brusco raffreddamento, produce un aumento della resistenza elettrica, cioè un effetto di incrudimento o di tempera maggiore per l'invar, minore per la platinite, mentre un ricuocimento a temperatura maggiore produce una diminuzione nella resistenza elettrica, minore per l'invar, molto maggiore per la platinite, con la formazione di uno stato di maggiore plasticità.

Chimica. — *Sul nitrito tallico* ⁽¹⁾. Nota di G. CANNERI, presentata dal Corrispondente G. PELLIZZARI ⁽²⁾.

Nella letteratura dei composti del tallio non si fa cenno della esistenza di sali nitrosi corrispondenti al tallio trivalente, nè di complessi nitrosi talloso-tallici.

Parve di un certo interesse stabilire se il nitrito tallico potesse esistere almeno in soluzione e se fosse capace di dar luogo a complessi col corrispondente sale talloso. Inoltre questa poteva essere una via per portare un contributo allo studio dei complessi nitroso-nitrici del tallio sui quali erano in corso ricerche di altra indole in questo laboratorio.

È noto ⁽³⁾ come i sali tallici si preparino facilmente facendo agire l'acido corrispondente sul sesquiossido Tl_2O_3 . Si poteva pensare che analogamente si dovesse ottenere il nitrito tallico facendo agire sul sesquiossido l'acido nitroso. A questo scopo, sopra una sospensione di Tl_2O_3 nell'acqua, veniva fatta gocciolare l'anidride nitrosa liquida. Il recipiente dove si faceva avvenire la reazione era mantenuto alla temperatura del ghiaccio fondente. Quando tutto il sesquiossido si era disciolto, la soluzione limpida, svaporata a moderato calore, lasciava deporre un sale cristallino bianco che, analizzato, risultava essere costituito da nitrato talloso esente di nitriti. L'analisi veniva fatta pesando il sale in esame e dosando il tallio come ioduro ⁽⁴⁾.

Fu ripetuta l'esperienza nelle condizioni precedenti concentrando però la soluzione a freddo e a pressione ridotta allo scopo di evitare qualsiasi alterazione del composto ottenuto col riscaldamento. Anche in queste condizioni si ottenne un sale bianco che all'analisi risultò nitrato talloso puro.

Si pensò allora di prepararlo per doppia decomposizione partendo dal nitrito di Bario e dal solfato tallico a mezzo della reazione:



(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica inorganica e di Chimica fisica del R. Istituto di Studi Superiori in Firenze, Giugno 1920.

(2) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1920.

(3) Abegg, *Handbuch d. Anorg. Ch.*, III, 1, 435 e seg.

(4) Baubigny, *C. R.*, 113, 544.

Il nitrito di Bario fu preparato col metodo descritto da Witt⁽¹⁾ e il solfato tallico sciogliendo il sesquiossido nell'acido solforico diluito.

Mescolando le due soluzioni fredde nelle proporzioni stechiometriche indicate dall'equazione si ottiene per filtrazione un liquido limpido giallo verdastro che alla temperatura di 0° possiede una debole tensione di acido nitroso. Questo liquido dà con ammoniaca un precipitato color pulce di $Tl_2 O_3$.

Si noti che questa reazione è caratteristica dei sali tallici poichè i sali tallosi danno invece l'idrato talloso solubile in acqua. Elevando la temperatura della soluzione la tensione di acido nitroso cresce fino a raggiungere il valore della pressione atmosferica e dal liquido cominciano a svolgersi infinite bollicine di gas che all'aria si colora in rosso bruno. Dopo un certo tempo cessa lo sviluppo gassoso e la soluzione diventa incolore. Per evaporazione si ottiene nitrato talloso. Analogo comportamento presenta la soluzione per evaporazione a pressione ridotta e a bassa temperatura. Lo sviluppo gassoso cresce col diminuire della pressione e si arriva anche in questo caso al nitrato talloso.

Non era quindi possibile ottenere il nitrito tallico allo stato solido per evaporazione di una soluzione acquosa.

Onde accertare la presenza del composto in soluzione si stabilì a mezzo dell'analisi il rapporto esistente nella medesima tra Tl trivalente e acido nitroso. Tl totale e azoto totale.

A questo scopo dalla soluzione, recentemente preparata, venivano prelevati quattro volumi eguali e su ciascuno rispettivamente si dosavano: il tallio totale come ioduro, il tallio trivalente come sesquiossido⁽²⁾, l'azoto totale col metodo di Devarda⁽³⁾ e l'azoto nitroso col metodo di Gerlinger mescolando cioè la soluzione di nitrito con soluzione satura di cloruro d'ammonio e raccogliendo l'azoto che si sviluppa. I risultati ottenuti sono esposti nella tabella 1.

TABELLA I.

Tl'''	Tl totale	N nitroso	N totale
gr. 0,0928	gr. 0,0932	gr. 0,0182	gr. 0,0191
" 0,1127	" 0,1139	" 0,0229	" 0,0241
" 0,1031	" 0,1038	" 0,0209	" 0,0219
" 0,1218	" 0,1226	" 0,0258	" 0,0254

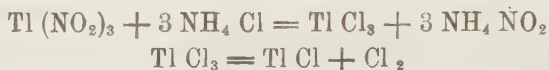
(1) Ber. Dtsch. Ch. Ges. XXXVI, 4367; XXXVII. 382.

(2) Mayer, Zeit. f. Anorg. Ch., XXIV, 364.

(3) Zeit. f. Anal. Ch., XXXIII, 113.

Come si vede, i due valori dell'azoto e del Tallio per ciascuna determinazione concordano notevolmente tra loro se si tien conto per questi che il metodo di Mayer, che consiste nel trattare con ammoniaca a caldo, fornisce risultati più bassi per la solubilità non trascurabile del sesquiossido di Tallio.

Nè può sorgere il dubbio che i risultati dell'analisi eseguita sulla soluzione non dimostrino l'esistenza di un composto poichè se si ammette che l'acido nitroso possa rimanere disciolto senza essere combinato al sesquiossido, questo deve necessariamente separarsi. Ma la prova evidente, che nella soluzione è contenuto un composto tallico, è dovuta al fatto che assieme all'azoto che si raccoglie nella determinazione dell'acido nitroso compare cloro libero. Questo evidentemente proviene dalla decomposizione del cloruro tallico originatosi per doppio scambio tra nitrito tallico e cloruro ammonico secondo le equazioni:



È noto infatti che il cloruro tallico al di sopra di 40° si trasforma nel sale talloso con sviluppo di cloro ⁽¹⁾. L'azoto veniva liberato dal cloro raccogliendo sotto una campanella contenente una soluzione acida per acido cloridrico di ioduro di potassio.

*
* *

Degno di un certo interesse è il comportamento singolare del nitrito tallico rispetto ad altri solventi.

Trattando la soluzione acquosa con alcool si ottiene un precipitato di Tl_2O_3 . Nell'alcool evidentemente il sale subisce la decomposizione; comportandosi come alcuni sali tallici rispetto all'acqua.

Agitando la soluzione acquosa con etere questo estrae la massima parte del sale colorandosi in giallo verdastro, mentre lo strato acquoso diventa incolore. Per evaporazione dell'etere rimane un residuo di colore giallo paglierino, che umettato con acqua, si decompone con formazione di sesquiossido. All'aria tramanda odore pungente per il notevole sviluppo di vapori rosso bruni. La decomposizione è completa dopo un certo tempo ed il residuo, bianco, non dà più l'idrolisi ed all'analisi risulta costituito da nitrato talloso inquinato da piccole quantità di nitrato tallico.

Sebbene il nitrito tallico sia molto più stabile in soluzione eterea e si separi allo stato solido da essa anche perchè il calore di evaporazione dell'etere ne abbassa la velocità di decomposizione, non fu possibile pesarlo per sottoporlo all'analisi diretta.

(1) Mayer, Zeit f. Anorg. Ch., XXIX, 321.

Quanto all'andamento della decomposizione, per il fatto che il sale che resta indietro è il nitrato talloso, si può supporre che avvenga secondo lo schema:



Onde verificare sperimentalmente la nostra ipotesi si è cercato di fare avvenire la decomposizione elevando la temperatura di una soluzione acquosa di nitrito fuori del contatto dell'aria e raccogliendo il gas.

Il dispositivo sperimentale adoperato allo scopo è sostanzialmente quello di Tiemann e Schulze per la determinazione gasvolumetrica dell'acido nitrico. Costituito cioè da un pallone chiuso con un tappo a due fori per ciascuno dei quali passa un tubo di vetro piegato a squadra colla estremità rivolta in basso ed interrotto in un punto da un raccordo di gomma munito di pinza di Mohr. Uno dei tubi pesca nell'acqua, l'altro a sviluppo sotto una campanella capovolta in un bagno di olio di vasellina. Per compiere l'esperienza nel pallone veniva fatta bollire dell'acqua per scacciare tutta l'aria, ed il sistema veniva di poi chiuso a mezzo delle due pinze. Dopo raffreddamento e nell'interno del pallone si era raggiunta una depressione sufficiente si faceva entrare la soluzione contenente il nitrito. Mantenendo poi il sistema ermeticamente chiuso si compieva cautamente il riscaldamento fino a ridurre a zero la depressione nell'interno del pallone. A questo punto innalzando ancora di poco la temperatura si svolgeva dal tubo di efflusso il gas che veniva raccolto.

Le proprietà di questo, e l'analisi confortano l'ipotesi che nella decomposizione del nitrito tallico si origini una sola sostanza gassosa e precisamente l'anidride nitrosa. Infatti, mentre fuori del contatto dell'aria, il gas è leggermente colorato, si colora intensamente in rosso bruno non appena vi si trova in presenza. Un volume, esattamente misurato, viene quantitativamente assorbito da una soluzione acida di permanganato potassico. Bruciato con idrogeno nel capillare di Dreschmid provoca una contrazione di volume che è uguale al triplo del volume del gas adoperato. I risultati analitici sono riportati nella tabella 2.

TABELLA II.

Gas in esame	N in cc.	Contrazione in cc.	Contrazione s
22.4	84.8	65.2	21.7
19.8	87.6	56.2	18.7
16.2	78.9	46.8	15.6

Non fu possibile accertare la comparsa di composti intermedi durante la decomposizione del nitrito a temperatura ordinaria data la notevole velo-

cità della decomposizione. Deve escludersi però la formazione intermedia del nitrito talloso poichè tale composto è abbastanza stabile a temperatura ordinaria (¹).

Si deduce pertanto che esiste il composto nitroso corrispondente al tallio trivalente. È stabile a bassa temperatura in soluzione eterea; meno in soluzione acquosa. Coll'elevarsi della temperatura, si decompone dando origine al nitrato talloso. La trasformazione avviene in modo completo anche a temperatura ordinaria senza che compaiono composti intermedi di riduzione, nè complessi talloso-tallici.

Che la tendenza a formare complessi, comune alla massima parte dei sali tallici, manchi al nitrito, oltre che nei limiti di esistenza troppo ristretti, trova appoggio nel fatto che, nelle condizioni fin ora sperimentate, non si ottiene dal sale nitroso tallico il sale talloso.

Chimica. — *Sopra alcuni sali a struttura p-, o- e m-chinoide* (²). Nota II di R. CIUSA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN (³).

Nella prima Nota (⁴) sullo stesso argomento ho mostrato come dai p-, o- e m- nitro fenilidrazoni sia possibile ottenere i corrispondenti sali alcalini. La stabilità di questi sali, per i quali ho preso in considerazione una costituzione complessa chinoide, diminuisce dai p- derivati ai m- derivati: questi ultimi, data la difficoltà della formazione dell'anello m- chinonico, sono i meno stabili e non furono osservati che in soluzione.

Il p- nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoiformica, ottenuto (analogamente all'o- e m- derivato) per riscaldamento al punto di fusione del p- nitro fenil idrazone dell'acido benzoilgliossilico,



mi fornì, per azione della potassa alcoolica sulla soluzione calda xilolica, magnifici cristalli azzurri a riflessi dorati che considerai a tutta prima come il sale potassico corrispondente: dall'analisi di questo sale e dal suo prodotto di idrolisi risultò invece che si trattava del sale bipotassico di una sostanza $\text{C}_{22}\text{H}_{17}\text{O}_4\text{N}_5$.

$\text{C}_{22}\text{H}_{15}\text{O}_4\text{N}_5\text{K}_2$ Calcolato K: 15,89; Trovato K: 16,06.

(¹) Vogel, Zeit f. Anorg. Ch., XXXV, 406.

(²) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(³) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1920.

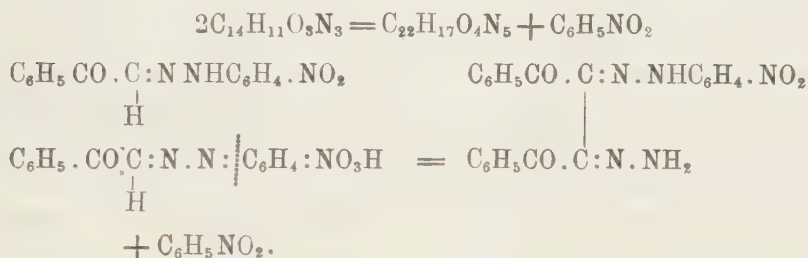
(⁴) Rendiconti R. Accademia Lincei, XVIII, 2° sem., pag. 1. Vedi anche Gazzetta chimica, L 1^a 194.

Il sale potassico sospeso in acqua fu trattato con acido solforico diluito sino a reazione acida, e la sostanza ottenuta cristallizzata dall'alcool sino a punto di fusione costante.

$C_{22}H_{17}O_4N_5$	Calcolato	C: 63,61;	H: 4,09;	N: 16,87
	Trovato	" 63,92	" 4,07	" 16,73
		63,63	" 4,27.	

Questa sostanza fonde a 199° e si presenta sotto forma di tavolette splendenti giallo oro discretamente solubili nei solventi organici ⁽¹⁾.

Il composto su descritto si forma dal p- nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoilformica secondo l'equazione

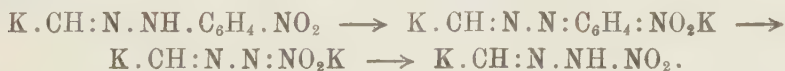


Per ciò che si riferisce alla struttura del corrispondente sale bipotassico, il secondo atomo di potassio potrebbe sostituire l'atomo d'idrogeno di un idrossile formatosi a spese del residuo aminico idrazinico e dell'ossigeno carbonilico.

Anche l'o- nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoilformica fornisce, nelle identiche condizioni di esperienza un magnifico sale potassico sotto forma di tavolette azzurre a riflessi dorati e, con ogni probabilità, ugualmente costituito.

$C_{22}H_{15}O_4N_5K_2$	Calcolato	K: 15,89;	Trovato	K: 15,66.
-------------------------	-----------	-----------	---------	-----------

Come assai elegantemente ha messo in rilievo Angeli, le sostanze $R-C_6H_4-R$, o- e p- sostituiti, hanno spesso un contegno analogo alle sostanze $R-R$, per cui reagiscono come se il nucleo benzolico non ci fosse: ne viene che dai sali alcalini dei p- nitrofenilidrazoni è da aspettarsi un contegno analogo a quello di un derivato della nitroidrazina.



⁽¹⁾ Il p- nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoilformica cristallizza dallo xilolo o da molto alcool, nel quale è poco solubile, sotto forma di squamette giallo-scure fondenti a 200° ; ved. Nota citata, 50, 1° sem., pag. 204.

La formazione della sostanza $C_{22}H_{17}O_4N_5$ può essere spiegata appunto ammettendo che una molecola di p- nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoin-formica si scinda in modo analogo p. es. all'acido nitroidrossilaminico di Angeli



ed il resto ($C_6H_5CO.CH:N.N<$) si unisca ad un'altra molecola di nitrofenilidrazone per dare origine al composto $C_{22}H_{17}O_4N_5$, al quale provvisoriamente può essere assegnata la struttura su data.

Tornerò sull'argomento quando mi sarà procurato maggiori quantità di sostanza: m'è sembrato però del massimo interesse assicurarmi se per idrolisi dei sali alcalini dei p- nitrofenilidrazoni si ottengano o no i p- nitrofenilidrazoni inalterati: a tal fine il sale potassico del p- nitrofenilidrazone della benzaldeide descritto nella Nota precedente, sospeso in acqua, fu scomposto con acido solforico diluito. Si ottiene il p- nitrofenilidrazone della benzaldeide inalterato: cristallizzato infatti sino a punto di fusione costante fonde a 195° e fornisce facilmente i due cromo-isomeri giallo e rosso ⁽²⁾.



Il sale potassico del p- nitrofenilidrazone della dimetilaminobenzaldeide si ottiene sciogliendo l'idrazone in xilolo caldo ed aggiungendo alla soluzione un poco più della quantità calcolata di potassa alcoolica. La soluzione si colora intensamente in violetto e per raffreddamento si separa il sale potassico sotto forma di squamette violette a riflessi metallici, simili allo iodio.



Questo sale potassico è alquanto solubile in acetone, meno in alcool assoluto, poco in xilolo, insolubile in ligroino ed in etere. Per idrolisi fornisce il p nitrofenilidrazone inalterato: la sostanza che si ottiene fonde infatti a 186° e fornisce i due cromoisomeri verde e rosso ⁽³⁾.

(¹) Questo modo di interpretare la reazione fa supporre che dalla nitroidrazina o meglio da un nitroidrazone in ambiente alcalino si possa avere la scissione:



Il resto $R.CH:N.N<$ potrebbe essere paragonato nelle sue trasformazioni al nitrossile, trasformazioni che in questo caso si complicano anche per la presenza del doppio legame.

(²) R. Ciusa e L. Vecchiotti, Rendiconti R. Accademia Lincei, XX, 1^o sem., pag. 805.

(³) L. Vecchiotti, Gazzetta, 43, 2^a, 641.

Tutto ciò porta una conferma alla composizione dei sali alcalini dei nitrofenilidrazoni: non è inverosimile che anche da questi in opportune condizioni d'esperienza si possono ottenere composti analoghi a quelli dei nitro-idrazoni dell'aldeide benzoilformica.

Dal p- nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoica fu ancora preparato il sale sodico: si ottiene sotto forma di una polvere violetta aggiungendo alla soluzione acetonica dell'idrazone la quantità calcolata di soda alcoolica e poi l'ugual volume di ligroina.

$C_{13}H_{10}O_2N_2Na$ Calcolato N_a : 8,75; Trovato N_a : 8,74.

I sali di rubidio, litio e calcio esistono tutti in soluzione: a causa della facilità colla quale si idrolizzano non sono riuscito ad ottenerli puri.

Nella Nota citata ho accennato al fatto che i fenilidrazoni delle tre nitrobenzaldeidi in soluzione acetonica per aggiunta di potassa alcoolica danno origine ad una colorazione verde intensa: ciò porta ad ammettere una salificazione con formazione di un acido chinon-nitronico a spese dell'atomo di idrogeno aldeidico.



Tali sali presentano un certo interesse perchè in essi è contenuto un aggruppamento $>C:C:N.NK_2$ analogo a quello degli *idrazeni*, così chiamati da Staudinger per le loro relazioni coi cheteni.



I sali in questione starebbero agli *idrazeni* come i *chinocheteni* stanno ai cheteni.

I sali alcalini di questi idrazoni non pare che esistano altro che in soluzione, perchè in nessuna maniera sono riuscito ad ottenerli allo stato solido.

Si riesce però ad ottenere un sale mono- e bipotassico del p- nitrofenilidrazone della p- nitrobenzaldeide: questo sale bipotassico presenta un notevole interesse perchè nella sua molecola s'ha un accumulo di doppi legami non certo comune:



La soluzione alcoolica del p- nitrofenilidrazone della p- nitrobenzaldeide per aggiunta di potassa alcoolica assume la solita colorazione violetta: per aggiunta di etere precipita il sale monopotassico sotto forma di una polvere cristallina bruna

$O_2N.C_6H_4.CH:N.N:C_6H_4:NO_2K$ Calcolato K: 12,06; Trovato K: 12,16.

Questo sale potassico si scioglie in alcool ed in acetone con colorazione intensamente violetta.

La soluzione acetonica del p- nitrofenilidrazone della p- nitrobenzaldeide e del suo sale monopotassico si colora intensamente in azzurro per aggiunta di potassa alcoolica: con etere anidro o con ligroina si ha il sale bipotassico sotto forma di una polvere cristallina bruna,

$C_{13}H_8O_4N_4K_2$ Calcolato K: 21,53; Trovato K: 20,84.

È mia intenzione continuare lo studio dei sali alcalini dei nitroidrazoni e delle loro trasformazioni: la presente comunicazione ha anche lo scopo di mostrare quali saranno le direttive delle mie ricerche su questo argomento, per riserbarmene lo studio.

Chimica. — *Sistemi doppio-ternarii con lacuna di miscibilità allo stato liquido ed allo stato solido* ⁽¹⁾. Nota I di C. MAZZETTI, presentata dal Socio E. PATERNO ⁽²⁾.

Jänecke ⁽³⁾ ha studiato diversi tipi di diagrammi di sistemi doppio-ternarii con miscibilità completa liquida e solida e con lacuna di miscibilità allo stato solido.

Per l'interesse che sistemi del genere presentano, anche dal punto di vista pratico ⁽⁴⁾, in quel che segue vengono dedotte le caratteristiche che i diagrammi assumono quando compaiono lacune di miscibilità liquide oltre che solide.

Partiamo dal caso in cui solo un sistema binario corrispondente ad uno dei lati del quadrato ⁽⁵⁾ presenta lacuna di miscibilità liquida e solida con eutettico, mentre le tre altre coppie formano una serie continua di cristalli misti, e sia la superficie ζ_1 al di sotto della ζ_s . Coll'abbassarsi della temperatura, e dopo il primo contatto tra le due superficie (contatto che supponiamo avvenire tra i punti A_1 ed A_s sullo spigolo $\zeta_{(A)}$ del prisma concentrazione-potenziale) la fascia eterogenea assumerà in un certo momento l'aspetto indicato in fig. 1 ⁽⁶⁾.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1920.

⁽³⁾ Z. für Phys. Ch., 82, 1, 1912.

⁽⁴⁾ Parravano e Agostini, Gazzetta Chim. It., XLIX, a, 103 (1919).

⁽⁵⁾ F. A. H., Schreinemakers, *Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre*, III, 2, pag. 262.

⁽⁶⁾ Si ammette che la superficie binodale liquida sia compresa entro la solida, che ambedue persistano nell'intervallo di temperatura in cui fondono tutti i possibili misceglj e che i componenti abbiano un punto di fusione decrescente nell'ordine alfabetico delle lettere con cui sono indicati.

Essa sarà costituita da due falde rigate $p'q'r s'$ ed $u'z't'v'$, che si raccordano per due lati di corrispondenza liquido-solido ai due triangoli di 3 fasi $s's', r'$ ed $l', l' t'$ i quali, generalmente distinti, sono alla lor volta raccordati per l'altro lato liquido-solido da una terza falda rigata $r' l' s', l'$.

Proiettando sul quadrato delle concentrazioni i contorni della fascia eterogenea e delle superficie binodali ad essa esterne si ottiene il diagramma del sistema per la temperatura a cui vale la fig. 1.

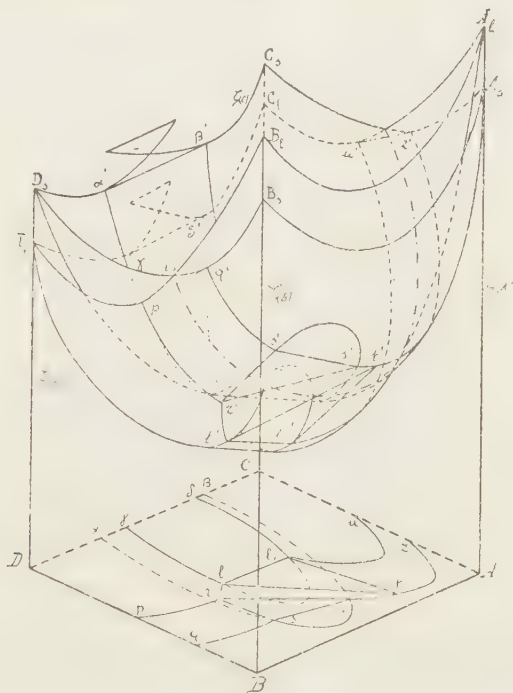


FIG. 1

L'insieme delle proiezioni delle isoterme ad eguali intervalli di temperatura, delle linee e dei punti singolari costituisce il diagramma di stato rappresentato nella fig. 2.

L'andamento delle isoterme ci mostra l'aspetto che prendono nel nostro caso le superficie di fusione e di solidificazione. Esse scendono da A verso D ed in corrispondenza delle zone di lacuna comprendono una parte rigata descritta dai lati di solido e di liquido delle due serie di triangoli di tre fasi; la superficie di liquido, poi, presenta una ripiegatura in corrispondenza dell'univariante di liquido.

Abbiamo detto che i triangoli di tre fasi sono generalmente distinti fra di loro. Può darsi però che essi ad una data temperatura vengano a coincidere per un lato liquido-solido; che cioè sia possibile tirare un unico piano tangente sia alla binodale di liquido sia a quella di solido. In tal caso la

proiezione del quadrilatero che si forma sul piano delle concentrazioni comprende la composizione di quei miscugli che alla temperatura considerata si scindono in due liquidi e due solidi costituendo sistemi invarianti. In corrispondenza del quadrilatero stesso, le linee univarianti di solido e di liquido toccheranno le linee di lacuna e con successivo abbassamento di temperatura cambieranno di posizione rispetto alle linee stesse.

*
* *

Nella fig. 1 si è supposto che il primo contatto fra la linea di solido e la superficie binodale di solido, e fra quella di liquido e la linea di liquido avvenga nel punto limite delle superficie stesse. Se il primo contatto avviene

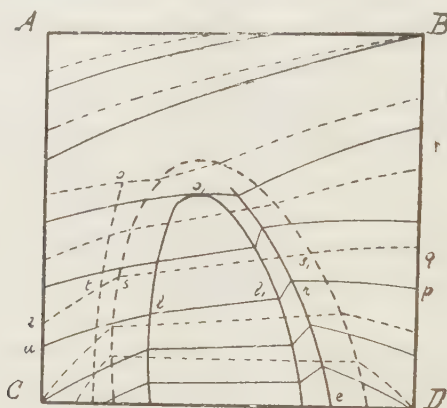


FIG. 2.

invece nella parte rigata di dette superficie, i triangoli di tre fasi che si originano saranno in numero di quattro, e precisamente avremo una coppia di triangoli due solidi — un liquido ed una di due liquidi — un solido. Col diminuire della temperatura i due triangoli costituenti una coppia si allontaneranno fra loro per andare a finire, uno sulla faccia del prisma concentrazione-temperatura corrispondente al binario con lacuna, e l'altro nel punto limite della lacuna stessa. Le linee univarianti di solido e di liquido presenteranno in tal caso un minimo.

*
* *

Se in un sistema doppio ternario sono due i binari che presentano lacune di miscibilità solide e liquide ed eutettico, si potranno presentare diversi casi. O i binari danno origine a due coppie di lacune che non si interessano reciprocamente, ed allora si torna evidentemente al caso di prima; o le lacune solide si fondono in un'unica lacuna, ed allora si ottiene il diagramma della fig. 3, la cui evidenza è manifesta, oppure entrambe le lacune, solida e liquida, si continuano l'una nell'altra.

Può anche qui avvenire che il primo contatto della linea di solido con la binodale di solido avvenga nell'interno del quadrilatero delle concentrazioni. Si verranno ad originare allora due triangoli, due solidi — un liquido che volgendosi fra loro il vertice di liquido si allontaneranno avvicinandosi ai lati *A B* e *C D* del quadrato, e seguiranno lo stesso andamento anche i due triangoli due liquidi — un solido che, dopo i primi, si saranno formati.

*
* *

L'andamento della cristallizzazione nei miscugli dei diversi campi può essere facilmente dedotto nel caso che la solidificazione si compia attraverso

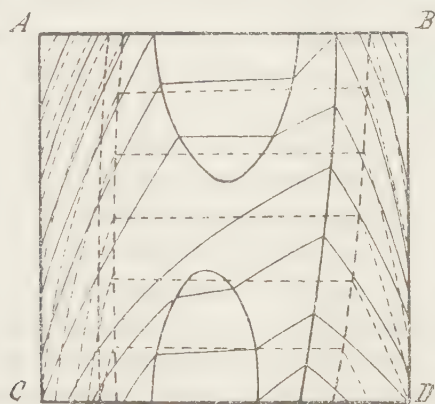


FIG. 3.

a successivi stati di equilibrio. In queste condizioni, nei miscugli solidificati, nessuna traccia rimane della divisione in strati non miscibili allo stato liquido. In pratica però sarà molto difficile trovare realizzate le condizioni a cui corrisponde un andamento ideale nel processo di solidificazione, per modo che è facile la previsione che nei miscugli solidificati si conserverà spesso la divisione esistente allo stato liquido, specie se fra i due liquidi si ha una sufficiente differenza di densità.

Ciò è molto interessante dal punto di vista delle applicazioni pratiche che possono avere alcune reazioni di semplice sostituzione — che rientrano negli schemi generali di cui si discute — come, ad esempio, le reazioni di estrazione di alcuni metalli dai rispettivi solfuri con il metodo detto per precipitazione. La divisione in strati liquidi favorisce infatti moltissimo l'ottenimento del metallo desiderato ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Parravano e Agostini, loc. cit.

Geomorfologia. — *I fenomeni erosivi di modellamento regionale considerati nel loro svolgimento continuato, e non secondo cicli ripetuti.* Nota di G. ROVERETO, presentata dal Socio A. ISSEL ⁽¹⁾.

Fra i principii geomorfologici che in questi ultimi tempi hanno diffuso in Italia osservatori nostri, e una « molteplicità di visitatori sapienti o ignari » ⁽²⁾ ve ne sono parecchi esposti come generali, ma al nostro paese non applicabili, almeno nella loro totalità, onde di già hanno portato ad errori di apprezzamento, o a incompletezza di indagini e di descrizioni. Chi scrive, nella scuola, e nella redazione di un « Trattato di Geomorfologia », al quale lavora da parecchi anni, ha cercato di rimediare a ciò, dando alla geomorfologia delle basi prevalentemente geologiche, e ritornando ad alcune antiche tradizioni scientifiche italiane, delle quali ora si propone una trattazione sunteggiata, con una serie di Note da inserirsi in questi Rendiconti.

In un precedente gruppo di comunicazioni fatte a codesta Accademia, e aventi carattere tettonico ⁽³⁾ — la tettonica sarà sempre il principio di ogni studio morfologico — ho posto viemeglio in chiaro quello già noto: che la nostra regione è in gran parte il risultato di movimenti recenti, ripetuti; che quasi in ogni periodo del terziario, e in più tempi del quaternario, la sua zolla si è a volta a volta, o piegata, o rigonfiata, o spezzata, e ha ingrandito la sua area. Ora è curioso, come molti abbiano ridotto la comprensione delle forme del territorio italiano al creduto riconoscimento di *cicli di erosione*, i quali nel loro significato tipico consistono nel concetto di una graduale distruzione subatmosferica, sostituyente alla montagna uno spianamento, e viceversa. Il continuo e ripetuto risorgere della penisola ha portato a impressioni ben più marcate e generali di quelle dovute alle fra loro incastrate incisioni di correnti, che ripetutamente hanno dovuto cambiare di rapporti col livello di base, e sono state nel contempo allungate o amputate.

Questo pensiero io l'ho sostenuto in amichevoli discussioni col divulgatore del concetto del ciclo, dopo averlo poco prima pubblicato ⁽⁴⁾, e veniva subito compreso dai geologi, ma non dai geografi della comitiva d'istruzione cui appartenevo.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1920.

⁽²⁾ De Stefani C., *Le recenti teorie americane*, Atti Soc. Progresso Scienze, Riunione VII (Siena). Roma, 1914, pag. 24.

⁽³⁾ In specie in vol. XXVI, pp. 407 e 446 (1918).

⁽⁴⁾ Rovereto G., *Una lettera del Davis sul concetto del ciclo erosivo, ecc.*, Atti Soc. Ligustica di Sc. Natur., vol. XVIII, 1907.

Nei tredici anni che sono trascorsi, sono state fatte delle riserve; il De Martonne ha introdotto il concetto degli *epicicli*; io ho ripetuto e ampliato le mie critiche ⁽¹⁾; il Rühl ⁽²⁾, forse non ignorando quello da me scritto, dopo magnificato il metodo del maestro, confessava a mo' di conclusione, che il complesso di tale metodo non aveva ancora potuto servire a una completa descrizione di catene giovani, di piegamento sul tipo alpino; il De Stefani, al luogo ora citato, si chiedeva, se non era il caso di parlare di *cicli di sedimentazione*, anzichè di *erosione*; di quei cicli, io dico, che, le parti più antiche dell'Appennino, come ora è tracciato, hanno visti succedersi con sedimentazione *epirogena*, secondo la recente ⁽³⁾ nomenclatura dell'Arbenz, a cominciare dall'oligocene, e ripetersi completi ad ogni periodo, e che il Dabuisson già aveva intravvisti nel suo trattato del 1819.

Non è il caso di distruggere il metodo del Davis, ma bisogna rifuggire dall'applicarlo al territorio italiano, come ordito principale, perchè risulta inadeguato: occorre essere più semplici, *studiare le modalità di svolgimento dei processi erosivi nella loro naturale continuità*; in questa, solo per eccezione, si troverà esservi alcunchè di ciclico; le varie condizioni sono *tappe di svolgimento*, non sono stadii ciclici.

Si ha, inoltre, che la difettosa nomenclatura adoperata nella considerazione dei fenomeni come ciclici, distrugge l'analisi geologica. Scrissi nel 1908 ⁽⁴⁾, che a vece di parlare di *gioventù*, di *maturità*, di *vecchiaia* nello sviluppo di un ciclo, era meglio considerare la superficie nelle sue forme — poco ora modifico — *iniziali*, *avanzate*, *completate*, oppure *sfiorate*, *intaccate*, *distrutte*, e, in casi particolari, *arretrate* o *sospese*. Sei anni dopo ciò veniva confermato dal De Stefani, che ancor meglio osservava, come una forma giovane per il geologo poteva essere vecchia per il geografo, e viceversa: Sawicki ⁽⁵⁾ chiama vecchie le valli postplioceniche della costa d'Ancona; Davis stesso ⁽⁶⁾, d'ordinario assai più prudente dei suoi seguaci, chiama vecchie le foci dei torrenti liguri, le quali, come sono oggi, si son foggiate nel quaternario superiore.

Quanto può riferirsi nella regione italiana alle influenze di un *epiciclo* sono unicamente i ripetuti affondamenti delle valli, con la conseguente rinnovazione dei profili longitudinali, e dei trasversali nella loro parte bassa;

(1) Rovereto G., *Studi di geomorfologia*, Genova, 1908, pag. 133.

(2) Rühl A., *Eine neue Methode auf dem Gebiete der Geomorphologie*, Forstsch. der naturwiss. Forschung ehrsg. v. E. Abderhalden, vol. VI, 1912.

(3) Arbenz P., *Probleme der Sedimentation*, ecc., Viert. Naturf. Gesell. in Zurich, vol. LXIV, 1919.

(4) Rovereto G., *Studi*, pag. 135.

(5) Sawicki L., *Un viaggio di studio morfologico attraverso l'Italia Settentrionale*, Riv. Geogr. Ital., vol. XVI, 1909.

(6) Davis W. M., *The systematic description of land forms*. Geogr. Journ., vol. XXXIV, 1909.

quindi terrazze, frane, rotture di pendio e simili. Per di più, questi particolari non sono d'ordinario più antichi del quaternario, perchè dipendenti dai movimenti eustatici; onde, i cosiddetti cicli osservati in Italia da Braun ⁽¹⁾, Savicki, Nussbaum ⁽²⁾, Rühl, e Davis stesso, sono solo degli *acceleramenti* nello svolgimento erosivo.

Siamo con ciò ben lungi da quei concetti fioriti quando la scuola geologica americana, con a capo Powell, Gilbert, Dutton, pose in chiaro l'influenza preponderante, nelle loro vecchie regioni, dell'erosione subaerea sul modellamento topografico; riprendendo con ciò un antico concetto di Leonardo, che Vallisnieri e altri nostri precursori, eccettuato Fossombroni, non seppero debitamente raccogliere; e ciò più per errata speculazione, che per la condizione della Penisola.

Il Fossombroni vanta questa priorità, di aver parlato per il primo di un *livello del recipiente*, che è la stessa cosa del *basal-level* sul quale si svolge il ciclo dei fisiografi moderni. E così, la concezione del *profilo di equilibrio*, che è il compimento del ciclo, attribuita in uno dei più recenti trattati di geografia fisica ad un francese, che visse intorno alla metà del secolo XIX, si cominciò fra noi a esaminarla induttivamente da Galileo, e poi dal Grandi e dal Guglielmini, finchè non fu direttamente misurata, seguendo il filo di un torrentello dell'Appennino Piacentino, dal Barattieri, a metà del secolo XVIII.

Le cause che hanno accelerato, o ritardato, lo svolgimento di ogni sorta di agente fisico di modellamento, sono state nel nostro paese assai numerose; ma in parte cicliche furono solo quelle relazionate con i fenomeni climatici del quaternario, benchè le ultime fra queste abbiano distrutto in gran parte gli effetti delle anteriori. Per conoscerne i risultati occorre in prima domandarsi, in quali condizioni di *rilievo e di posizione* la regione era rispetto alla superficie di base, e che stato morfologico di acclività continuità estensione essa presentava: dopo questo, sono da ricercarsi le *condizioni di ambiente*, specialmente le climatiche, e la natura delle *vicende tettoniche* per le quali la regione ebbe a passare; in che consistettero i *mutamenti* nei livelli di base e di sbocco; quanto e come influirono la *omogeneità* oppure la *eterogeneità*, l'assetto e le altre proprietà dei materiali componenti la superficie. Con ciò tutta la somma delle osservazioni accumulate in tanti anni dai nostri valorosi geologi e geografi viene a coordinarsi, senza eccedere, con tutti i concetti i metodi le indagini più recenti.

(1) Braun G., *Beiträge zur Morphologie des nördlichen Apennin*, Zeit. d. Gesell. für Erdk. zu Berlin, nn. 7-8, 1907.

(2) Nussbaum F., *Geomorphol. Studien in nordlichen Apennin*, Geogr. Zeit., vol. XVI, 1910.

Vi sono elementi morfologici fondamentali, come il profilarsi dello spartiacque e delle membrature che dal mare ascendono ad esso, che possono essere apparentemente spiegate con facilità, valendosi di qualche *deus ex machina*, come quello del *peneplain*, che è la finalit  del cielo; ma in realt  il problema   complesso; difficile quasi sempre   distinguere ci  che in tali profili   il risultato di curve epirogeniche, di azioni del mare, di azioni subatmosferiche.

Embriologia vegetale. — *Studio cito-embriologico sul genere "Erigeron"*. Nota del dott. E. CARANO, presentata dal Socio R. PIROTTA ⁽¹⁾.

Lo scorso anno in due brevi Note riferii su un nuovo caso di apogamia in *Erigeron Karwinskianus* var. *mucronatus* ⁽²⁾. Sia per mezzo dello studio citologico, sia per mezzo delle prove sperimentali di castrazione potei dimostrare che questa pianta non ha bisogno dell'impollinazione per abbonire i suoi acheni. Tuttavia osservai che nelle calatidi castrate al momento della liberazione degli acheni maturi, sebbene la grande maggioranza di essi si mostrassero gi  ad una semplice ispezione esteriore ingranditi e turgidi, un discreto numero erano secchi e vuoti: ci  che invece non accadeva nelle calatidi non operate e cresciute in pien'aria, nelle quali tutti o quasi tutti gli acheni erano pieni.

Per allora io non diedi grande importanza a questo fatto; anzi ne attribuii la causa al trauma dell'atto operativo per il quale alcuni degli acheni sarebbero stati meno, altri pi  sensibili. Per  devo aggiungere che gi  l'esame microscopico mi aveva svelato due diversi comportamenti negli ovuli: nel maggior numero di essi la cellula madre delle megaspore, ad imitazione del classico schema di *Antennaria alpina*, senza alcuna riduzione del numero dei cromosomi, generava per tre divisioni successive un gametofito 8-nucleato, diploide, la cui oosfera era capace di germinare direttamente per produrre un embrione apogamo; in pochi ovuli invece la cellula madre ad un certo momento mostrava nel suo interno quattro nuclei in fila, il cui complesso aveva tutto l'aspetto di una tetrade di nuclei megasporiali. Continuando le ricerche, ho potuto stabilire che questa tetrade si produce per una normale divisione riduzionale a cui non segue formazione di membrane. *Erigeron Kar-*

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1920.

(2) Carano E., *Nuovo contributo alla embriologia delle Asteracee*, Atti R. Acc. Lincei, vol. XVIII, 1  sem. 1919, pag. 412. — *L'Erigeron Karwinskianus* var. *mucronatus*   *apogamo*, Ibid., vol. XVIII, 2  sem. 1919, pag. 94.

winskianus var. *mucronatus* è dunque una pianta parzialmente apogama come *Thalictrum purpurascens*, ecc. Dei nuclei megasporiali raramente uno, talora due, più spesso tutti e quattro concorrono a edificare un gametofito femminile aploide, il quale è o 12-nucleato quando dei quattro nuclei i due superiori dividonsi due volte ciascuno e i due inferiori una volta soltanto, oppure del tipo 16-nucleato quando tutti i nuclei si dividono due volte; anzi ho potuto constatare un caso in cui ben dieci fusi nucleari trovavansi contemporaneamente in un sacco embrionale in via di sviluppo, due dei quali al polo micropilare, tutti gli altri al polo antipodo. A divisione compiuta un tale sacco avrebbe avuto venti nuclei, vale a dire il massimo finora constatato nei sacchi embrionali delle Angiosperme.

Benchè i due tipi di sviluppo diploide e aploide di sacco embrionale siano indipendenti, esistono nonpertanto degli indizi, quasi tentativi di passaggio dall'uno all'altro tipo rilevabili da frequenti figure nucleari anomale che ricorrono in alcuni ovuli.

Un'altra constatazione degna d'interesse mi si è offerta in questa pianta, cioè un caso di poliembrionia in un sacco a sviluppo diploide. Questo sacco apparteneva appunto ad un ovulo di una calatide castrata: dei due embrioni in esso presenti l'uno, il più grande, all'estremità micropilare rappresentava senza dubbio l'embrione normale proveniente dalla segmentazione dell'oosfera diploide; l'altro, molto più piccolo, all'estremità opposta, di origine avventizia, doveva provenire con tutta probabilità da una cellula della calaza e, com'è regola generale per tutti gli embrioni estrasaccali, si era spinto secondariamente nel sacco.

Anche *Erigeron glabellus* è una pianta interessante dal punto di vista embriologico. Esso è fornito di un megarchesporio pluricellulare. Ogni cellula madre attraverso le divisioni etero- e omeotipica, di cui la prima soltanto seguita da formazione di membrana divisoria, genera una diade di cellule binucleate. In tal guisa la nocella rimane letteralmente piena ad un certo momento di queste diadi, ciascuna delle quali ha il valore di una tetrade di megaspore. Come rara eccezione però possono rinvenirsi in mezzo a queste diadi delle vere e proprie tetradi o anche delle disposizioni intermedie fra le diadi e le tetradi per il fatto che in seguito alla divisione omeotipica in una cellula si forma una parete e quindi si producono due distinte megaspore, nell'altra no e rimangono due nuclei megasporiali nella stessa massa citoplasmatica. Il caso di *Aster Pattersonii* illustrato dal Palm ⁽¹⁾ deve senza dubbio presentare un comportamento identico a quello della nostra pianta, malgrado che questo autore sostenga che dalla divisione di ciascuna cellula madre si genera regolarmente una tetrade. Il mio convincimento deriva dalla

(1) Palm, Bj., *Studien über Konstruktionstypen und Entwicklungswege des Embryosackes der Angiospermen*, Stockholm, 1915, pag. 131.

ispezione delle figure del Palm corrispondenti esattamente agli stadi da me incontrati.

Ogni cellula di una diade rappresenta un sacco embrionale nello stadio binucleato, alla cui costituzione dunque concorrono, come nel tipo *Scilla*, due nuclei megasporiali. Di tutti questi sacchi, nello stato potenziale, alcuni vanno subito a male, mentre parecchi altri tendono ad accrescersi, gareggiando fra loro per lo spazio, finchè uno o pochi soltanto, prendendo il sopravvento, si sviluppano in direzione del micropilo e raggiungono lo stadio adulto. Gli altri persistono ancora per parecchio tempo nello stadio binucleato alla base dei primi e non è affatto improbabile che esercitino con la loro presenza un'azione sulla struttura della regione antipodale dei medesimi. Infatti i gametofiti femminei adulti talvolta hanno un aspetto normale, risultando di un apparecchio oosferico, di un nucleo secondario e di tre antipodi; altre volte invece, per mancata divisione o per divisione solo parziale del nucleo megasporiale inferiore, mancano delle antipodi che o non si formano o vengono subito schiacciate dai sacchi sottostanti.

In alcuni ovuli, mentre dei sacchi embrionali in accrescimento seguono la direzione normale di sviluppo verso il micropilo, altri, invertendo la polarità, si dirigono verso l'estremità opposta, raggiungendo lo strato epidermico della base dell'ovulo. Simili disposizioni ricordano quelle illustrate dal Lloyd in *Asperula montana* ⁽¹⁾.

Fisiologia. — *Sul modo di agire dell'adrenalina sul cuore* ⁽²⁾.

Nota del prof. LODOVICO BECCARI, presentata dal Socio PIETRO ALBERTONI ⁽³⁾.

Le ricerche, che formano oggetto della presente Nota, fanno parte di un piano di studi già da me iniziato ⁽⁴⁾, che riguarda la funzione dei centri intracardiaci e nel quale viene analizzata l'azione di diverse sostanze e di differenti stimoli sperimentali sui singoli segmenti del cuore (rana, rospo) resi l'uno dall'altro indipendenti mercè la legatura del solco seno-atriale (1^a legatura di Stannius). Rimando ai lavori citati per i particolari della

⁽¹⁾ Lloyd F. E., *The comparative embryology of the Rubiaceae*, Memoirs of the Torrey Bot. Club., vol. VIII, 1902, pag. 37.

⁽²⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Bologna, diretto dal prof. sen. P. Albertoni.

⁽³⁾ Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1920.

⁽⁴⁾ Ved. *Azione del potassio e degli omologhi rubidio e cesio sul cuore* « Archivio di Scienze biologiche », vol. I, n. 1-2, pag. 22, 1919, e *Azione dei cardiocinetici sul centro atrio-ventricolare isolato* (« Memorie della R. Accad. delle scienze ». Bologna, serie 7^a, tom. 5^o, pag. 129, ann. 1919).

tecnica e per le diverse considerazioni generali concernenti la funzione dell'organo così preparato; soltanto devo qui rammentare, che il centro atrio-ventricolare, isolato dal seno mediante quella legatura, viene a trovarsi in una condizione d'indipendenza funzionale, per cui esso si presta in modo specialissimo a rivelare le influenze dirette, che su di esso possono agire, e permette così di risolvere spesso quesiti non altrimenti dilucidabili.

Studiando gli effetti dell'*adrenalina* ho potuto notare alcuni fatti, che servono a chiarire maggiormente il modo di agire di questa sostanza sul cuore, e per tale ragione meritano una descrizione a parte.

Già Oliver e Schäfer ⁽¹⁾ osservarono che l'*adrenalina* è un caratteristico eccitante dell'attività cardiaca. Che tale azione dipenda da influenza diretta sul cuore stesso, venne per primo dimostrato da Gottlieb ⁽²⁾ sul cuore isolato degli omotermini: si ha, in tal caso, un aumento della frequenza delle pulsazioni ed un notevole accrescimento dell'energia di queste; il che fece tosto concludere per una diretta stimolazione dei nervi eccitomotori del cuore stesso. Tale azione dell'*adrenalina* veniva a manifestarsi anche più vivamente quando il cuore era indebolito nella sua energia; così Gottlieb stesso (loc. cit.) potè verificare che deprimendo fortemente il cuore con veleni paralizzanti (sali di potassio, cloroformio, corallio) fino all'arresto dei battiti o a tal segno, che il manometro applicato alla carotide non segnasse che rare pulsazioni, l'iniezione di *adrenalina* ripristinava la circolazione col promuovere un aumento dell'energia e della frequenza dei battiti, permettendo così di salvare l'animale.

Questi risultati generali sono stati ripetutamente confermati tanto negli omotermini che negli eterotermini, anche sul cuore staccato ed irrigato con le comuni soluzioni di Locke e di Ringer.

J. A. Gunn ⁽³⁾ nel cuore di coniglio e di gatto isolato ha confermato l'antagonismo di azione dell'*adrenalina* verso una serie di sostanze, che, come il cloralio e il cloroformio, deprimono l'attività e l'energia del cuore. Evans ed Ogawa ⁽⁴⁾ hanno pure dimostrato sul cuore isolato di mammiferi, che l'*adrenalina* determina un notevole aumento dello scambio gassoso dell'organo funzionante. D'altra parte Krawkow ⁽⁵⁾ ha fatto vedere che l'*adrenalina* aggiunta al liquido circolante nella proporzione di 1 per 1.000.000 accresce la rapidità di esaurimento del cuore di coniglio isolato.

⁽¹⁾ « Journ. of Physiol. », vol. 18, ann. 1895.

⁽²⁾ « Arch. f. exper. Path. u. Pharm. », vol. 38, pag. 99, ann. 1897, e vol. 43, pag. 286, ann. 1899.

⁽³⁾ « Quart. Journ. of Physiol. », vol. 7^o, pag. 75, ann. 1914. Più recentemente Gunn e Martin (« Journ. of Pharm. and exper. Ther. », vol. 7^o, pag. 37, ann. 1917), hanno potuto far cessare l'arresto del cuore di coniglio da cloroformio per mezzo dell'iniezione intrapericardica di *adrenalina* associata al massaggio del cuore.

⁽⁴⁾ « Journ. of Physiol. », vol. 47, pag. 446, ann. 1914.

⁽⁵⁾ « Pflüger's Arch. », vol. 157, pag. 501, ann. 1914.

L'azione stimolante dell'adrenalina è stata pure dimostrata direttamente sul preparato *cardio polmonare* isolato, in cui il cuore, sottratto alle influenze del sistema nervoso centrale, presenta aumento di frequenza e di energia delle contrazioni (Plant) ⁽¹⁾.

Più di recente infine S. Loewe e F. Harries ⁽²⁾, facendo agire direttamente l'adrenalina su strisce di miocardio di omotermini immerse in soluzione di Locke a 39°, ha verificato un manifesto aumento della frequenza e dell'ampiezza delle contrazioni.

Le idee generali intorno all'azione dell'adrenalina sul sistema nervoso simpatico hanno condotto ad ammettere che simili effetti sul cuore sieno dovuti ad eccitazione delle terminazioni dei nervi acceleranti cardiaci. Su tale punto oggi esiste il più generale accordo. Quanto al sistema nervoso autonomo, rappresentato dal vago, devo ricordare che E. v. Cyon ⁽³⁾ aveva attribuito al principio attivo delle surrenali anche un'azione contraria, cioè paralizzante, sulle fibre inibitrici.

Su questo punto regna ancora incertezza. Mentre W. Burridge ⁽⁴⁾ sul cuore isolato della rana avrebbe trovato che l'adrenalina ha in principio un'azione inibitrice, e poi secondariamente un'azione eccitomotrice, più di recente Barbour e Kleiner ⁽⁵⁾ avrebbero constatato con lo stesso preparato fisiologico una diminuzione dell'eccitabilità del vago.

Mancano invece quasi totalmente ricerche dell'azione diretta dell'adrenalina sui gangli intrinseci del cuore stesso.

Le ricerche da me eseguite sul centro atrio-ventricolare isolato col metodo anzidetto mi hanno portato a risultati che credo interessanti. Ne do una succinta relazione.

In seguito alla legatura del seno nella rana, la regione atrio-ventricolare presenta un comportamento, che, pur variando lievemente da animale ad animale, è caratteristico ed assai costante nello stesso soggetto. Mentre il seno seguita a pulsare col ritmo primitivo, la regione *a-v* presenta lunghi periodi di arresto diastolico interrotti da una o più contrazioni atrio-ventricolari: la durata degli intervalli di arresto e il tipo e numero dei gruppi di contrazioni *a-v* sono assai uniformi e vengono a costituire un ritmo proprio della detta regione (automatismo secondario), che permette di svelare agevolmente le influenze eccitanti o deprimenti, che possono farsi sentire sul centro nervoso relativo. Tali manifestazioni possono utilmente essere fissate in tracciati ottenuti col metodo della sospensione.

(1) « Journ. of Pharm. und exper. Ther. », vol. 5°, pag. 603, ann. 1915.

(2) « Zeitsch. f. d. ges. exper. Med. », vol. 6°, pag. 289 e pag. 301, ann. 1919.

(3) Cfr. *Le ghiandole sanguigne*, trad. di P. Albertoni, Bologna, pag. 319 seg., 1913.

(4) « Journ. of Physiol. », vol. 48, pag. 39, dei « Proc. Physiol. Soc. », 1915.

(5) « Journ. of Pharm. and exper. Ther. », vol. 7°, pag. 541, ann. 1917.

Istillando su di un cuore così preparato una soluzione di pura adrenalina all'1 p. 1000 ⁽¹⁾, non si avvertono effetti immediati. Per 1 o 2 gocce di tale soluzione l'aspetto del tracciato non si modifica affatto. Nè meno le contrazioni del seno si modificano per numero e per ampiezza.

Per constatare qualche modificazione apprezzabile bisogna ricorrere a dosi più alte, cioè almeno 5 gocce, spesso 10 o 15 e talora 20 gocce, corrispondenti ad 1 mgr. di sostanza, che, per la potente azione di questa, rappresentano una dose elevatissima. Ma anche in tal caso l'effetto è spesso minimo, tardivo e fugace. Sovente ho potuto vedere, che nello stesso cuore l'effetto della sostanza non è costantemente lo stesso; per lo più sul preparato recente l'effetto è minore che sul cuore che ha seguitato a funzionare (in condizioni adatte di ambiente) per un notevole numero di ore (fino a 20 e più).

Nei casi favorevoli si può osservare, che dopo un certo tempo dall'istillazione dell'adrenalina sul cuore (corrispondente ad 1 o 2 periodi di arresto, cioè a 2-4 minuti primi), ogni gruppo di contrazioni atrio-ventricolari si fa progressivamente più numeroso fino a raggiungere in breve un massimo, dopo il quale ben presto ritorna alla norma; al contrario gli intervalli, costituiti dai periodi di arresto diastolico della regione atrio-ventricolare, si mantengono pressochè identici o di poco modificati; le contrazioni del seno, quando sono bene manifeste, non subiscono alterazione degna di nota.

Per dare un'idea del fenomeno riporto i dati numerici relativi ad una esperienza: rana di gr. 35, con midollo spinale distrutto; cuore sospeso; dopo un'ora dalla legatura del seno si osserva il ritmo atrio-ventricolare seguente: gruppi di 1-2 contrazioni *a-v* con intervalli della durata di 140"-170"; dopo istillazione di 5 gocce della soluzione di adrenalina si hanno ancora due periodi normali, indi un gruppo di 3 contrazioni *a-v*, intervallo di 170", un gruppo di 8 contrazioni *a-v*, indi gli intervalli si fanno un po' più brevi (120"), ma i gruppi divengono di una sola contrazione. Dopo 18 ore, sullo stesso preparato in ottime condizioni funzionali, si ripete la prova: i periodi normali sono costituiti da gruppi di 4-5 contrazioni *a-v* con intervalli di 140"-150"; si istillano sul cuore 10 gocce della soluzione di adrenalina; dopo un periodo tuttora normale si ha la seguente successione: 1° gruppo di 8 contrazioni, intervallo di 150"; 2° gruppo di 20 contrazioni, intervallo di 190"; 3° gruppo di 11 contrazioni, intervallo di 180"; 4° gruppo di 9 contrazioni, e successivamente di 5, 7, 6, 5, 4 contrazioni come nel periodo normale precedente.

Giova pure notare, che ripetendo l'istillazione di adrenalina, o non si ha effetto, o questo è meno intenso e richiede sovente una dose maggiore della precedente.

Se adunque non manca un'azione diretta dell'adrenalina sulla regione

(1) Ho adoperato soluzione di cloridrato di adrenalina della casa Clin.

atrio-ventricolare isolata, essa è ben lungi dal somigliare a quella di altre sostanze eccitomotrici del cuore.

Un'indagine più diligente di tale fenomeno mi ha permesso di riconoscere, che se contemporaneamente all'adrenalina si fa agire sul cuore un'altra sostanza ad azione sicuramente stimolatrice, anche in dose minima, allora si rivela spiccata e costante l'influenza dell'adrenalina stessa.

Ho già dimostrato in un mio precedente lavoro, che i cardiocinetici (sostanze digitaliche, canfora, caffeina) esercitano una manifesta azione stimolante sul centro atrio-ventricolare isolato, provocando un aumento sia della frequenza dei gruppi sia del numero delle contrazioni *a-v* dei singoli gruppi, fino a determinare un vero e proprio ritmo continuato di questa regione del cuore resa autonoma. Se si impiegano dosi molto piccole dei singoli cardiocinetici si possono ottenere effetti appena apprezzabili ed anche fugaci; in queste condizioni se si fa agire l'adrenalina sul cuore nelle stesse dosi sopra indicate si osserva un fatto molto caratteristico: l'azione eccitomotrice diviene allora molto più spiccata sia per intensità sia per durata; ed è facile convincersi, che il risultato ottenuto è di molto superiore a quello che sarebbe da aspettarsi dalla semplice e diretta addizione dei singoli effetti delle due sostanze applicate al cuore.

Tanto con piccole dosi di canfora quanto con minime quantità di cocaina o di digitalina ho ottenuto risultati costanti e molto dimostrativi. Così, ad esempio, per l'azione combinata della digitalina e dell'adrenalina si osserva quanto segue. Applicando 1-2 gocce di digitalina Merck al 0,5 p. 100 sul seno del cuore sospeso e preparato con la legatura anzidetta si ottiene dopo pochi minuti un discreto accrescimento del ritmo atrio-ventricolare, che rimane intermittente e dopo un certo tempo ritorna al tipo normale primitivo.

Se durante l'azione di detta sostanza cardiocinetica si istilla sul cuore una dose conveniente di soluzione di adrenalina, dopo pochi istanti l'attività cardiaca si esalta a segno di assumere un ritmo regolare e continuo, che dura più o meno a lungo.

Questi fatti mi sembrano molto interessanti per l'interpretazione del meccanismo di azione dell'adrenalina sul cuore. Essi richiamano tosto alla mente i fenomeni di *sinergismo* osservati primieramente da Fröhlich e Löwi (¹), fra adrenalina e cocaina, per i quali gli effetti dell'adrenalina sui vasi sanguigni, sulla vescica, sulla pupilla ecc., vengono fortemente accresciuti dalla somministrazione concomitante di una piccolissima dose di cocaina per sé stessa inattiva; in questi casi non si ha una semplice addizione di effetti diretti nello stesso senso, ma si tratta di un'elevazione a potenza di essi. Così è che quantità di cocaina, le quali resterebbero senza effetto apprezza-

(¹) « Arch. f. exper. Path. u. Pharm. », vol. 62, pag. 159, ann. 1910.

bile sull'iride, possono fare sì che l'istillazione successiva di adrenalina provochi una forte midriasi.

Fatti consimili di sinergismo adrenalिनico sono stati notati e descritti in seguito per l'estratto dell'ipofisi (v. Kepinow, 1912), per l'estratto della tiroide (Asher e v. Rodt, 1912), per la stessa digitale (Bürgi, 1914), per il siero di sangue (Mogg, 1915).

In base a queste analogie non mi sembra azzardato il pensare che l'adrenalina agisca sui gangli eccitomotori atrio-ventricolari non tanto come uno stimolo diretto, a guisa dei medicamenti cardiocinetici, quanto piuttosto come un elemento capace di mantenere ed accrescere l'eccitabilità di detti centri verso gli stimoli sia fisiologici sia artificiali, che quivi portano la loro azione.

Tale proprietà si accorderebbe assai bene con la funzione ormonica dell'adrenalina.

Nè mancano i fatti in appoggio di questa idea. Infatti in esperienze analoghe alle precedenti io ho potuto osservare che l'adrenalina è capace di ripristinare l'eccitabilità del centro atrio-ventricolare verso un dato stimolo (caufora) quando essa venga abolita con dosi convenienti d'idrato di cloralio.

Fisiologia. — *Contributo alla conoscenza degli enzimi. IV: Emulsina, citasi, ereptasi ed ureasi nell'orzo germogliato* ⁽¹⁾.
Nota di DARIO MAESTRINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI ⁽²⁾.

L'*emulsina*, scoperta da Roliquet e Boutroux ⁽³⁾ nelle mandorle amare, e ricercata poi da numerosi osservatori sia in animali, sia in vegetali [Bourquelot ⁽⁴⁾, Lutz ⁽⁵⁾, Vintilescu ⁽⁶⁾, ecc.] non fu mai indagata nell'orzo germogliato.

Da ricerche da me fatte in proposito, è risultato che:

1) nell'estratto di orzo germogliato (30 %), fatto con acido acetico, al titolo di g. 0,3 %, è presente un *enzima*, che scinde l'*amigdalina*;

2) quest'enzima è solubile in acqua acidula, perchè è presente sia nella sospensione di farina di orzo, sia nell'estratto filtrato;

3) la temperatura ottima di azione oscilla fra 37° e 40° C.; quella di distruzione fra 50° e 53° C.;

(¹) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. S. Baglioni.

(²) Pervenuta all'Accademia il 21 agosto 1920.

(³) Roliquet et Boutroux, Ann. de chim. et de phys., 1830.

(⁴) Bourquelot et Herissey, C. r. soc. biol., CXXI, pag. 693, 1895.

(⁵) Lutz, Bull. soc. botan. d. France 44, 26, 263, 1897.

(⁶) Vintilescu, J. Pharm. chim. (6), 25, 225, 1907.

4) la soluzione di acido acetico, che fornisce un estratto più attivo, è di g. 0,3 %; la soluzione, che dà un estratto assolutamente inattivo, è di g. 0,9 %.

Citasi. I risultati segnalati dagli autori, che ricercarono la citasi nell'orzo germogliato, non sono concordi.

Il Grüss ⁽¹⁾, che più d'ogni altro se ne occupò, ricorse, per mettere in evidenza questo enzima nell'orzo germogliato, a reazioni istochimiche; ed osservò che *le pareti cellulari dell'endosperma dell'orzo, per opera della diastasi (citasi), non si sciolgono; ma si decolorano in massima parte e si fanno ialine.*

Al principio delle mie esperienze anch'io usai, come il Grüss e gli altri, i soliti metodi di colorazione della cellulosa (carminio boracico, cloroioduro di zinco, ecc.); ma mi accorsi che essi spontaneamente smontavano in ambiente acido ed alcalino e che quindi non potevano essere utilizzati; per indagare le citasi vegetali, che agiscono più specialmente in ambiente acido (né le citasi animali, che prediligono l'ambiente alcalino).

Dopo lunghe indagini elaborai un metodo, basato sull'impregnazione delle membrane cellulari, mediante cloruro d'oro, che descrissi in altra mia Nota ⁽²⁾: con questo nuovo metodo le membrane cellulari di germogli di orzo assumono un bel colore violaceo, che non smonta in ambiente acido, né alcalino. Mediante esso vidi che *né l'estratto filtrato di orzo germogliato, né la sospensione di farina di orzo, sono capaci di scindere il celluloso (carta da filtro, membrane cellulari di germogli di orzo, di dattero, ecc.).*

Ereptasi. Nei semi germoglianti di orzo sono presenti una proteasi, capace di scindere la fibrina di sangue di bue, e discrete quantità di aminoacidi. Si doveva quindi indagare se vi fosse un solo fermento proteolitico, che portasse la scissione della molecola proteica sino agli aminoacidi, oppure esistesse un secondo enzima (ereptasi), il quale fosse più specialmente capace di scindere le sole molecole proteiche più semplici (ad. es. peptoni), e coadiuvasse così l'azione del primo fermento.

Nelle mie esperienze ho usato peptone pp. ed ho *osservato costantemente che gli estratti di orzo germogliato sono incapaci di scindere il peptone di carne.*

Ureasi. Ho anche indagato, se esistesse, nell'orzo germogliato, un fermento, capace di scindere l'urea, ricercato e trovato in altre piante (es. Soja) da Folin and Denis (1916) ⁽³⁾ ed altri.

Le mie ricerche hanno avuto risultato negativo.

Risultati complessivi:

1) l'estratto di orzo germogliato, fatto con acido acetico al titolo di g. 0,3 %, è capace di scindere l'amidalina;

⁽¹⁾ Grüss, *Wochenschr.*, f. Brauerei, 1895, 1257-1259.

⁽²⁾ D. Maestrini, *Boll. Accad. Med. di Roma*, seduta 27 luglio 1920.

⁽³⁾ Folin and Denis, *The Journ. of Biol. chem.*, XXVI, pag. 505, 1916.

2) l'enzima (*emulsina*), che dà all'orzo questa proprietà, è solubile in acqua acidulata, poichè si trova tanto nella sospensione della farina, quanto nell'estratto filtrato;

3) contrariamente a quanto fu asserito da Grüss e da qualche altro, nell'orzo germogliato non è dimostrabile un *enzima, capace di scindere il celluloso* delle membrane cellulari di giovani pianticelle;

4) sono assenti, nell'orzo germogliato, *enzimi peptolitici ed ureolitici*.

Biologia. — *Differenze sessuali nei pesi del corpo e degli organi umani*. Nota III del dott. MARCELLO BOLDRINI, presentata dal Corrisp. D. LO MONACO ⁽¹⁾.

8 ⁽²⁾. - b) *Organi della testa e del collo*. Distinguiamo, qui come in seguito, vari gruppi di età, comprendendo però gli adulti in uno solo, anche se i pesi dell'encefalo ⁽³⁾ e degli altri organi variano in funzione dell'età. L'encefalo femminile, in media, pesa forse di più dell'encefalo maschile alla nascita, ma la differenza non ha valore sessuale (N°. 14); ma una differenza più tipica nello stesso senso si osserva nel periodo compreso fra 1 mese e 5 anni (N°. 15), dopo di che si afferma la superiorità maschile, con forte significato sessuale (N°. 16). All'età adulta, secondo i dati romani (N°. 69), e quelli italiani (N°. 78), il peso dell'encefalo differenzia i sessi meno assai che il peso complessivo; a diversa conclusione condurrebbero i dati tedeschi, ma della loro attendibilità abbiamo dovuto dubitare. Più forte è il significato sessuale dei volumi cranici (N°. 81 e 82), ciò che conferma nell'idea, da noi già altra volta accennata, che le misure del cranio siano un indice dello sviluppo encefalico sfavorevole al sesso femminile ⁽⁴⁾. Anche elevato valore sessuale sembrerebbe doversi attribuire al volume dell'occhio (N°. 68). Più basso è invece il significato sessuale del peso del cervelletto, rispetto a quello dell'encefalo, l'uno e l'altro osservati negli stessi individui (N°. 66-67).

Basso valore sessuale ha, di solito, il peso delle glandole endocrine della testa e del collo (N°. 79, 80, 85, 86), rispetto al peso dell'encefalo, e, tanto più, rispetto al peso di tutto il corpo. Spesso, anzi, tanto basso che, a volte le medie maschili superano le femminili, a volte succede l'opposto.

Merita un cenno particolare la tiroide che dà luogo a una curva nettamente dimodale. Dividendo i pesi in due gruppi, come si suol fare molte

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1920.

⁽²⁾ Atti Acc. Lincei, classe sc. fis., mat. e nat., vol. XXIX, pp. 71 seg., Nota 1; Ibidem, pp. 98 seg., Nota II.

⁽³⁾ L. Manouvrier, Mém. Société d'Anthrop. de Paris, tome III, 1888; K. Pearson, *The chances of Death*, vol. I, London, 1897, pag. 319.

⁽⁴⁾ Archivio per l'antrop. e l'etnol., vol. XLIX, Firenze, 1919 (stamp. nel 1920).

volte in biologia (¹), si ottiene un gruppo di tiroidi normali, che rivelano una superiorità femminile abbastanza tipica, e un gruppo di tiroidi anormali, che rivelano una superiorità maschile anche più tipica. Il che farebbe forse dubitare della comune opinione che l'ipertrofia patologica della tiroide sia un carattere decisamente femminile (²).

9. — c) *Organi del torace*. Il peso dei polmoni (N°. 70, 71), è, fra quello degli organi, il solo che riveli una superiorità maschile forse anche più tipica della superiorità maschile per tutto il peso del corpo. Ciò che s'accorda colla notissima inferiorità media del torace femminile. Per il diametro biacromiale e per la statura di alcuni adulti, troviamo (³), infatti, valori di P_{bh} rispettivamente di 0.088 e 0.097 e valori di P_{hh} rispettivamente di 0.053 e 0.031. Ciò prova che il diametro biacromiale ha un significato sessuale marcatissimo, che s'avvicina a quello della statura.

Il peso del cuore (N°. 72), invece, alle età adulte, presenta una superiorità maschile che attesta uno scarsissimo significato sessuale. Alla nascita, sia nella razza bianca che nella razza negra, il cuore dei maschi pesa, in media, un po' più che quello delle femmine: per un periodo dello sviluppo, avviene l'opposto, verificandosi, così, un fatto analogo a quello osservato per il peso del corpo. Nè alla nascita, nè durante lo sviluppo, si osservano costanti di transvariazione così basse da far annettere un notevole significato sessuale al peso di tale organo. Neppure il peso del timo è sessualmente molto differenziato alla nascita (N°. 83). Lo è di più, invece, nel periodo della sua regressione (N°. 84).

10. — d) *Organi dell'addome*. Il peso della milza, del fegato e dei reni, alla nascita e durante lo sviluppo, si comportano analogamente ai pesi del corpo, dell'encefalo e del cuore. La milza dà luogo alle maggiori divergenze, a causa, forse, della sua grande sensibilità a tutti i processi morbosi. La superiorità media femminile di tali organi, durante lo sviluppo, talora sensibilmente tipica, appare più spesso in due periodi che in uno solo. Alle età adulte, tutti gli organi addominali, pei quali possediamo dati (N°. 73 a 77), hanno pesi il cui significato sessuale è minimo. Degna di nota la circostanza che il peso del rene destro differenzia il sesso più di quello sinistro, analogamente a quanto verificasi pei polmoni. Se il fatto sia accidentale o no è cosa che metterebbe conto di esser meglio chiarita.

11. Raccogliamo, ora, in una visione complessiva le nostre analisi precedenti, e cerchiamo di ricavarne la portata fisiologica.

Il peso del corpo e quello della maggior parte degli organi presentano, durante lo sviluppo, il fenomeno che può chiamarsi della *inversione*

(¹) Vedi ad es. W. Johannsen, *Elemente der exakten Erblichkeitslehre*, Jena, 1913, pp. 267 seg.

(²) H. Ellis, *L'uomo e la donna*, ed. ital., Palermo, s. a., pp. 273 seg.

(³) L. Manouvrier, *Mém. Société Antroph. de Paris*, tome III, 1888.

dell' *sessualità*. Invero, generalmente si parte da una superiorità di pesi medi maschili alla nascita, sia pure scarsamente tipica, e si giunge a una superiorità di pesi medi maschili più tipica alle età adulte: ma ciò non senza attraversare uno o più periodi, durante l'infanzia e l'adolescenza, in cui *il significato sessuale del peso s'inverte*, in cui, cioè, in media, i pesi femminili superano i pesi maschili, con tipicità più o meno elevata. I passaggi avvengono per gradi, con movimenti pendulari, tali da far sembrare che gl'individui dei due sessi gareggino nella rapidità dell'accrescersi. Tali movimenti pendulari cessano solo con lo stabilirsi dell'assetto definitivo, quando, cioè, la netta superiorità media maschile assume un significato sessuale quasi stabile. Come indice di quanto diciamo, va notato il fatto che, nel periodo di 15-23 anni, in cui la superiorità dei pesi medi maschili si è, per lo più, affermata, le costanti di transvariazione hanno, ordinariamente, valori più bassi, cioè indicano una sessualità più spiccata, che non alle età superiori. Si direbbe che, anche nell'ultimo balzo, in cui il sesso maschile si riporta in testa, il sesso femminile riesca di nuovo ad accelerare la propria andatura in modo da raggiungere l'assetto stabile, con minor intervallo di quello che sarebbesi potuto immaginare. Questi movimenti pendulari della sessualità, un po' incerti, un po' indefiniti nelle nostre cifre, che sono talora insufficienti, e comprendono spesso periodi di età troppo lunghi o troppo brevi, meriterebbero certo uno studio ulteriore.

12. Se da queste *variazioni temporali* della sessualità vogliamo discendere alle *variazioni topografiche*, avremo modo di compiere altre interessanti osservazioni. Abbiamo qui di mira le sole età adulte, e ci serviamo prevalentemente delle cifre da noi raccolte a Roma, come le più attendibili, se non le più numerose. Anche qui procediamo per grandi linee. Di regola, minor significato sessuale hanno i pesi degli organi addominali e del cuore; in ordine di sessualità crescente, seguono poi i pesi forse del cervello e di tutto l'encefalo, mentre il primo posto spetta indubbiamente ai polmoni. Il significato sessuale dei pesi delle glandole e degli organi minori è, di solito, scarso, mentre è elevatissimo quello del peso complessivo del corpo. Si può anzi dire che il peso del corpo sia da considerare, fra quanti ne abbiamo osservati, il miglior indice per la diagnosi del sesso. Unica eccezione il polmone destro. Guardiamo, ora, che cosa avviene durante lo sviluppo. Se facciamo = 100 i pesi medi del corpo e degli organi dei neonati, i corrispondenti pesi medi a 25 anni diventano quelli indicati qui sotto ⁽¹⁾:

	Peso compless.		Encefalo		Cuore		Due polmoni		Milza		Fegato		Due reni	
	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀
0 anni	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
25 anni	2200	1827	376	319	1274	1086	1839	1612	1538	1604	1284	1015	1313	1261

(1) H. Vierordt, *Anatomische physiologische und physikalische Daten und Tabellen*, Jena, 1893, pp. 21-22. Per i pesi del corpo, vedi A. Quételet, *Anthropométrie*, Bruxelles, 1871, pag. 346.

Lo sviluppo massimo si ha, dunque, nel peso medio del corpo e dei polmoni, cioè nei pesi che, come abbiamo detto, all'età adulta meglio distinguono il sesso; lo sviluppo minimo si ha nei pesi degli altri organi che, come pure si è visto, distinguono i sessi assai meno. Questo in complesso. Nei particolari la visione si screpola e presenta, ad esempio, un'eccezione cospicua nei riguardi dell'encefalo. Tuttavia, questo eccettuato, la graduatoria degli organi è approssimativamente la stessa, sia rispetto alla crescente intensità di sviluppo nei due sessi, sia rispetto alla crescente sessualità. Tanto che si sarebbe indotti a spiegare le eccezioni con l'inadeguatezza dei pesi ad esprimere sviluppo e sessualità, quando, ben s'intende, non siano dovute all'insufficienza delle osservazioni statistiche. Il fenomeno appare con modalità affatto meccanicistiche: avviene come avverrebbe per due mobili che partono da un punto con velocità differenti verso la stessa direzione e che tanto più si distanziano quanto è maggiore il percorso compiuto. Cosicché siamo condotti a ripetere una proposizione altra volta da noi formulata ⁽¹⁾: le parti del corpo che più si accrescono in funzione dell'età sono anche quelle che più si differenziano in funzione del sesso.

13. Vedemmo altra volta ⁽²⁾ come le dimensioni lunghe e complessive del corpo differenzino, di solito, meglio i sessi che non le brevi e omogenee. Analogamente, abbiamo ora constatato come il peso complessivo quasi sempre sia un carattere sessuale più importante che non i pesi degli organi. I dati non permettono di affermare che, data una sessualità minima nei pesi degli organi e una forte nei pesi del corpo, se ne debba necessariamente presentare una massima nel peso del sistema muscolo scheletrico. Un quesito analogo, anzi, a proposito della statura e dei suoi segmenti, dovemmo già risolvere negativamente ⁽³⁾. Se si pensa, tuttavia, che il peso medio del cranio nei due sessi sta nel rapporto di 1 a 32, quello della mandibola nel rapporto di 1 a 52, mentre il peso del corpo sta solo nel rapporto di 1 a 21; e se è vero, come crederebbe il Theile, che i pesi muscolari maschili sarebbero quasi doppi dei pesi muscolari femminili ⁽⁴⁾, quell'eventualità finisce col diventare assai probabile. E allora, si domanda, se le femmine posseggono, con una certa frequenza rispetto ai maschi, il sistema muscolo-scheletrico relativamente leggero, non è il caso di pensare a una forte differenziazione sessuale nelle funzioni muscolari? E, si domanda pure, se le femmine posseggono i visceri relativamente pesanti (cuore, ghiandole protettive e costruttive, ghiandole digestive, emuntori, centri nervosi), non è forse da pensare a una scarsa differenziazione sessuale delle corrispondenti funzioni? Forse alla prima domanda

(1) M. Boldrini, *Archivio per l'antropologia e l'etnografia*, Firenze, 1918 (stamp. nel 1920).

(2) *Ibidem*, *idem*.

(3) *Ibidem*, *idem*.

(4) H. Vierordt, *op. cit.*, pag. 41 e pag. 62 in nota.

si può rispondere affermativamente basandosi sull'esperienza comune. Invece, non può farsi altrettanto per la seconda, poichè non sappiamo con quanta probabilità ad organi più pesanti corrisponda una maggiore attività funzionale, nè sappiamo che cosa c'è di vero nella più cospicua attività anabolica femminile, in cui taluno crede. Secondo Magnus Levy ⁽¹⁾, il consumo per ogni unità di superficie corporea sarebbe, in media, sensibilmente maggiore nelle femmine che non nei maschi. Secondo i dati del Benedict ⁽²⁾, la produzione assoluta di calore nelle 24^h sarebbe, in media, superiore nei maschi e avrebbe carattere sessuale più spiccato che non il peso del corpo. Abbiamo, infatti, per il peso $P_{kh} = 0,439$ e per il calore $P_{kh} = 0,224$. Il rapporto fra i due valori è di 1 a 960, e denota, per ciò, una forte inferiorità delle femmine nella produzione assoluta di calore. Che, se invece teniamo conto della emissione di calore per kgr. di peso (che corrisponde alla emissione di calore di tutti individui pesanti 1 kgr. ciascuno), le due costanti diventano, rispettivamente, $P_{kh} = 1$ e $P_{kh} = 0,960$, e il loro rapporto si riduce a 1,089, denotando, così, solo una leggera inferiorità delle femmine nella produzione relativa di calore. È inutile ripetere analoghe osservazioni per le superfici, quando esse si ricavano dal peso con la nota formula del Meeh. Sta il fatto che il criterio da adottare è dubbio e gli elementi allegati non bastano per decidere. Il problema qui è, dunque, solo accennato. Bisognerebbe, forse, prendere in esame le funzioni una a una, e confrontare le costanti di transvariazione a cui danno luogo, in ragione del sesso, per giungere a una soluzione che non abbia semplice valore di possibilità.

Biologia. — *Sulla lotta naturale contro le larve di Anopheles per mezzo degli insetti acquatici* ⁽³⁾. Nota I di ENRICO FEDERICI, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽⁴⁾.

I. INTRODUZIONE. — Tra i numerosi metodi di lotta escogitati per limitare il numero e ostacolare la diffusione delle zanzare malarigene, si annovera anche la lotta naturale, che consiste (come è noto) nel favorire l'incremento di quelle cause di distruzione, che già necessariamente esistono in natura rispetto agli Anofeli, come esistono rispetto ad ogni altra specie organica.

Escludendo dal campo delle nostre osservazioni lo stadio alato e limitandoci alle larve e ninfe, gli organismi distruttori di queste ultime appa-

⁽¹⁾ Cit. da L. Luciani, *Fisiologia dell'uomo*, IV ediz., vol. V, Milano, 1913, pag. 26.

⁽²⁾ F. G. Benedict e altri, *Journal biol. Chemie*, vol. XVIII, 1914, pp. 139 segg.; F. G. Benedict et L. E. Emmes, *ibid.*, vol. XX, 1915, pp. 253 segg.

⁽³⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma, durante l'estate del 1919.

⁽⁴⁾ Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1920.

tengono generalmente (se non si tien conto nè degli endoparassiti, nè dei vegetali) ai pesci e agli insetti. Sui primi sono state compiute varie esperienze da diversi autori e con risultati tra loro più o meno discordanti⁽¹⁾; nessuno invece ha considerato finora, per mezzo di ricerche sistematicamente condotte, gli insetti acquatici come naturali distruttori di Anofeli ed eventualmente come mezzo pratico di lotta antimalarica.

Chi voglia determinare a questo riguardo la reale efficacia di tali organismi, deve soprattutto tener conto delle naturali condizioni in cui si svolge la loro vita, rispetto a quelle proprie degli anofeli, poichè è necessario realizzarle, per quanto è possibile, nelle esperienze di laboratorio. È quindi opportuno andar cauti nel valutare i risultati (positivi o negativi rispetto al nostro punto di vista) che in seguito esporremo; inquantochè l'ambiente artificiale che l'osservatore crea nel laboratorio può, rispetto all'ambiente naturale, realizzare delle condizioni eccezionalmente favorevoli o contrarie allo sviluppo di questa o di quella specie, e i risultati ottenuti in tal modo non hanno alcun valore, rivelandosi artificiosi all'esame approfondito delle condizioni in cui l'esperimento si è svolto. Dovremo in seguito riferirci molte volte a questa osservazione, per poter esattamente valutare l'importanza dei risultati che qui sotto esporremo.

La maggior parte degli autori accennano all'azione degli insetti acquatici nella lotta naturale contro le zanzare malarigene in modo affatto generale, indicando cioè come probabili distruttori degli anofeli alcune specie ben conosciute quali voracissimi predatori di animali acquatici (Libellulidi e Ditiscidi allo stadio larvale, svariati Coleotteri e Rincoti adulti). Il Felt⁽²⁾ attribuisce una grande importanza ai pesci carnivori, ma ritiene che anche gli insetti siano un valido aiuto nella distruzione delle larve e ninfe di *Anopheles*; la Mitchell⁽³⁾ definisce più particolarmente l'importanza dei vari insetti carnivori acquicoli e indica in parte le condizioni esterne più favorevoli al loro migliore sviluppo, come del resto vedremo nella revisione sistematica dei singoli gruppi; Tänzer e Osterwald⁽⁴⁾ indicano gli insetti più comunemente noti come voraci carnivori, aggiungendo tuttavia alcune giuste considerazioni sulla loro reale importanza; e così via.

(1) Il dott. Massimo Sella, per mezzo di recentissime ricerche compiute a Fiumicino (e che saranno da lui esposte in una Memoria di prossima pubblicazione) ha dimostrato la scarsa ed anzi nulla importanza dei pesci, considerati quali distruttori di larve anofeliche.

(2) E. P. Felt, *Mosquitos or Culicidae of New York State*. New York State Museum, Bull. 79 (Entom. 22) pag. 256, Albany 1904.

(3) E. G. Mitchell, *Mosquito Life*, London, 1907, pp. 134-135.

(4) E. Tänzer u. H. Osterwald, *Anopheles und Malaria in Halle. Zugleich ein Beitrag zur Morphologie und Biologie der Larve von Anopheles maculipennis Meig.*, Beihefte z. Arch. f. Schiffs- u. Tropenhyg. Bd. 23, Bhf. 2, 1919.

Questa rassegna degli autori che hanno accennato in modo generale all'argomento delle nostre ricerche, si potrebbe facilmente continuare; ma le citazioni già fatte sono sufficienti a mostrare come sia vagamente e imprecisamente conosciuta, almeno finora, la reale importanza degli insetti acquatici, nella lotta naturale contro gli anofeli.

II. MATERIALE DI STUDIO E METODO DI OSSERVAZIONE. — Gli animali che formano oggetto delle presenti ricerche furono raccolti in varie località dei dintorni di Roma e della provincia, e mantenuti in laboratorio in modo da realizzare costantemente le condizioni di esistenza proprie, in natura, delle varie specie prese in considerazione. Il nutrimento fu sempre offerto sotto forma di vari insetti acquatici (e fra questi soprattutto di anofeli), nettamente diversi fra loro per le abitudini biologiche, così da poter constatare qual fosse la specie a preferenza distrutta e perciò vivente in ambiente biologico analogo a quello dell'animale predatore. Per es. nei numerosi esperimenti compiuti con larve di Libellulidi, disponevo vari recipienti, in modo che ognuno contenesse anofeli insieme con larve di Perlidi, di Efemeridi e di Libellulidi (questi ultimi nei primi stadi del loro sviluppo), variando poi in modo opportuno la vegetazione e gli altri fattori, dalla cui risultante complessiva viene ad essere artificialmente costituito l'ambiente biologico. In tal modo si potevano facilmente stabilire le abitudini di vita di una data specie predatrice, dall'osservazione delle caratteristiche biologiche della sua preda.

Analoghi dispositivi furono adottati in altri casi e principalmente negli esperimenti compiuti sulle larve dei Ditiscidi e sui Rincoti acquicoli.

All'inizio di queste ricerche, ritenni che il metodo migliore potesse esser quello di procedere sistematicamente all'esame microscopico del contenuto dell'apparato digerente negli insetti predatori, sia raccolti e direttamente esaminati, sia nutriti artificialmente in laboratorio per un tempo più o meno lungo. Dovetti tuttavia abbandonare il progetto di procedere in tal modo, perchè il materiale ingerito è già fin nella porzione anteriore del tubo digerente minutamente frammentato e profondamente alterato (così da renderne difficile il riconoscimento). E soprattutto perchè molti insetti (Rincoti, larve di Coleotteri, ecc.) presentano il fenomeno della digestione esterna oppure succhiano e introducono nel proprio corpo soltanto i liquidi circolanti della preda; così che gli alimenti, fin dalla loro entrata nel tubo digerente, non hanno più alcuna forma e struttura riconoscibile e quindi tale da poterne diagnosticare la natura.

Gli esperimenti compiuti riguardano soprattutto i gruppi di insetti più largamente rappresentati nella fauna delle nostre acque dolci (Coleotteri, Pseudoneurotteri, Rincoti), e solo in minor parte gli altri: ciò in corrispondenza al nostro scopo, che è quello di determinare la importanza pratica dei vari ordini di insetti nella lotta antimalarica naturale, importanza che non

possono avere *a priori* i gruppi non comprendenti specie molto comuni e molto diffuse.

Nei paragrafi che seguono, sono esposti i risultati ottenuti, divisi secondo i gruppi cui appartengono le specie e i generi presi in considerazione.

Per ovvie ragioni, non si è tenuto conto di alcuni gruppi, come per es. dei Lepidotteri e degli Imenotteri, fra cui si conoscono soltanto pochissime specie che conducono vita acquatica, tutte costantemente vegetariane per primi e endoparassite per secondi.

G. C.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1920.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota IV del Corrispondente GINO FANO ⁽¹⁾.

1. Le superficie del 4° ordine assoggettate alla sola condizione di contenere una curva irriducibile di genere (virtuale) 2 e ordine assegnato $m (\geq 4)$, e perciò tutta una rete di curve consimili, incontrantisi a due a due nelle coppie di una involuzione I, presentano già per i valori più piccoli dell'ordine m due casi essenzialmente diversi.

Per $m = 4$ la superficie ha un punto doppio, e ammette come *unica* trasformazione birazionale la stessa involuzione I (in questo caso segata dalle rette uscenti dal punto doppio), mentre le ∞^2 quartiche di genere 2 sono segate dai piani per questo punto ⁽²⁾. Anche per $m = 5, 7, 9 \dots$ l'involuzione I è l'unica trasformazione birazionale sopra F^4 , nè vi sono sopra F^4 altre reti irriducibili di genere 2: per $m = 5$, la F^4 contiene una cubica sghemba, le C_2^5 sono segate dalle quadriche passanti per questa cubica, e le coppie della I dalle corde della cubica stessa.

Invece per $m = 6$ la F^4 contiene, oltre la data rete di sestiche, una seconda rete analoga, residua della prima rispetto a superficie del 3° ordine,

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1920.

⁽²⁾ Cfr. la precedente mia Nota III (questi Rendiconti, pag. 113); nota a piè di pagina, alla fine del n. 2.

e appartenente a una diversa involuzione; e queste due involuzioni generano sopra F^4 un gruppo infinito, che è il gruppo birazionale totale della superficie ⁽¹⁾. Allo stesso risultato si perviene per ogni valore di m pari e > 6 , come sarà mostrato nella presente Nota ⁽²⁾.

La differenza fra i due tipi di F^4 non è però inerente, come potrebbe sembrare, o almeno non è inerente *soltanto* all'essere m rispett. dispari o pari (fatta eccezione pel valore pari minimo $m = 4$), perchè anche per taluni valori dispari di m (13, 15, 27, 29, ...) si hanno F^4 con ulteriori reti irriducibili di genere 2, e perciò con infinite trasformazioni birazionali.

La determinazione delle reti di genere 2 e perciò di grado (virtuale) 2 esistenti sulla proposta F^4 dipende dalla risoluzione in numeri interi di una equazione di Fermat-Pell $t^2 - Du^2 = 1$, la quale, essendo $D > 0$, ha infinite soluzioni. Ma può avvenire che questi sistemi di genere (virtuale) 2, all'infuori della prima rete di C^m , siano tutti *riducibili* (composti di un sistema di genere e dimensione ≥ 2 , più una sua curva fondamentale, come parte fissa); e ciò avviene precisamente quando la F^4 contiene una curva razionale (per $m = 4$, il punto doppio), la quale, contata eventualmente più volte, costituisce questa parte fissa; vale a dire quando è risolubile in numeri interi l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ (collo stesso D). Questo, se m è pari, avviene solo per $m = 4$. Invece, se m è dispari (≥ 5), nel qual caso $D = m^2 - 8$, l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ ammette certe soluzioni se $D = m^2 - 8$ è numero primo; allora, sopra F^4 , le C^m sono le sole curve irriducibili di genere virtuale 2, e l'involuzione I è l'unica trasformazione birazionale; mentre se $m^2 - 8$ non è numero primo, l'equazione accennata può non avere o anche avere soluzioni ⁽³⁾.

Al caso di m dispari verrà dedicata una prossima Nota. Aggiungo infine che tali considerazioni sono facilmente estendibili alle superficie di ge-

⁽¹⁾ Superficie segnalata da me nel 1906 (Rend. R. Ist. lombardo, serie 2^a, vol. 39, pag. 1071), e il cui gruppo venne determinato in modo completo dal Severi [*Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. 30 (1910), pag. 265].

⁽²⁾ La presente Nota estende ad m pari qualunque, con lievi modificazioni, la trattazione data dal Severi pel caso $m = 6$. Sul caso successivo $m = 8$ ho trovato un cenno, non però la determinazione del gruppo totale, in una Memoria recente di Sharpe e Snyder, venuta a mia conoscenza dopo la compilazione di questo lavoro [*On certain types of involutorial space transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 21 (1920), pag. 52; ved. in part. pag. 60].

⁽³⁾ Legendre, *Théorie des nombres* (Paris, 1830), vol. I, pag. 65, come pure tav. X, nota alla fine del volume. Per m dispari, $m^2 - 8$ è certo del tipo $4n + 1$ (n intero), e non divisibile nè per 3 nè per 5; può essere bensì divisibile per 7, ed è tale per i valori sopracitati $m = 13, 15, 27, 29$. Per questi valori di m , l'equazione

$$t^2 - (m^2 - 8)u^2 = -1$$

non ammette soluzioni intere.

nere uno di spazî superiori ($F^{2\pi-2}$ di S_π , a sezioni di genere π , vincolate del pari a contenere una curva di genere 2).

2. Consideriamo una F^4 condotta nel modo più generale per una curva di genere 2 e di ordine qualsiasi pari $m = 2k$ ($k \geq 3$). Per la F^4 , il dover contenere una tal curva (come una qualsiasi curva che non sia sua intersezione completa con altra superficie) è condizione semplice; essa dipenderà perciò da 33 parametri (18 moduli). Per la C_2^{2k} passerà un sistema lineare di superficie di ordine k , non contenenti la F^4 come parte, di dimensione non inferiore a

$$\left\{ \binom{k+3}{3} - 1 \right\} - \left\{ \binom{k-1}{3} - 1 \right\} - 1 - \{k \cdot 2k - 2 + 1\} = 2.$$

Perciò la C_2^{2k} si potrà certo ottenere come intersezione di F^4 con una F^k , avendo come residua un'altra rete di C_2^{2k} (in generale anche irriducibili). Siccome tali C_2^{2k} dipenderanno, in S_3 , al più da $33 + 2 = 35$ parametri, così, se $4 \cdot 2k > 35$, ossia $k > 4$, le C_2^{2k} contenute in F^4 saranno curve particolari, fra quelle di ordine $2k$ e genere 2 in S_3 .

La prima C_2^{2k} (che indicheremo con γ) e una sezione piana C costituiranno sopra F^4 una base di determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 4 \end{vmatrix} = -4(k^2 - 2);$$

perciò una base certo minima ogni qualvolta $k^2 - 2$ non sia divisibile per alcun numero quadrato perfetto ⁽¹⁾. Noi supporremo qui che la base (γ, C) sia minima, riservandoci di esaminare in seguito l'ipotesi opposta ⁽²⁾.

La determinazione delle reti $|\lambda\gamma + \mu C|$ di genere 2, perciò anche di grado (virtuale) 2, esistenti sopra F^4 dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione:

$$\lambda^2 + 2k \cdot \lambda\mu + 2\mu^2 = 1$$

la quale, mediante la sostituzione

$$\lambda = t - ku \quad \mu = u$$

si muta nell'equazione di Fermat-Pell:

$$(1) \quad t^2 - (k^2 - 2)u^2 = 1.$$

⁽¹⁾ Invero, in tal caso l'unico numero quadrato perfetto e divisore di D sarebbe il 4. Ora il determinante di una qualsiasi base sopra F^4 , essendo simmetrico e avendo come elementi principali numeri pari, deve essere congruo, mod. 4, a zero oppure tre; mentre invece $D:4 = -(k^2 - 2)$ è congruo a due, oppure uno.

⁽²⁾ Cfr. la nota alla fine del lavoro. Si osservi fin d'ora che $k^2 - 2$ non può essere divisibile nè per 3, nè per 4, nè per 5. Può essere divisibile per 7, e anche per 7²; il minimo valore di k pel quale ciò avviene è $k = 10$.

Le reti di genere 2 sono date perciò dalle combinazioni

$$(2) \quad (t - ku)\gamma + uC$$

colla condizione (1), avvertendo inoltre che t deve sempre essere positivo. Infatti l'ordine delle curve (2) è $(t - ku)2k + 4u$, e deve essere positivo; da ciò segue $t > \frac{k^2 - 2}{k}u$; per conseguenza, se $t < 0$, sarà anche $u < 0$, colla condizione $|t| < \frac{k^2 - 2}{k}|u|$, la quale è incompatibile colla (1) ⁽¹⁾.

La più piccola soluzione intera positiva della (1) è data da $t = k^2 - 1$, $u = k$. Questa è infatti una soluzione della (1); e d'altra parte la (1) stessa può scriversi:

$$t^2 = (ku - 1)^2 + 2u(k - u)$$

dove l'ultimo termine, se $0 < u < k$, è positivo. Ora il quadrato inferiore e più pressimo a $(ku - 1)^2$ è $(ku - 2)^2$, che ne differisce per $2ku - 3$, numero certo superiore all'ultimo termine della relazione precedente (almeno se $u > 1$; mentre per $u = 1$ si avrebbe l'assurdo, in numeri interi positivi, $t^2 = k^2 - 1$).

Per $t = 1$, $u = 0$ si ha la rete $|\gamma|$; per $t = k^2 - 1$, $u = k$ si ha la rete $|\delta| = |kC - \gamma|$, residua di $|\gamma|$ rispetto a superficie F^k .

La superficie F^4 non contiene curve razionali. Tali curve essendo di grado virtuale -2 , la loro determinazione dipende infatti dalla risoluzione dell'equazione

$$\lambda^2 + 2k \cdot \lambda\mu + 2\mu^2 = -1 \quad \text{e perciò} \quad t^2 - (k^2 - 2)u^2 = -1.$$

Ora, se quest'ultima equazione ammettesse soluzioni intere, indicando con t^* , u^* la più piccola sua soluzione intera positiva, l'espressione

$$t_n + u_n \sqrt{D} = (t^* + u^* \sqrt{D})^n \quad (D = k^2 - 2)$$

darebbe per t_n , u_n tutte le altre soluzioni intere positive della stessa equazione, se n dispari; e tutte quelle della (1), se n pari. Dovrebbe essere quindi, per $n = 2$,

$$t_2 \equiv k^2 - 1 = t^{*2} + (k^2 - 2)u^{*2};$$

relazione che, nel campo intero positivo, ammette l'unica soluzione $t^* = u^* = 1$, la quale, se $k \geq 3$, non soddisfa però alla

$$t^2 - (k^2 - 2)u^2 = -1.$$

⁽¹⁾ Dalle due relazioni $|t| < \frac{k^2 - 2}{k}|u|$, $|t| > \sqrt{k^2 - 2} \cdot |u|$ seguirebbe infatti $\frac{k^2 - 2}{k} > \sqrt{k^2 - 2}$, e perciò, elevando a quadrato e riducendo, $k^2 - 2 > k^2$; il che è assurdo.

3. Indichiamo con $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ le due involuzioni di coppie di punti sopra F^4 a cui appartengono rispett. le due reti $|\gamma|$ e $|\delta|$. L'involuzione \mathbf{I}_1 opera sui parametri t, u , sui parametri λ, μ , e sopra i sistemi di curve di F^4 nel modo seguente:

$$\begin{cases} t' = t \\ u' = -u \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda' = \lambda + 2k \cdot \mu \\ \mu' = -\mu \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma' = \gamma \\ \mathbf{C}' = 2k \cdot \gamma - \mathbf{C}. \end{cases}$$

La \mathbf{I}_2 lascia invariata la rete $|\delta|$, e muta, per analogia, $|\mathbf{C}|$ in $|2k \cdot \delta - \mathbf{C}|$, dove $|\delta| = |k\mathbf{C} - \gamma|$. Di qui si ricava ch'essa opera sui sistemi di curve di F^4 secondo la sostituzione:

$$\begin{cases} \gamma'' = -(2k^2 - 1)\gamma + 2k(k^2 - 1)\mathbf{C} \\ \mathbf{C}'' = -2k \cdot \gamma + (2k^2 - 1)\mathbf{C} \end{cases}$$

e, per conseguenza, sui parametri t ed u nel modo seguente:

$$(3) \quad \begin{cases} t'' = \{(k^2 - 1)^2 + k^2(k^2 - 2)\}t - 2k(k^2 - 1)(k^2 - 2)u \equiv t_2 t - (k^2 - 2)u_2 u \\ u'' = 2k(k^2 - 1) \cdot t - \{(k^2 - 1)^2 + k^2(k^2 - 2)\}u \equiv u_2 t - t_2 u \end{cases}$$

designando con t_2, u_2 la soluzione intera positiva della (1) immediatamente superiore alla prima ($t_1 = k^2 - 1, u_1 = k$: onde $t_2 = t_1^2 + (k^2 - 2)u_1^2$, $u_2 = 2t_1 u_1$). Indicando poi con t_n, u_n la soluzione positiva della (1) per cui

$$(4) \quad t_n + u_n \sqrt{k^2 - 2} = (t_1 + u_1 \sqrt{k^2 - 2})^n$$

e designando le singole reti di genere 2 sopra F^4 coi simboli (t_n, u_n) , $(t_n, -u_n)$, dove u_n s'intenderà sempre positivo, si vede ancora che l'involuzione \mathbf{I}_1 scambia fra loro le reti (t_n, u_n) e $(t_n, -u_n)$, lasciando invariata la $|\gamma| = (1, 0)$, mentre l'involuzione \mathbf{I}_2 scambia le due reti (t_n, u_n) e $(t_{n-2}, -u_{n-2})$, lasciando invariata la $|\delta|$. Infatti le formole (3), ponendo t_{n-2} e $-u_{n-2}$ in luogo rispett. di t ed u , dànno:

$$\begin{cases} t'' = t_2 t_{n-2} + (k^2 - 2)u_2 u_{n-2} = t_n \\ u'' = u_2 t_{n-2} + t_2 u_{n-2} = u_n; \end{cases}$$

Questi risultati valgono anche per indici negativi, intendendo pure $t_{-n} + u_{-n} \sqrt{k^2 - 2}$ definito dalla (4); eguale perciò al valore reciproco di $t_n + u_n \sqrt{k^2 - 2}$, cioè $t_n - u_n \sqrt{k^2 - 2}$ (vale a dire $t_{-n} = t_n, u_{-n} = -u_n$). In particolare dunque alla rete $|\delta| \equiv (t_1, u_1)$ corrisponde la rete $(t_{-1} = t_1, -u_{-1} = u_1)$, cioè ancora $|\delta|$ stessa.

Le reti di genere 2 esistenti sopra F si potranno dunque distribuire nelle due successioni:

$$\text{I} \quad \gamma \equiv (t_0, u_0), (t_2, u_2), (t_2, -u_2), (t_4, u_4), (t_4, -u_4), \dots \quad (t_{2p}, u_{2p}), (t_{2p}, -u_{2p}), \dots$$

$$\text{II} \quad \delta \equiv (t_1, u_1), (t_1, -u_1), (t_3, u_3), (t_3, -u_3), \dots (t_{2p-1}, u_{2p-1}), (t_{2p-1}, -u_{2p-1}), \dots$$

tali che, entro la prima successione, ogni rete di posto pari sarà scambiata dall'involuzione I_1 colla rete successiva (la prima restando invariata), e dall'involuzione I_2 colla precedente. Analogamente avverrà per la seconda successione, leggendo I_2 al posto di I_1 , e viceversa. Con un conveniente prodotto di involuzioni I_1 e I_2 si potrà perciò trasformare una qualsiasi delle reti considerate in qualunque altra della medesima successione. L'involuzione cui appartiene ad es. la rete (t_{2p}, u_{2p}) risulta dal prodotto $(I_2 I_1)^{2p-1} \cdot I_2$. Reti di egual posto p nelle due successioni si compongono di curve dello stesso ordine, mutuamente residue, sopra F^4 , rispetto a superficie di ordine $u_p - u_{p-1}$.

Da quanto precede, si può già dedurre che le involuzioni I_1 e I_2 generano, coi loro prodotti, il gruppo totale delle trasformazioni birazionali di F^4 . Infatti una qualsiasi trasformazione sopra F^4 , che indicheremo con Γ , muterà la rete $|\gamma|$ anche in una rete di genere 2. Se questa appartiene alla successione I), esisterà un prodotto Π di involuzioni I_1, I_2 che muterà di nuovo quest'ultima rete in $|\gamma|$; il prodotto $\Gamma \cdot \Pi$ lascerà dunque invariata la rete $|\gamma|$; e poichè le reti $|\delta| = (t_1, u_1)$ e $(t_1, -u_1)$, scambiate fra loro da I_1 , sono le sole che segnano sulle curve γ gruppi di $2k^2 - 2$ punti ⁽¹⁾, moltiplicando eventualmente ancora il prodotto $\Gamma \cdot \Pi$ per I_1 avremo un'operazione che lascerà invariate entrambe le reti $|\gamma|$ e $|\delta|$, perciò la loro somma $|kC|$, e perciò ancora $|C|$: dunque una trasformazione proiettiva, che lascerà anzi invariato ogni sistema lineare sopra F^4 . Ed è facile convincersi che una tale trasformazione non può essere che l'identità ⁽²⁾.

Del pari, se la trasformazione Γ muta la rete $|\gamma|$ in una rete della successione II), esisterà un analogo prodotto $\Gamma \cdot \Pi$ trasformante $|\gamma|$ in $|\delta|$; e $|\delta|$ in una rete le cui curve incontrano le δ stesse in $2k^2 - 2$ punti, la quale nuova rete, applicando eventualmente ancora la I_2 , si può ottenere sia $|\gamma|$. Si avrà così un'operazione, la quale, scambiando le reti $|\gamma|$ e $|\delta|$, lascerà invariato il sistema lineare $|kC|$, loro somma, e sarà quindi di nuovo una proiettività; il che è da escludersi, perchè il quadrato di questa proiettività sarebbe l'identità, la proiettività stessa perciò involutoria, e F^4 dipenderebbe da 11 moduli al più.

(1) Ogni rete di genere 2 è infatti del tipo $(t - ku)\gamma + uC$; e le sue curve incontrano le γ in un numero di punti eguale a $(t - ku) \cdot 2 + u \cdot 2k = 2t$. Dovendo tale numero risultare eguale a $2k^2 - 2$, sarà $t = k^2 - 1 = t_1$; $u = \pm u_1$.

(2) Rappresentando F^4 , mediante la I_1 , sul piano doppio con sestica di diramazione, si avrebbe in questo piano un'omografia trasformante in sè la detta sestica; e con considerazioni analoghe a quelle usate dal Severi per il caso di un'omografia involutoria (*Complementi* ecc., n. 12), si può concludere che, se quell'omografia non è identica, la sestica deve dipendere da un numero di moduli inferiore all'attuale (18). Le sestiche piane che ammettono trasformazioni omografiche periodiche si trovano anche enumerate in un lavoro di J. Voitek (*Sitzungsber. d. Kön. Böhmischen Ges. d. Wiss., Math.-Naturw. Klasse*, 1913, XIII).

4 Le trasformazioni birazionali della superficie F^4 si rispecchiano in sostituzioni lineari intere di modulo ± 1 della forma quadratica fondamentale di F^4 (che scriviamo liberata dal fattore numerico 2):

$$f \equiv \lambda^2 + 2k \cdot \lambda\mu + 2\mu^2.$$

Le sostituzioni di modulo $+1$ che mutano in sè la f sono tutte del tipo $\begin{pmatrix} t - ku & -2u \\ u & t + ku \end{pmatrix}$, dove t, u sono soluzioni della (1), e t può suporsi positivo; esse formano un gruppo ciclico, costituito dalle potenze della sostituzione corrispondente alla più piccola soluzione positiva della (1), $t = k^2 - 1$, $u = k$; dunque dalle potenze della sostituzione:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -2k \\ k & 2k^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Le sostituzioni di modulo -1 si ottengono dalle precedenti, moltiplicando per una qualsiasi, determinata ma arbitraria, fra esse; ad es. per la sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è immagine dell'involuzione I_1 ($\lambda' = \lambda + 2k\mu$, $\mu' = -\mu$); questi prodotti sono anche tutti operazioni involutorie.

La I_2 (cfr. n. 3) ha per immagine la sostituzione lineare

$$S' = \begin{pmatrix} -(2k^2 - 1) & -2k \\ 2k(k^2 - 1) & 2k^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Al prodotto $I_1 I_2$ corrisponde perciò la sostituzione

$$\begin{aligned} I_1 I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(2k^2 - 1) & -2k \\ 2k(k^2 - 1) & 2k^2 - 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -(2k^2 - 1) & -4k(k^2 - 1) \\ 2k(k^2 - 1) & (2k^2 - 1)^2 - 2k^2 \end{pmatrix} = T^2. \end{aligned}$$

Vediamo così che il gruppo totale delle trasformazioni birazionali di F^4 , generato dalle involuzioni I_1 e I_2 , si rispecchia (come già noto per $k = 3$) nel gruppo di sostituzioni lineari di f costituito dalle sole potenze pari di T , e dai loro prodotti per la S . Le potenze dispari di T e i loro prodotti per sostituzioni di modulo -1 non sono immagini di trasformazioni birazionali sopra F^4 (1) (2).

(1) Per es. la sostituzione lineare $TS' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ corrisponderebbe a un'omografia involutoria scambiante le 2 reti $|\gamma|$ e $|\delta|$; scambio che, come sappiamo, non è possibile.

(2) Accenniamo ora quali modificazioni subirebbe ciò che abbiamo detto sin qui, nel caso in cui le curve γ e C non costituissero sopra F^4 una base minima (il che po-

trebbe avvenire soltanto quando il numero $k^2 - 2$ ammetta un divisore quadrato perfetto).

La superficie F^4 in parola conterrà pur sempre tutte le reti di genere 2 che abbiamo costruite, e ammetterà tutte le trasformazioni birazionali prodotti di fattori I_1 e I_2 ; soltanto, essendovi sulla superficie anche curve non rappresentabili sotto la forma $\lambda\gamma + \mu C$ (perchè la base γ, C non è minima), vi potrebbero essere anche altre reti di genere 2 e altre trasformazioni birazionali. (Il gruppo ottenuto sulla F^4 sarebbe dunque soltanto parziale, come sarebbe stato ad es. sulla precedente F^4 quello generato, anzichè da I_1 e I_2 , dalle due involuzioni $I_1 I_2 I_1$ e $I_2 I_1 I_2$). In tal caso cambierà, in relazione alla nuova base minima, anche la forma fondamentale della superficie, e diverrà più ampio il gruppo ciclico delle corrispondenti sostituzioni di modulo $+1$; alla T verrà sostituita un'altra operazione generatrice, di cui essa sarà potenza di esponente finito e > 1 ; e per la nuova equazione di Fermat-Pell, che subentrerà alla (1), si avrà una soluzione positiva minima, corrispondente sopra F^4 a una rete di genere 2 di ordine minore delle precedenti.

Ora, se la proposta F^4 è stata condotta per una C_2^m *nel modo più generale*, non sembra ammissibile ch'essa debba contenere, di conseguenza, anche curve di genere 2 e di ordine $< m$. Invero, si consideri un fascio generico di superficie del 4° ordine. In questo fascio vi sarà un numero finito di F^4 contenenti una C_2^m (condizione *semplice* per la F^4), e perciò una rete di tali curve. Il numero di tali F^4 è quello stesso delle C_2^m che si appoggiano alla curva T^{16} , base del fascio, in $4m$ punti, e inoltre soddisfano a due condizioni ulteriori, atte a individuare la C_2^m entro la propria rete; per es. si appoggiano a 2 assegnate trisecanti della T^{16} (che sono unisecanti per le superficie del fascio). Ora questo numero è funzione di m , e certo crescente al crescere di m stesso: perciò, nel fascio considerato, le F^4 contenenti curve C_2^m saranno in numero superiore a quelle contenenti curve di genere 2 e di un qualsiasi ordine assegnato $< m$, e le prime non potranno contenere, come conseguenza necessaria, anche una curva di ordine assegnato $< m$; perciò nemmeno di un ordine qualsiasi $< m$ (perchè, esclusa la prima eventualità, questa seconda potrebbe presentarsi solo se le C_2^m di S_3 più generali contenute in una F^4 formassero più sistemi continui separati; il che nemmeno sembra verosimile). Si è perciò condotti a ritenere che l'eccezione, prevista come possibile pel caso in cui $k^2 - 2$ (essendo $k = m/2$) ammetta un divisore quadrato perfetto, in realtà non si presenti; e perciò la F^4 condotta *nel modo più generale* per una curva di genere 2 e ordine pari $m = 2k$, corrisponda, per ogni valore di $k (\geq 3)$, al tipo studiato nella presente Nota, dipendente da 18 moduli, e dall'intero arbitrario $k \geq 3$.

Meccanica celeste. — Osservazioni sopra le comete secolari.

Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA ⁽¹⁾.

1. — Lo scopo di questa breve Nota è di rettificare un'asserzione, generalmente ripetuta, sopra le comete paraboliche. Si crede infatti che qualora l'orbita di un'eventuale cometa, corretta dalle perturbazioni planetarie, risultasse esattamente parabolica, essa dovrebbe essere considerata di sicura origine stellare. Questo è anzi una specie di *assioma* che gli astronomi premettono ai loro lavori; ma l'assioma è alquanto dubbio poichè, come vedremo, è connesso ad un dato ancora assai incerto.

2. — Cominciamo dunque a considerare una cometa C che si muova a grande distanza dal sole S, in modo però che il sole sia ad essa notevolmente più vicino di ogni altra stella. La cometa dovrà allora essere considerata come un corpo celeste mobile sotto l'attrazione particolare dell'astro più vicino (Sole) e sotto quella, complessivamente calcolata, delle stelle che la circondano ⁽²⁾.

Per calcolare quest'ultima attrazione nel modo più semplice, ricordiamo che la *concentrazione galattica* ⁽³⁾ è piuttosto debole per le stelle visibili ad occhio nudo, cioè per gli astri che in media sono più vicini al sole. Di più, limitandoci sempre alle stelle visibili ad occhio, la Statistica stellare insegna che il rapporto tra il numero degli astri di splendore superiore alla grandezza $n + 1$ e quelli di splendore superiore alla grandezza n , si mantiene presso a poco uguale al suo valore teorico 3,98: quale cioè si avrebbe se la densità stellare fosse costante in tutto lo spazio.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1920.

⁽²⁾ Qualora una cometa, partendo dal sole, si avvicinasse notevolmente ad un astro particolare occorrerebbe tener conto di tre forze e cioè dell'attrazione solare, di quella dell'astro, e di quella complessiva delle stelle vicine: secondo la posizione della cometa nella sua orbita una qualunque di queste forze potrebbe prevalere sulle altre due. Lo scrivente si propone di studiare questo problema nelle Mem. della Soc. astr. italiana. Trascurando l'attrazione complessiva delle stelle vicine, il problema è stato trattato dal ch. prof. Burgatti, il quale ha calcolato la traiettoria cometaria supponendo il sole e l'astro di provenienza fissi nello spazio. Egli ha trovato in tal modo un'elegante applicazione astronomica del problema classico dei due centri, il quale era restato fin qui nel campo puramente teorico. Le conseguenze a cui il Burgatti arriva sono assai interessanti specialmente per ciò che riguarda gli afeli *apparenti* delle orbite cometarie: cfr. Rendiconti Lincei, 1917 e Mem. Acc. scienze di Bologna, 1914-15.

⁽³⁾ Com'è noto, la *concentrazione galattica* viene definita come il rapporto medio tra la densità stellare *apparente* a 5° di latitudine galattica, e quella ad 80°.

Potremo quindi supporre, almeno in prima approssimazione, che l'insieme delle stelle vicine al sole formi un gruppo presso a poco sferico ed omogeneo; ed allora, secondo un noto teorema di meccanica, ognuna di esse sarà sottoposta ad una forza attrattiva diretta verso il centro O del gruppo e proporzionale alla sua distanza da O .

Il problema da risolvere può dunque formularsi nel modo seguente:

« Due punti S e C (Sole e Cometa) si attraggono con la legge di Newton. Essi sono inoltre ambedue attratti da un punto fisso O con forza proporzionale alla distanza. Si domanda l'orbita descritta da C intorno ad S ».

3. — Per giungere alla soluzione, cominciamo ad osservare che le accelerazioni di S e di C , dovute all'attrazione del gruppo, sono allora date, in noti simboli vettoriali, da $\lambda(O - C)$ e $\lambda(O - S)$, dove λ è una costante positiva.

L'accelerazione perturbatrice del moto relativo di C intorno ad S , sarà quindi uguale alla loro differenza vettoriale e cioè a $\lambda(S - C)$. Ne segue che la cometa si muove intorno al sole come se il gruppo stellare non esistesse, e come se essa fosse attratta dal sole con una forza producente un'accelerazione uguale ad $\frac{fM}{r^2} + \lambda r$; dove, al solito, indichiamo con f , M , r , il coefficiente attrattivo, la massa solare, ed il raggio vettore. La massa μ della cometa è naturalmente trascurabile rispetto ad M .

Ne segue che il moto di C intorno ad S è piano ed ha luogo con la legge delle aree, perchè la forza è centrale: di più, poichè la forza stessa è funzione soltanto della r , il problema si riduce alle quadrature.

Per il nostro scopo però, basta scrivere l'integrale dell'energia:

$$(1) \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2Mf}{r} - \lambda r^2 + 2h$$

dove c ed h indicano le costanti delle aree e delle forze vive.

4. — Prendiamo ora come unità di tempo l'anno sidereo e come unità di lunghezza la distanza media della terra dal sole: trascurando la massa terrestre rispetto a quella solare avremo allora la nota relazione: $Mf = 4\pi^2$.

D'altra parte l'accelerazione del sole è uguale, come abbiamo visto, a $\lambda(O - S)$: perciò, come insegna la Meccanica, esso descriverà un'orbita ellittica avente per centro O , in un tempo T dato dalla relazione: $T\sqrt{\lambda} = 2\pi$. Infine, se chiamiamo con q la distanza perielica della cometa, e supponiamo che l'orbita osculatrice al perielio sia esattamente parabolica, avremo la nota equazione: $c^2 = 2Mfq = 8\pi^2 q$.

Con queste posizioni la (1) ci dà:

$$(2) \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2h + 4\pi^2 \left[\frac{2}{r} - \frac{2q}{r^2} - \frac{r^2}{T^2} \right].$$

Ora la velocità radiale si annulla al perielio ed all'afelio: esprimendo quindi la condizione che i due membri della (2) si annullino per $r=q$ e per $r=R$ e sottraendo, otterremo con alcune riduzioni:

$$(3) \quad R^4 - q^2 R^2 - 2T^2 R + 2qT^2 = 0.$$

Sarebbe facile dimostrare — se lo spazio lo permettesse — che questa equazione del 4° grado ammette due — e due sole — radici reali positive, di cui una q è già nota, mentre l'altra R può calcolarsi con i noti metodi algebrici.

Eseguito il calcolo e ricordando che R è certamente assai grande rispetto a q , l'espressione risolutiva si riduce, con alcuni passaggi che per mancanza di spazio non possiamo riprodurre, a:

$$(4) \quad R = \sqrt[3]{2T^2}.$$

Questa formula semplicissima ci dà la distanza massima (afeliaca), raggiunta da una cometa la cui orbita è esattamente parabolica al perielio. Com'è stato detto T è misurato in anni, ed R nell'ordinaria unità astronomica (semiasse magg. dell'orbita terrestre).

5. — Servendoci della (4) calcoliamo facilmente la seguente

TABELLA.

T	R	T	R	T	R
1.000.000	12.600	30.000.000	122.000	100.000.000	271.000
10.000.000	58.500	40.000.000	147.000	150.000.000	356.000
20.000.000	92.800	50.000.000	171.000	200.000.000	431.000

Per discutere questi valori, ricordiamo che le stelle più vicine sono: *α Centauri* ad una distanza di circa 280.000: la stella di Barnard, la 21185 *Lalande* e *Sirio* a distanza di circa 500.000; la 36 *Ophiuci*, la 61 *Cygni*, la 130 *Piaz* (0^h), ad oltre 600.000 ecc. Se escludiamo il caso particolare in cui il moto della cometa sia diretto verso questi pochi astri ora nominati, vediamo dalla nostra tabella che affinché un'eventuale cometa esattamente parabolica sia di origine stellare, T deve essere uguale ad almeno cento o centocinquanta milioni di anni.

Molti astronomi credono, è vero, che T abbia un valore anche superiore; ma nulla si sa con certezza. Nel dubbio in cui siamo, dovremo perciò riservare ogni giudizio qualora ci apparisse qualche cometa con orbita parabolica o debolmente iperbolica (1). Potremo soltanto dire che, se tali comete

(1) Dagli studi dello Strömgren, del Fabry e del Thraen sembra che fin ad ora non sia stata osservata alcuna cometa realmente parabolica od iperbolica. Il risultato, certa-

appartengono al sistema solare, esse avranno un periodo estremamente
misurabile in secoli piuttosto che in anni. Perciò, in armonia con la nomenclatura classica della meccanica celeste, io proporrei di chiamarle *Comete secolari*, riservando alle ordinarie comete (delle famiglie di Giove, Saturno, Urano e Nettuno) il nome di *Comete periodiche*. E come abbiamo visto, il problema dell'origine delle *Comete secolari* si connette in modo stretto ed inatteso con quello del movimento del sole nello spazio.

Matematica. — *Sulla varietà degli spazi tangenti a una data varietà*. Nota II ⁽¹⁾ di ALESSANDRO TERRACINI, presentata dal Socio C. SEGRE ^(*).

4. Per risolvere il problema B) per $k=3$, $g=2$, occorre dunque ricercare le V_3 integrali di un sistema di due equazioni di Laplace, le cui coniche associate contengono come parte una stessa retta r . Disponendo in modo opportuno dei parametri cui si riferiscono i punti della V_3 , si può supporre che quel sistema di equazioni leghi linearmente fra loro, in due modi diversi, i punti

$$(7) \quad x, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(11)}, x^{(12)}, x^{(13)}.$$

La V_3 rientra dunque in una categoria già considerata dal prof. Segre ⁽²⁾: applicando una sua osservazione, possiamo perciò dire che le V_3 , per cui $g=2$ sono le V_3 generiche ⁽³⁾ tra quelle solcate da ∞^2 linee, tali che gli $\infty^1 S_2$ tangenti alle V_3 nei punti di una tal linea costituiscano una sviluppabile ordinaria (eventualmente degenera).

Di più, si possono assegnare, in modo esplicito, (come verrà ora indicato) le coordinate di un punto che descriva una tale V_3 , in funzione di un oppor-

mente importante, non deve però essere preso in modo assoluto. Prescindendo infatti da possibili lievi errori di osservazione, occorre correggere l'eccentricità dalle perturbazioni cagionate dall'attrazione dei pianeti; e tali correzioni, in generale, possono farsi praticamente solo col metodo delle *Perturbazioni speciali*. Ora, com'è noto, l'esattezza di questo metodo diminuisce quanto più si prolunga l'intervallo di tempo a cui estendiamo il calcolo. Potremo dunque correggere l'orbita dalle perturbazioni prodotte nelle vicinanze di quel passaggio al perielio che noi osserviamo, e non già dalle antiche perturbazioni avvenute nei passaggi precedenti. Il dubbio perciò continua a sussistere.

⁽¹⁾ Ved. la Nota I in questo volume dei Rendiconti, a pag. 130.

^(*) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1920.

⁽²⁾ *Preliminari* ecc. cit. nella Nota I (ved. il n. 30).

⁽³⁾ Colla parola *generiche* intendiamo dire che quelle V_3 non rappresentino altre eq. di Lap., se non quelle che traducono analiticamente la proprietà geometrica che loro serve di definizione.

tuno sistema di parametri. A tale scopo, si osservi che il sistema di due equazioni di Laplace sopra considerato è di quelli che il Bompiani ⁽⁴⁾ studiò sotto il nome di sistemi a caratteristica, assegnando per essi l'integrale generale. Veramente, i risultati del Bompiani risentono, in parte, di una inesattezza incorsa in un suo ragionamento: essi si possono completare nel modo che segue. Nel caso (*non parabolico*), in cui nel fascio di coniche associate non ve n'è alcuna costituita dalla retta r contata doppiamente, possiamo valerci senz'altro dei risultati del Bompiani, ai quali rimandiamo il lettore (ved. il n. 19 della sua Nota citata) ^(4 bis). Invece, nel caso opposto (*parabolico*), quel sistema di equazioni si può immaginare costituito da due equazioni, che leghino linearmente a x e alle sue derivate prime, rispettivamente $x^{(11)}$ e $a_2 x^{(12)} + a_3 x^{(13)}$ (dove a_2 e a_3 sono certe funzioni di τ_1, τ_2, τ_3). Il paragone delle due espressioni di $a_2 x^{(112)} + a_3 x^{(113)}$ che, con opportune derivazioni, si traggono da quelle due equazioni, porta allora alla conclusione che, nella prima, sono nulli i coefficienti di $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$, e che, perciò, la V_3 integrale risultando rigata, il sistema si può supporre ridotto alla forma

$$(8) \quad \begin{cases} x^{(11)} = 0, \\ a_2 x^{(12)} + a_3 x^{(13)} + b_1 x^{(1)} + b_2 x^{(2)} + b_3 x^{(3)} + bx = 0; \end{cases}$$

e conduce ulteriormente a stabilire fra le a e le b le relazioni

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_2^{(1)} + b_2 & a_3^{(1)} + b_3 & b_1^{(1)} + b & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} & b^{(1)} \\ a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b \end{vmatrix} = 0.$$

Di qui si ricava intanto che i rapporti fra le b_2, b_3, b non dipendono da τ_1 ; lo stesso si può dunque supporre — senza diminuire la generalità — che valga per le stesse b_2, b_3, b . La considerazione delle ulteriori relazioni compendiate in (9) porta allora a porre

$$(10) \quad \begin{cases} b_1 = -\tau_1 b(\tau_2, \tau_3) + B(\tau_2, \tau_3); & a_2 = -\tau_1 b_2(\tau_2, \tau_3) + B_2(\tau_2, \tau_3); \\ & a_3 = -\tau_1 b_3(\tau_2, \tau_3) + B_3(\tau_2, \tau_3). \end{cases}$$

In tal modo, poichè la prima delle (8) permette di scrivere

$$x = h(\tau_2, \tau_3) + \tau_1 k(\tau_2, \tau_3),$$

la seconda diventa

$$(11) \quad Bk + B_2 k^{(2)} + B_3 k^{(3)} + bh + b_2 h^{(2)} + b_3 h^{(3)} = 0,$$

⁽⁴⁾ Citato nella Nota I.

^(4 bis) Si avverta tuttavia che il sistema di eq. di Lap. in questione è bensì riducibile alla forma canonica assunta e sfruttata dal Bompiani, ma la dimostrazione di tale riducibilità esige un ragionamento diverso da quello incompleto, che il B. fa al n. 7.

la quale equazione esprime che gli S_3 tangenti alla V_3 nei singoli punti di una sua retta generica stanno in uno S_4 (anzichè in uno S_5 , come avviene in generale). Viceversa, dalla (11) segue che $x = h + \tau_1 k$ soddisfa al sistema (8), e, come facilmente si verifica, in generale non ad altre eq. di Lap. che non siano in esso contenute. Le V_3 integrali sono dunque, nel caso parabolico, V_3 generiche fra le V_3 rigate con S_4 tangente fisso lungo ogni retta generatrice. Per costruirle tutte, si osservi che, se nella (11) è $B = B_2 = B_3 = 0$, oppure $b = b_2 = b_3 = 0$, il luogo del punto h , oppure del punto k , è una curva (anzichè una superficie) ⁽⁵⁾: la V_3 si compone allora di ∞^1 coni generici. Se no. quei due luoghi sono rispettivamente due superficie H e K , le quali vengono a essere riferite, per il tramite delle rette generatrici di V_3 , in modo che i loro piani tangenti in punti corrispondenti h e k sono incidenti in un punto s [come mostra la (11)]. Se le linee, siano φ e ψ , involupate rispettivamente su H e K dalle tangenti hs e ks risultano corrispondenti (ciò che in generale non avverrà), la retta hk della V_3 riesce incidente a un'altra retta della V_3 infinitamente vicina (quella che congiunge i punti rispett. della φ e della ψ per h, k , infinitamente vicini a questi punti) ⁽⁶⁾: le rette di V_3 si distribuiscono pertanto su ∞^1 superficie sviluppabili. Se invece i sistemi delle linee φ e ψ non risultano corrispondenti, si assumano dei parametri τ_2, τ_3 in modo che quelle siano rispettivamente le linee (su cui varia) τ_2 e τ_3 ; allora h e k soddisfanno alla ⁽⁷⁾

$$uh + h^{(2)} + vk + v_3 k^{(3)} = 0,$$

che si integra senz'altro e porge

$$(12) \quad x = e^{-\int u d\tau_2} \left\{ f(\tau_3) - \int e^{\int u d\tau_2} [vk + v_3 k^{(3)}] d\tau_2 \right\} + \tau_1 k(\tau_2, \tau_3),$$

f essendo una funzione arbitraria. La (12) [scritta in corrispondenza di funzioni $u(\tau_2, \tau_3)$, $v(\tau_2, \tau_3)$, $v_3(\tau_2, \tau_3)$ fissate e di funzioni f, k variabili da una coordinata all'altra] fornisce le coordinate di un punto che descrive la V_3 integrale. Quindi, nel caso parabolico, riferendo la V_3 integrale a un opportuno sistema di parametri, le coordinate di un suo punto sono date dalla (12), oppure da

$$(13) \quad x = E(\tau_3) + \tau_1 F(\tau_2, \tau_3),$$

⁽⁵⁾ Quel punto non può restare fisso; se no, la V_3 sarebbe un cono, e rappresenterebbe almeno tre eq. di Lap. lin. ind.

⁽⁶⁾ Anche la conferma analitica ne è immediata.

⁽⁷⁾ Assumiamo senz'altro, nella seguente equazione, uguale a 1 il coefficiente di $h^{(2)}$, potendoci sempre ridurre a tale ipotesi, purchè quel coefficiente sia $\neq 0$, e ciò è lecito supporre, se non si vuole ricadere sul caso dianzi trattato.

o infine dx

$$(14) \quad x = E(\tau_2, \tau_3) + \tau_1 E^{(2)}(\tau_2, \tau_3),$$

dove E e F sono funzioni arbitrarie ⁽⁸⁾.

5. Per $k=4$ vogliamo ancora risolvere il problema A), nel caso di $g=2$ (il solo che resti da trattare). Allora Γ è una congruenza di rette, di classe *uno*, nello S_3 delle quadriche associate: e per le singole rette di Γ passano ∞^2 quadriche di Σ : la dimensione d di Σ , in base alla (5), può assumere i valori 2, o 3, o 4. Il primo caso non si può verificare, se non quando le rette di Γ — che allora appartengono a tutte le quadriche di Σ — stanno in un piano. Per $d=2$, il sistema Σ è dunque costituito da ∞^2 quadriche contenenti un piano fisso.

Sia ora $d=3$. Se la congruenza Γ è d'ordine *zero*, cioè è formata dalle rette di un piano ω , il sistema Σ contiene un sistema lineare ∞^2 (e non più ampio), avente per base quel piano. Infatti le ∞^2 quadriche di Σ che passano per un punto A di ω — il quale non sia punto base di Σ ⁽⁹⁾ — contengono per intero le rette generiche di Γ uscenti da A , e quindi tutto quel piano. — Se invece l'ordine di Γ è > 0 , le ∞^2 quadriche di Σ , passanti per un punto generico dello spazio, vengono a contenere le rette di Γ per quel punto, e perciò ⁽¹⁰⁾ Σ ha la jacobiana indeterminata. D'altra parte, su ogni retta generica di Γ , le quadriche di Σ segano una stessa coppia di punti (distinti o no), e pertanto, non potendo le rette di Γ concorrere tutte in un punto, segue che Σ è dotato di una linea base. Tra i vari sistemi lineari ∞^3 di quadriche a jacobiana indeterminata ⁽¹¹⁾, si potranno dunque ritenere come possibili sistemi Σ il sistema delle quadriche

⁽⁸⁾ Il primo tipo di soluzioni manca fra quelli assegnati dal Bompiani (al n. 11 della sua Nota citata). La ragione consiste in ciò, che, come forma canonica del sistema parabolico in questione, egli assume la nostra (8) con $a_3=0$ (ved. il n. 7 della sua Nota): ma la riduzione a una tal forma si può fare, solo se il sistema differenziale nella F : $F^{(1)} = a_2 F^{(2)} + a_3 F^{(3)} = 0$ è completo, cioè se $\begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$, ciò che non segue dalle condizioni di integrabilità (9). Considerando più in generale, come fa il Bompiani, un sistema parabolico di ν equazioni a caratteristica per una funzione x di k variabili indipendenti, si trova che una critica analoga non ha luogo per $\nu > 2$; mentre, per $\nu=2$, alle V_k integrali che egli assegna occorre aggiungere le generiche ∞^{k-1} di rette con S_{2k-2} tangente fisso lungo ogni generatrice (per le quali si può dare una rappresentazione analitica analoga a quella qui assegnata per $k=3$).

⁽⁹⁾ Un tal punto esiste certo; altrimenti in Σ vi sarebbero quadriche contenenti un piano arbitrario.

⁽¹⁰⁾ Cfr. i due enunciati a pag. 235 di Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Pisa, 1907.

⁽¹¹⁾ Cfr. Toeplitz citato nell'ultima nota a piè di pagina della Nota I.

per due rette sghembe, e il sistema delle quadriche mutuamente tangenti nei punti di una retta ⁽¹²⁾.

Sia infine $d = 4$. Su una retta generica u di Γ le quadriche di Σ segnano coppie di una involuzione I . Se questa degenerasse, Σ avrebbe una base incontrata dalle singole rette di Γ , base che non potrebbe constare di un numero finito di punti (essendo Γ di classe *uno*), nè essere una retta (ved. il n. 3), nè infine una conica (giacchè allora Σ conterrebbe il sistema lineare ∞^3 avente per base il piano di quella conica, ciò che è da escludere). I punti doppi, distinti, della involuzione I forniscono allora, su una u generica, una coppia di punti coniugati rispetto a tutte le quadriche di Σ , coppia appartenente perciò alla jacobiana di Σ . Se il luogo di quella coppia di punti, al variare di u , è una linea, cosicchè risulta una linea il luogo dei fochi, distinti, delle rette di Γ , questa congruenza, che è di classe *uno*, è ⁽¹³⁾ la congruenza lineare delle rette appoggiate a due rette sghembe, le quali vengono a risultare mutuamente polari rispetto alle quadriche di Σ . Σ è dunque in tal caso un sistema lineare ∞^4 che ammette due rette sghembe polari fisse. — Se, finalmente, il luogo dei punti doppi di I , e per conseguenza la jacobiana di Σ comprende una parte superficiale ⁽¹⁴⁾, Σ rientrerà fra i sistemi determinati dal Bonferroni ⁽¹⁵⁾, come quelli appunto che godono di quest'ultima proprietà. Tra essi sono il sist. lin. ∞^4 comprendente una rete avente un piano base, il sist. lin. ∞^4 contenente tutte le quadriche per due rette sghembe, il sist. lin. ∞^4 contenente tutte le coppie di piani di un fascio. Altri due sistemi sono elencati dal Bonferroni, i quali però non fanno al caso nostro: essi sono il sistema contenente un sistema ∞^3 con piano base (da scartare per un'ovvia ragione) e quello, rispetto al quale un punto Z ha uno stesso piano polare. Quanto a quest'ultimo sistema, il quale contiene un sistema ∞^3 di coni di vertice Z , basterà osservare che per una retta generica u di Γ passerebbero almeno ∞^1 fra quei coni; e perciò, assunta una generica ∞^1 di rette u di Γ , non passanti per Z e proiettate

⁽¹²⁾ Potrebbe restare il dubbio, che a questi fosse da aggiungere qualche (opportuno) sistema ∞^3 di coni col medesimo vertice; ma un ragionamento analogo a quello fatto più avanti nella nota ⁽¹⁴⁾ prova che un tal sistema conterrebbe necessariamente una rete con piano base (caso già rilevato).

⁽¹³⁾ Cfr. per es. Sturm, *Die Gebilde I und II Grades der Liniengeometrie*..., Leipzig, 1892-96, Band II, pag. 32.

⁽¹⁴⁾ Se la jacobiana di Σ è addirittura indeterminata, Σ è un sistema ∞^4 di coni col medesimo vertice; e dalla esistenza di una retta u di Γ non passante per il vertice, si inferisce che il piano di una tal retta e del vertice sta su ∞^2 quadriche di Σ : il sistema rientra in una categoria che verrà enumerata più avanti.

⁽¹⁵⁾ *Sui sistemi lineari di quadriche la cui jacobiana ha dimensione irregolare*. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. L (1915).

da Z secondo piani distinti ⁽¹⁶⁾, segnando quel sistema ∞^3 di conì con un piano generico, si avrebbe, su questo, un sist. lin. ∞^3 , Σ_0 , di coniche, tale che esisterebbero ∞^1 rette contenute, ciascuna, in tutte le coniche di qualche fascio del sistema Σ_0 ; ciò che importerebbe (si pensi al sist. lin. ∞^1 apolare) l'essere contenute in Σ_0 tutte le coppie di rette per un certo punto, e, di conseguenza, l'essere contenute in Σ tutte le coppie di piani per una certa retta (caso già trovato).

Viceversa, si riscontra pressochè immediatamente che tutti i sistemi Σ trovati come possibili soluzioni del problema A) sono effettivamente tali, solo che si escludano quei particolari sistemi ∞^4 che eventualmente risultino dotati di retta base. Perciò

Le V_4 per le quali $g=2$ sono, tutte e sole, le V_4 rappresentanti un sistema di equazioni di Laplace, il cui sistema lineare di quadriche associate appartenga a uno dei seguenti tipi:

1) sist. lin. ∞^2 di quadriche contenenti un piano;
 2) sist. lin. ∞^3 contenente un sist. lin. ∞^2 (e non più ampio) del tipo precedente; sist. lin. ∞^3 di quadriche per due rette sghembe, oppure mutuamente tangenti lungo una retta:

3) sist. lin. ∞^4 contenente un sist. lin. ∞^3 di uno dei tipi precedenti (ma non contenente le ∞^3 quadriche per un piano); sist. lin. ∞^4 che ammette due rette sghembe polari fisse, oppure contiene tutte le coppie di piani di un ascio. Tra i sist. lin. ∞^4 vanno però esclusi quelli che eventualmente risultino dotati di retta base.

⁽¹⁶⁾ Ciò non si potrà fare quando (e solo quando) le rette di Γ stiano tutte in un piano, sia questo ω : ma allora vi è in Σ una rete di quadriche contenenti ω (caso già noto). Infatti, se così non fosse, le due reti determinate rispett. da due rette generiche di ω starebbero in un sistema lineare ∞^3 (dedotto da Σ colla imposizione di un punto base nella intersezione di quelle due rette), e quindi, notoriamente, tutte quelle reti, non potendo stare in uno stesso sist. lin. ∞^3 (cfr. la trattazione fatta più sopra per $d=3$), conterrebbero uno stesso fascio. Vi sarebbe dunque in Σ un fascio di quadriche contenenti come parte ω ; di conseguenza Σ segherebbe su ω una rete di coniche, tale che una retta generica di ω farebbe parte di qualche conica della rete. Questa, e perciò Σ , risulterebbe dotata di una retta base, ciò che è da escludersi (cfr. il n. 3).

Fisica. — *Sulle variazioni residue della resistenza elettrica prodotte da processi termici negli acciai al nichel* ⁽¹⁾. Nota II del dott. WASHINGTON DEL REGNO, presentata dal Corrispondente M. CANTONE ⁽²⁾.

Nella Nota prima ho indicato i risultati ottenuti per i ricuocimenti a temperature diverse di fili crudi sottoposti ad unico ricuocimento; in questa Nota sono invece indicati i risultati di numerose esperienze eseguite allo scopo di assodare l'azione di successivi ricuocimenti sullo stesso filo.

Le esperienze sono state eseguite su fili di invar crudo riscaldandoli sempre alla stessa temperatura per la durata di un'ora e con intervalli di riposo fra due ricuocimenti di 23 ore. I ricuocimenti sono stati eseguiti con le intensità di corrente di 3 e 4 ampère, cioè a temperature alle quali corrispondono variazioni residue positive e negative. Per brevità si dà una sola tabella, la I, corrispondente al ricuocimento con l'intensità di

TABELLA I.

Invar crudo (36 % Ni).

I ricuocimento		II ricuocimento		III ricuocimento		IV ricuocimento		V ricuocimento		VI ricuocimento	
Resistenza iniziale R = 3.3755		Resistenza iniziale R = 3.3471		Resistenza iniziale R = 3.3413		Resistenza iniziale R = 3.3380		Resistenza iniziale R = 3.3371		Resistenza iniziale R = 3.3359	
Tempo di raffred- damento	ΔR	Tempo di raffred- damento	ΔR	Tempo di raffred- damento	ΔR	Tempo di raffred- damento	ΔR	Tempo di raffred- damento	ΔR	Tempo di raffred- damento	ΔR
0.30'	— 293	0.30'	— 59	0.30'	— 36	0.30'	— 14	0.30'	— 21	0.30'	— 16
1.0	— 289	1.0	— 62	1.0	— 35	1.0	— 8	1.0	— 17	1.0	— 14
1.30	— 284	1.30	— 60	1.30	— 30	1.30	— 10	1.33	— 14	1.30	— 9
2.0	— 286	2.0	— 58	2.0	— 34	2.0	— 8	2.0	— 12	2.0	— 11
3.0	— 287	3.30	— 62	3.0	— 41	3.0	— 4	3.30	— 15	3.0	— 11
4.0	— 285	4.0	— 62	4.0	— 44	4.0	— 6	4.0	— 15	4.0	— 11
5.0	— 286	5.0	— 61	5.0	— 45	5.0	— 9	5.0	— 17	5.0	— 14
6.0	— 293	6.0	— 60	6.0	— 48	6.0	— 5	6.0	— 17	6.0	— 10
23.0	— 284	23.0	— 58	23.0	— 33	23.0	— 9	23.0	— 12	45.0	— 22

corrente di 4 ampère; per l'altro caso i risultati sono, a parte il segno, analoghi a quelli indicati. Da essi si rileva che la variazione residua assai

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 21 agosto 1920.

forte per il primo ricuocimento, si riduce ad $\frac{1}{5}$ di questo valore dopo il secondo ricuocimento fino a diventare assai piccola dopo il sesto ricuocimento (del 0,05 % in confronto al 0,85 %): il segno della variazione residua è sempre negativo, come sempre positivo è per i ricuocimenti con l'intensità di corrente di 3 ampère. Comportamento analogo si ha nel caso di soste più lunghe.

La tabella II si riferisce invece al caso di un ricuocimento ciclico alle stesse due temperature sempre per la durata di un'ora e con intervallo

TABELLA II.

I ricuocimento 3 Ampère Resistenza iniziale R = 3.3775		II ricuocimento 4 Ampère Resistenza iniziale R = 3.3971		III ricuocimento 3 Ampère Resistenza iniziale R = 3.3591		IV ricuocimento 4 Ampère Resistenza iniziale R = 3.3577	
Tempo di raffredda- mento	ΔR ohm $\times 10^{-4}$	Tempo di raffredda- mento	ΔR ohm $\times 10^{-4}$	Tempo di raffredda- mento	ΔR ohm $\times 10^{-4}$	Tempo di raffredda- mento	ΔR ohm $\times 10^{-4}$
10'	+ 130	10'	— 430	10'	— 2	10'	— 61
20	+ 178	20	— 414	20	+ 7	20	— 47
30	+ 183	30	— 408	30	+ 8	30	— 42
45	+ 176	45	— 406	45	+ 9	45	— 41
60	+ 188	60	— 403	65	+ 10	60	— 41
98	+ 192	90	— 398	125	+ 8	90	— 36
120	+ 192	120	— 395	185	+ 9	120	— 38
157	+ 194	150	— 394	180	— 39
180	+ 193	180	— 394

assai lungo tra due ricuocimenti. Il secondo ricuocimento produce l'inversione del segno della variazione residua e ciò malgrado non si abbia più da fare con filo vergine: gli ulteriori ricuocimenti danno variazioni residue molto più piccole, ma sempre positive per l'intensità di corrente di 3 amp. e negative per quella di 4 amp.

Le azioni, cioè di tempera e di raddolcimento, caratteristiche delle due temperature di ricuocimento, seguitano ad aver luogo ma con valori assai ridotti.

Se si operano poi su di uno stesso filo ricuocimenti successivi con intensità sempre crescente limitando al minimo il tempo di riposo fra due ricuocimenti (mezz'ora) e riducendo di molto il tempo di passaggio della corrente (dieci minuti), si hanno i risultati indicati nella fig. I b (vedi nota I) che mostrano delle variazioni residue più piccole in confronto a quelle ottenute per i ricuocimenti lunghi su fili vergini; ma il fenomeno per ciò che riguarda l'inversione del segno della variazione residua rimane anche in questo caso del tutto analogo a quello precedentemente indicato.

Riassumendo:

1) Esiste per tutte le leghe studiate una variazione residua della resistenza elettrica col ritorno alla temperatura ambiente: tale variazione è nel senso di un aumento o di una diminuzione della resistenza primitiva a seconda della temperatura raggiunta nel ricuocimento. Tanto per l'invar quanto per la platinite si ha, col crescere della temperatura di ricuocimento, un'inversione del segno della variazione che sembra sia in relazione col passaggio pel punto di trasformazione di queste leghe.

2) I ricuocimenti successivi, sempre alla stessa temperatura, producono nell'invar variazioni residue sempre dello stesso segno ma assai più piccole di quelle prodotte dal primo ricuocimento.

3) il valore della resistenza elettrica dopo il ricuocimento subisce per tutte le leghe delle variazioni nel tempo piccolissime ed assai lente.

Ringrazio vivamente il prof. Cantone per gli aiuti fornitimi nel corso di queste ricerche.

Chimica. — Sistemi doppio-ternarii con lacuna di miscibilità allo stato liquido ed allo stato solido ⁽¹⁾. Nota II di C. MAZZETTI, presentata dal Socio E. PATERNÒ ⁽²⁾.

Se in un sistema doppio-ternario sono tre i sistemi binarii che presentano lacuna di miscibilità liquida e solida ed eutettico ⁽³⁾, compariranno nel sistema due lacune composte che presenteranno due triangoli singolari: uno di tre liquidi ed uno di tre solidi.

In questo caso le superficie di inizio e di fine di solidificazione assumeranno l'aspetto indicato nelle fig. 1 e 2.

Il ramo di lacuna liquida $ab\ \alpha\beta$ (fig. 1) scende coll'abbassarsi della temperatura da ab verso $\alpha\beta$. Esso è descritto dagli estremi dei lati di li-

ido dei triangoli due liquidi un solido i cui vertici di solido si trovano sulla linea univariante di solido vw (fig. 2). Il ramo $d\ f\ \alpha\gamma$ scende anche esso da $d\ f$ verso $\alpha\gamma$ ed i solidi corrispondenti ai suoi punti coniugati descriveranno il ramo della univariante di solido zw . Il ramo della lacuna $ce\ \beta\gamma$ non scende invece continuamente da ce fino a $\beta\gamma$, ma presenta un minimo in corrispondenza della retta di coniugazione che unisce i due punti tt_1 in cui la univariante di liquido interessa la lacuna stessa. I vertici di solido dei triangoli due liquidi-un solido che appartengono a questa lacuna si troveranno sulla linea univariante di solido $zs_1\ sw$. Siccome quest'ultima

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1920.

⁽³⁾ Vedi questi Rendiconti pag. 150.

Se al sistema così costituito si sottrae calore, la temperatura non si abbassa, ma il liquido (che corrisponde all'estremo di liquido della corrispondenza liquido-solido per cui i due triangoli sono andati a coincidere per costituire il quadrilatero) genera il solido w mentre si sdoppia nei due liquidi β e γ .

Continuando a sottrarre calore il processo prosegue fino a che rimane presente il liquido α . Quando questo si esaurisce, il quadrilatero si riduce

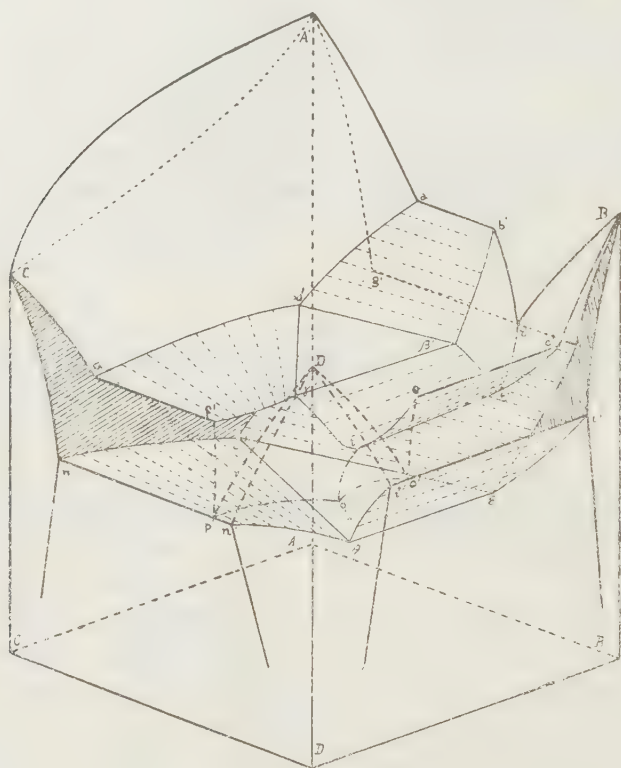


FIG. 4.

ad un solo triangolo due liquidi-un solido. Abbassandosi ancora la temperatura, il vertice di solido di questo triangolo percorre la linea univariante $w s$ mentre gli estremi di liquido descrivono i contorni del ramo di lacuna $\beta \gamma t t_1$ fino al minimo.

I rapporti fra le quantità delle fasi in equilibrio negli stadi successivi di questo passaggio si possono ricavare dalla fig. 3, la quale permette appunto di stabilire in ogni istante le quantità relative delle quattro fasi in presenza.

ω rappresenti la composizione globale della parte liquida e w la composizione del solido in equilibrio. Se 1 è la quantità totale del liquido di

partenza, le quantità di liquido α , β e γ di cui esso risulta, saranno:

$$\alpha = \frac{\omega m}{\alpha m} ; \quad \beta = \frac{\omega \alpha \gamma m}{\alpha m \beta \gamma} ; \quad \gamma = \frac{\omega \alpha \beta m}{\alpha m \beta \gamma} .$$

Togliendo calore ω va solidificando, e siccome si forma il solido w , la retta $m\omega\alpha$ ruota intorno ad ω portando il suo punto d'intersezione col segmento αw da α verso w . Le quantità presenti delle quattro fasi, quando ad esempio la composizione totale del solido w e del liquido è giunta in r , sono:

$$w = \frac{\omega n}{rn} \frac{r\alpha}{w\alpha} \quad (1); \quad \alpha = \frac{\omega n}{rn} \frac{wr}{w\alpha} \quad (2); \quad \beta = \frac{\omega r}{rn} \frac{\gamma n}{\beta \gamma} \quad (3); \quad \gamma = \frac{\omega r}{rn} \frac{\beta n}{\beta \gamma} \quad (4).$$

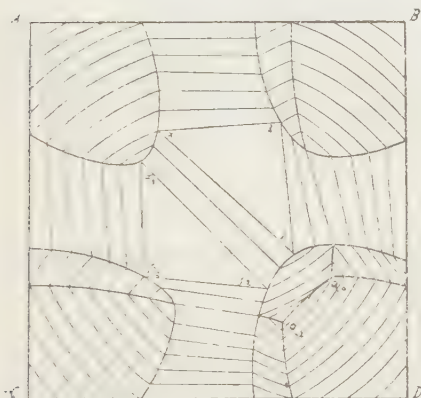


FIG. 5.

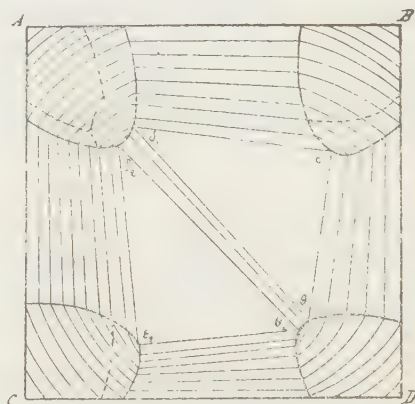


FIG. 6.

Quando la retta $n\omega r$ ha portato la sua intersezione col segmento αw in w , allora la quantità di α presente è ridotta a zero perchè è diventato zero il fattore wr del numeratore della (2); una ulteriore sottrazione di calore farà allora diminuire la temperatura perchè l'equilibrio è diventato univariante.

Il punto w rappresenta un punto speciale che dà la composizione dell'unico solido capace di esistere in presenza di tre liquidi, e come i punti eutettici e quelli di trasformazione di 1° e 2° ordine delle superfici di fusione risultano dall'incontro di tre linee univarianti di liquido, così la posizione di w corrisponde all'incontro di tre linee univarianti di solido.

Le superficie di liquido si raccordano alle falde di lacuna: quella proveniente da AC presentando un minimo di temperatura nel punto α , e quella proveniente da B presentando un minimo nel punto t ed una ripiegatura in corrispondenza alla univariante rt . Nel campo D e f esistono tre falde di liquido che si incontrano due a due lungo le linee univarianti oq , t_1q , pq e che concorrono scendendo nel punto eutettico q .

Il punto g rappresenta l'ultimo liquido che potrà esistere e che sarà in equilibrio con i tre solidi γ , ϵ , θ . Esso sarà interno al triangolo che ha per vertici questi tre solidi al quale si raccordano i tre rami di lacuna solida che insieme alle superficie $ACgm$, $Bhi\epsilon$, $Dln\theta$ costituiscono la superficie di cristallizzazione (fig. 4).

Dal diagramma nello spazio si vedono i decorsi schematici delle diverse superficie di solido, di liquido e di lacuna.

* * *

Se le lacune di miscibilità sono in numero di quattro, le figure 1 e 2 si modificano come è indicato nelle figure 5 e 6. I triangoli di tre fasi dello stesso nome in equilibrio con una di nome diverso sono in questo caso quattro e due sono i possibili quadrilateri due solidi-due liquidi.

Tutto invero succede come se il quadrato risultasse dall'unione esatta di due diagrammi ternarii con tre lacune, a ciascuno dei quali sono applicabili con opportuni adattamenti i noti principi di equilibrio.

Chimica-fisica. — *Studi sui calori specifici*. Nota di M. PADOA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN ⁽¹⁾.

L'interpretazione teoretica della legge di Dulong e Petit e delle sue numerose eccezioni è stata ed è tuttora oggetto d'intensa attenzione per parte dei ricercatori. La classica teoria cinetica di Maxwell e Boltzmann non poteva più bastare senza il sussidio di ulteriori ipotesi e senza modificazioni, specialmente da quando vennero constatate le grandi variazioni (diminuzioni) del calore specifico alle basse temperature,

Con l'applicazione dell'ipotesi dei *quanti* Einstein diede allora una formula che esprimeva il concetto che gli atomi potessero assumere successivamente col crescere della temperatura, quantità di energia che sarebbero multipli interi di una quantità fissa. Le esperienze di Nernst e collaboratori hanno poi dimostrato che la formula di Einstein non corrisponde in molti casi ai dati sperimentali; in seguito a questo fatto Nernst e Lindemann modificarono l'equazione di Einstein pure conservandone la forma. Ma le successive verifiche sperimentali non sono state favorevoli neppure a quest'ultima formula ⁽²⁾, che del resto non era che empirica.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1920.

⁽²⁾ Vedi ad es. Narbutt, *Z. f. Elektrochemie*, 1919, nn. 5-6. Gli stessi Nernst e Lindemann hanno adottato la formula di Debye: vedi ad es, *Sitzungsberichte Preuss. Akad.* 1912, 1160.

Il concetto teoretico è invece conservato nelle formule di Debye⁽¹⁾, e di Born e Kármán⁽²⁾, e consiste nell'ammettere che il movimento termico dei solidi sia costituito da una serie di vibrazioni di frequenza diversa e, secondo gli ultimi autori nominati, dell'ordine dell'infrarosso: cosicchè l'energia totale ad una data temperatura sarebbe la sommatoria dei vari contributi portati dalle varie frequenze. Che il movimento termico esista anche nei solidi, non si può dubitare neppure da chi non volesse riconoscere che i movimenti browniani, constatati nelle particelle sospese nei liquidi, non possono estinguersi totalmente nei solidi; poichè Debye⁽³⁾ ha dimostrato che gli spettrogrammi ottenuti nei cristalli coi raggi X vanno rendendosi sempre meno netti col crescere della temperatura, ciò che dimostra in modo palmare che l'ampiezza delle oscillazioni atomiche aumenta colla temperatura; che tale movimento termico contenga oscillazioni dell'ordine dell'infrarosso è pure indubitabile, ma senza voler diminuire il valore di queste considerazioni, vien fatto di rilevare che con tali ragionamenti si potranno sempre trovare dei valori che corrispondono a quelli sperimentali senza avere con questo raggiunto le cause prime che differenziano i vari corpi per ciò che riguarda il calore specifico.

In questo stato di cose ho voluto cercare di esaminare la questione da un altro punto di vista e cioè mettere in evidenza alcuni caratteri chimico-fisici pei quali si differenziano quei corpi che presentano le più spiccate anomalie dei calori specifici, da quelli che hanno un comportamento normale. La legge di Dulong e Petit si può dire che è stata quasi negletta dai chimici, dopo di aver servito come criterio per la scelta dei pesi atomici; io penso peraltro che il comportamento dei solidi rispetto al calore specifico debba trovare la migliore interpretazione nei loro caratteri chimici, comprendendo fra questi l'affinità.

Estendendo a questo campo l'idea da me sostenuta con dati sperimentali⁽⁴⁾, che il collegamento degli atomi nei cristalli sia dovuto a forze chimiche e però a valenze primarie e secondarie, si viene alla conclusione che l'ampiezza del movimento termico degli atomi e però anche il contenuto di calore ed il calore specifico, che ne è la derivata rispetto alla temperatura, debbono dipendere in modo essenziale: 1°) dalla solidità dei legami fra gli atomi; 2°) dalla loro direzione; 3°) dal numero di tali legami. Considerata la questione da tale punto di vista, sorgono subito argomenti in appoggio: come negare, ad esempio, una relazione fra il valore minimo del calore specifico del carbonio e l'affinità tutta speciale fra gli atomi di questo elemento,

(1) *Annalen der Physik*, 1912, 789; *Centralblatt*, 1913, I, 213.

(2) *Physikal. Zeitschrift* 14, 15; *Centralblatt*, 1913, I, 592.

(3) Debye, *Röntgenstrahlen und Wärmebewegung*, *Annalen der Physik*, 1914 (43), pag. 49; ved. anche Gross, *Jahrbuch der Radioaktivität*, 1918, 323.

(4) *Questi Rendiconti*, 1918, II, 59, 327; 1919, II, 239.

di cui la più evidente dimostrazione è l'esistenza dell'enorme numero dei composti organici? Seguendo questo ordine di idee ho cercato delle riprove sperimentali: mentre la stabilità⁽¹⁾ e la complessità molecolare aumentano passando da molecole semplici a polimeri, sembra che si renda disponibile una affinità sempre maggiore per la costituzione dell'edificio cristallino, come starebbe a dimostrare il fatto che i polimeri fondono sempre più alto dei corrispondenti corpi a molecole semplici. Tanto la solidità dei legami interni di ogni singola molecola, quanto di quelli esterni che collegano le varie molecole di uno stesso individuo chimico, debbono influire, secondo le vedute sopra esposte, nel senso di una diminuzione del calore specifico⁽²⁾.

Si poteva soltanto dubitare che questo effetto si presentasse nettamente, considerando che la struttura molecolare nei monomeri e nei polimeri non è la medesima e che pertanto la diversa direzione dei legami poteva nascondere gli effetti della diversa intensità; tuttavia l'esperienza ha dimostrato che la polimerizzazione influisce in modo assai pronunciato e nel senso preveduto sul calore specifico.

La scelta delle sostanze non è molto ampia perchè tanto i monomeri quanto i polimeri debbono essere tutti solidi; tuttavia le misure si sono potute compiere sulla cianamide, diciandamide e melamina, rispettivamente monomero, dimero, trimero; sui cianati e cianurati di argento e di sodio (monomeri e trimeri), e finalmente sul levoglucosano ed i suoi polimeri elevati, l'amido e la cellulosa. Questi ultimi corpi sono stati recentemente trasformati da A. Pictet⁽³⁾, colla distillazione a pressione ridotta, nel levoglucosano, che è costituito da molecole semplici $C_6H_{10}O_5$; mentre l'amido e la cellulosa ne sono dei polimeri assai elevati costituiti da un numero non conosciuto di molecole semplici; è appunto allo scopritore di tale importante reazione che debbo il dono di una certa quantità di levoglucosano che mi ha permesso di eseguire le misure necessarie. Ho il piacere di potere esprimere qui all'illustre Scienziato i miei migliori ringraziamenti.

Nella tabella che segue sono riuniti i risultati medî delle numerose

⁽¹⁾ I calori di formazione aumentano passando dalle molecole semplici ai relativi polimeri. Vedi Lemoult, *Annales de Chimie et de Physique*, 1899, XVI, 7^a serie, pag. 338.

⁽²⁾ L'idea che la polimerizzazione influisca sul calore specifico era stata già espressa coll'osservare che i corpi che deviano maggiormente dalla legge di Dulong e Petit sono anche quelli aventi maggiore tendenza alla polimerizzazione. Ma non si era pensato finora ad osservare l'influenza che essa esercita nei varî composti di uno stesso elemento. Per l'esattezza debbo però ricordare che il Duclaux in una breve comunicazione teoretica comparsa sul *Journal de ch. phys.* del febbraio di quest'anno (vol. XVIII, pag. 67) e che è giunta a mia conoscenza mentre il presente lavoro era in corso, esprime l'idea che il calore specifico del carbonio debba diminuire man mano che le molecole di cui esso fa parte si rendono più complesse. Tuttavia ciò non mi risulta esatto che nel caso dei polimeri, come si vedrà da misure che renderò note in altra pubblicazione.

⁽³⁾ A. Pictet e I. Sarasin, *Helvetica Chimica Acta*, 1918, I, 87.

misure eseguite per ciascuna sostanza, mediante il calorimetro di Bunsen, e riferentisi agli intervalli di temperatura indicati.

Numero della esperienza	SOSTANZA	FORMULA	P. F.	Intervallo di temperatura	P. Mol.	Calore specifico	Calore atomico medio
9	Cianamide	$CN.NH_2$	40°	0°-39°	42	0.547	4,6
10	Diciandiamide	$NH:C \begin{matrix} \nearrow NH_2 \\ \searrow NH.CN \end{matrix}$	205°	0°-204°	84	0.456	3,8
12	Melamina	$(H_2N)C \begin{matrix} \nearrow N=C(NH_2) \\ \searrow N=C(NH_2) \end{matrix}$	—	0°-80°	126	0.352	2,9
16	Cianato d'argento	$N \equiv C.OAg$	—	idem	150	0.125	4,6
18	Cianurato id.	$(CNOAg)_3$	—	idem	450	0.098	3,4
8	Cianato di sodio	$N \equiv C.ONa$	—	idem	65	0.201	3,3
9	Cianurato id.	$(CNO Na)_3$	—	idem	195	0.165	2,7
13	Levoglucoano	$C_6H_{10}O_5$	—	idem	162	0.608	4,7
8	Amido (patate)	$(C_6H_{10}O_5)_n$	—	idem	$162 \times n$	0.303	2,3
4	Id. (riso)	id.	—	idem	idem	0.308	2,3
9	Cellulosa	$(C_6H_{10}O_5)_p$	—	idem	$162 \times p$	0.347	2,5
11	Acido cianurico	$HO.C \begin{matrix} \nearrow N=C.OH \\ \searrow N=C.OH \end{matrix}$	—	idem	129	0.327	3,5
8	Ciamelide	$HN=C \begin{matrix} \nearrow O-C=NH \\ \searrow O-C=NH \end{matrix}$	—	idem	129	0.264	2,8

Come è facile rilevare, il calore specifico va sempre diminuendo notevolmente con la polimerizzazione, tanto che nell'amido e nella cellulosa ha un valore circa metà di quello del levoglucoano. Dal calore specifico è facile calcolare il calore molecolare e da questo un calore atomico *medio* per ciascuno degli atomi componenti. Anche questo calore atomico diminuisce fortemente col crescere della polimerizzazione: la regola di Neumann e Kopp imporrebbe al contrario la costanza di quel valore. Non si può dire a quale degli atomi componenti debba imputarsi la diminuzione, ma sembra ragionevole pensare che essa sia dovuta a quegli elementi (carbonio, azoto, ossigeno), le cui affinità entrano in giuoco per la formazione dei polimeri e dei cristalli.

Per dimostrare che, a parità di tutte le altre condizioni, il calore specifico, sempre secondo le idee sopra esposte, deve variare con la disposizione

delle valenze, ho confrontato i calori specifici di due isomeri, l'acido cianurico e la ciamelide; i valori ottenuti sono diversi, come era preveduto, ma è necessario su questo argomento cercare ulteriori conferme. Confido che nuove ricerche fatte con le direttive esposte mi permetteranno di raggiungere risultati soddisfacenti.

Mi è grato rammentare qui l'attiva collaborazione prestatami dal laureando sig. Luigi Pasquinelli, nella preparazione delle sostanze e nell'esecuzione delle misure.

Mineralogia. — Sulle metamorfosi di contatto fra calcari e porfido granitico nel giacimento metallifero di Orroli (Sardegna) ⁽¹⁾. Nota di P. COMUCCI, presentata dal Corrisp. F. MILLOSEVICH ⁽²⁾.

Con la presente Nota mi propongo di studiare i fenomeni di contatto fra una massa eruttiva e le zone sedimentarie preesistenti, di Orroli nell'Ogliastra (Sardegna). Il materiale che mi ha servito per tale studio fu raccolto dall'ing. Adolfo Ciampi e da questo gentilmente messo a mia disposizione.

Il giacimento metallifero di Orroli, nella valle del Flumendosa, consiste in un filone di blenda e galena, più abbondante il primo minerale del secondo, attraversante gli scisti paleozoici, probabilmente siluriani, i quali racchiudono banchi calcarei, più o meno metamorfosati.

I solfuri sono associati ad ammassi di contatto ilvaite, pirosseno, ossidato e alle salbande a molta calcite. I calcari sono cristallini di colore grigio-nero lucenti a frattura irregolare. Risultano rotti e ricementati abbondantemente da calcite spatica. Esaminati al microscopio appaiono costituiti di sola calcite a grossa grana e manifestano notevoli contorsioni ed altri fenomeni che attestano potenti azioni dinamiche subite.

Tali rocce calcaree, secondo quanto ha riferito l'ing. Ciampi, hanno ben poca diffusione in confronto ai micascisti, i quali limitano tutta la formazione metallifera-metamorfica tanto al tetto che al muro.

I micascisti del muro, fortemente contorti, risultano principalmente di una intima e minuta miscela di quarzo in granuli allungati e dotati di forti estinzioni ondulate, e di squamette e listerelle di mica di aspetto sericitico: i due minerali assumono un evidente ordinamento parallelo. Abbonda anche

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel gabinetto di Mineralogia del R. Istituto di studi superiori di Firenze.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1920.

un minerale micaceo in grossi elementi, che si dispone quasi in straterelli e che, quando è poco decomposto, presenta i caratteri di una mica ferro-magnesiaca, con pleocroismo dal giallo piuttosto chiaro al bruno marrone e con forte birifrangenza.

D'ordinario però per alterazione si è fortemente decolorato, o, altrimenti, si presenta cloritizzato, segregando in pari tempo una minuta e molto diffusa granulazione nera di ossido magnetico di ferro che si dispone in vene tortuose racchiudenti i grandi elementi micacei, dai quali ha tratto origine. Dalla trasformazione della mica nera si sono formati anche altri materiali ferriferi, gialli o rossigni di natura ocreacea. Come minerali accessori di tali micascisti vanno ricordati: la pirite in cubetti più o meno limonitizzati e con attento esame riconoscibili anche macroscopicamente e l'apatite in rari prismetti.

Al tetto gli scisti hanno subito un forte metamorfismo e una cristallizzazione.

Al microscopio infatti si vede che il minerale micaceo ferro-magnesiaco è ridotto a ben poca quantità, mentre abbonda un minerale di nuova formazione minutamente granulare con rifrazione bassa, nettamente minore a quella del balsamo, e a potenza birifrattiva pure molto debole. Per il suo modo di presentarsi riesce impossibile lo studiarne i caratteri ottici, eccezion fatta di quei pochi sopraccennati; ma è probabile si tratti di feldispato alcalino. È questo l'elemento essenzialissimo della roccia che ha per componenti subordinati un epidoto pistacitico in prismetti e delle vene e plagherelle di calcite. Il processo di metamorfismo subito dal micascisto consisterebbe pertanto in una feldispatizzazione che ha fatto assumere alla roccia una compattezza maggiore.

L'azione metamorfosante sulle rocce preesistenti e la metallizzazione e senza dubbio geneticamente collegata alle eruzioni dei porfidi quarziferi che in tutta la regione attraversano la formazione scistoso-cristallina, già studiati dal Riva e indicati precedentemente da Lamarmora con il nome di « porfidi quarziferi rossi »⁽¹⁾.

Uno di tali porfidi raccolto a breve distanza dal giacimento metallifero di Orroli e da me esaminato, ha infatti colorazione rossa piuttosto chiara nella sua massa fondamentale, notevolissimamente prevalente sugli elementi porfirici rappresentati di quarzo e, in proporzioni di gran lunga minori, da faldispati e mica nera. Al microscopio la massa fondamentale apparisce olocristallina, e in modo esclusivo costituita di quarzo e feldispato costantemente in concrescimento granofirico, molto minuto; però in qualche punto quarzo e feldispato insieme concresciuti sono in elementi maggiori sì da costituire

⁽¹⁾ Carlo Riva, *Le rocce granitoidi e filoniane della Sardegna*. Atti R. Acc. sc. fis. e mat., XIII, serie 2^a, n. 9, Napoli, 1904.

una caratteristica micropegmatite. Il quarzo è limpido, il feldispato torbo per incipiente caolizzazione; la rifrazione è nettamente maggiore nel quarzo. Per questo carattere e in seguito ai risultati dell'analisi può affermarsi che si tratta di un feldispato alcalino e quasi certamente potassico-sodico. Molto subordinatamente entra a far parte della massa fondamentale una mica ferromagnesiaca alquanto cloritizzata in minute listerelle e squamette.

Il più abbondante fra i minerali porfirici è il quarzo in individui di dimensioni non troppo notevoli, fortemente corrosi, che assumono forme caratteristiche per insinuazione della massa fondamentale; ma si scorgono anche individui idiomorfi a contorno esagono. Talora i cristalli di quarzo sono molto maggiori, ma in tal caso divisi in grossi frammenti con orientazione diversa, e ricementati dalla massa fondamentale. Il quarzo porfirico è assai ricco d'inclusioni fluide con o senza libella e alle volte presenta estinzioni un poco ondulate.

Dei feldispati porfirici è più frequente l'ortoclasio del plagioclasio. L'ortoclasio è in cristalli tabulari spesso geminati con la legge di Carlsbad, e assai fortemente caolinizzati con produzione anche di mica sericitica: nei cristalli poco o punto alterati può determinarsi la rifrazione rispetto al balsamo ed essa risulta sempre nettamente inferiore per il feldispato, tanto rispetto ad α' quanto a γ' . In un buon individuo semplice tagliato parallelamente a (010) ho stabilito che la direzione di estinzione negativa (α) fa con la sfaldatura basale un angolo di 11° - 12° . Questo valore non piccolo accenna ad una varietà di feldispato alcalino non puramente potassico, ma potassico-sodico, ciò che è confermato del resto dai risultati analitici.

Il plagioclasio è in individui pure tabulari, geminati con legge dell'albite, alla quale si associa talora quella di Carlsbad. È torbo per assai avanzata alterazione coalinico-micacea, onde non se ne può determinare nemmeno approssimativamente la rifrazione.

Le estinzioni simmetriche, nella zona normale a (010), delle lamelle di geminazione albitica danno valori compresi fra 8° e 12° ; e in due geminati doppi albite-Carlsbad ho potuto determinare:

I	II
10°	8°
8°	6°

Tali caratteri parlano in favore di un oligoclasio piuttosto basico con circa 25 % di anortite. I feldispati talora si riuniscono al quarzo in modo irregolare per formare delle concentrazioni porfiriche.

Il minerale micaceo del primo tempo di consolidazione è fortemente cloritizzato, avendo dato luogo in pari tempo a minerali ocracei e a leucoxeno granulare. Nelle lamine meno alterate si riconoscono ancora tutti i caratteri

di una biotite, il cui pleocroismo va dal giallastro secondo α al bruno-verdognolo secondo c .

Minerale del tutto accessorio è la calcite secondaria.

Analizzato tale porfido quarzifero granofirico ha dato i risultati della colonna I, accanto ai quali pongo nella colonna II le percentuali ottenute dal Riva ⁽¹⁾ per una roccia del tutto analoga di Bellavista, pure nell'Ogliastra:

	I	II
SiO ₂	73,48	76,10
TiO ₂	tracce	0,07
Al ₂ O ₃	14,29	12,00
Fe ₂ O ₃ ⁽²⁾	1,23	—
FeO	—	0,87
MgO	0,38	0,27
CaO	0,80	0,63
Na ₂ O	4,70	3,86
K ₂ O	4,63	4,63
H ₂ O	0,67	0,54
CO ₂	tracce	—
P ₂ O ₅	tracce	—
	100,18	99,83

Le due analisi sono vicinissime fra loro; solo si nota per l'analisi mia un tenore un poco più basso di silice e più alto di allumina; ciò che probabilmente è dovuto al fatto che la roccia da me presa in esame è un poco caolinizzata.

La formula magmatica di questo porfido calcolata secondo il metodo di Osann è la seguente:

S	A	C	F	N	α	c	f
79,58	8,98	0,12	2,10	6,39	16,03	0,21	3,76

e secondo il metodo Loewinson-Lessing si ha:

$$\alpha = 4$$

$$\beta = 25$$

$$R_2O : RO = 1 : 0,15$$

$$Na_2O : K_2O = 1 : 0,54$$

I minerali formatisi al contatto fra le rocce sopradescritte ed involgenti i due solfuri di zinco e piombo sono, come già abbiamo detto, ilvaite, pirosseno ed epidoto.

⁽¹⁾ Memoria citata.

⁽²⁾ Il ferro fu determinato totalmente a Fe₂O₃.

L'ilvaite è in massa compatta di colore nero fino a splendore grasso semimetallico e in cristalli a struttura colonnare-raggiata; individui distinti e ben definiti mancano del tutto. Spesso si osserva un'avanzata decomposizione limonitica.

L'analisi eseguita su materiale del tutto inalterato e puro ha dato i seguenti risultati:

		Rapporti molecolari
SiO ₂	25,72	0,426
Al ₂ O ₃	6,74	0,066
Fe ₂ O ₃	15,31	0,097
FeO	28,84	0,400
MnO	5,72	0,080
CaO	15,17	0,270
H ₂ O	2,05	0,113
	<u>99,46</u>	

Questa ilvaite è una varietà fortemente manganesefera come lo è l'altra sarda di Perda Niedda, analizzata di recente da E Manasse (¹).

Ma ben più rimarchevole è la forte percentuale di Al₂O₃; componente questo ritrovato bensì in alcune ilvaiti, ma sempre con tenori bassi, inferiori all'1%; e non riesce nemmeno chiara la funzione di essa Al₂O₃ nel minerale. Se si considera come avente comportamento di anione il rapporto molecolare fra silice e allumina da un lato, e ossidi bivalenti più acqua dall'altro è 4:7,02; ciò che in realtà concorderebbe con la formula generalmente adottata per l'ilvaite, ma d'altra parte diventa troppo piccola la quantità molecolare di Fe₂O₃ (0,79 anziché 1). Bisogna dunque pensare ad una funzione mista di Al₂O₃ sia come anione sia come catione, e inoltre nulla c'impedisce, onde diminuire il quantitativo molecolare degli ossidi bivalenti più acqua, di considerare una parte del manganese funzionante come trivalente.

Il pirosseno presenta un aspetto fibroso-raggiato con grosse fibre verdi-brune intrecciate un poco confusamente: alla superficie degli esemplari si notano masserelle di calcite ed una mineralizzazione piuttosto estesa, ma molto sporadica e minuta, di galena e blenda. Al microscopio gli individui pirossenici appaiono di colore verde chiarissimo, quasi incolore, e per nulla pleocroici, con forte birifrangenza e con tracce di sfaldatura (110), che nelle sezioni normali o quasi all'asse verticale si risolvono nel caratteristico reticolato quasi retto. Gli angoli di estinzione raggiungono i valori minimi di C:c=42°-43°. Si notano anche geminati secondo (100). Il pirosseno è talvolta un poco torbo per alterazione, e lungo le linee di fessura si mostra trasformato in un minerale verdognolo, non pleocroico, a birifrazione bassis-

(¹) E. Manasse, *Ilvaite ed altri minerali di Perda Niedda nell'Oriddese (Sardegna)*. R. Acc. Lincei, XXIV, serie 3^a, 1915.

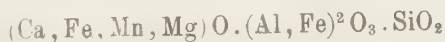
sima, di natura probabilmente cloritica. Mescolati in scarsissima quantità al pirosseno si notano calcite e quarzo.

L'analisi fatta su frammenti scelti con cura, e trattati dopo polverizzazione con acido cloridrico diluito a freddo per eliminare il carbonato di calcio, ha dato i risultati seguenti:

		Rapporti molecolari
SiO ₂	46,97	0,782
Al ₂ O ₃	3,60	0,035
Fe ₂ O ₃	3,03	0,019
FeO	17,25	0,240
MnO	9,17	0,129
CaO	19,17	0,324
MgO	1,07	0,060
	<hr/> 100,26	

Furono ricercati anche gli alcali e si constatarono solo tracce tanto di sodio quanto di potassio.

Evidentemente qui abbiamo una hedembergite che risulta da una miscela isomorfa di due silicati, uno prevalente di tipo diopsidico, però fortemente manganesifero, e l'altro di tipo fassaitico. Dai risultati analitici si ricava che il rapporto fra le molecole fassaitiche:



e quelle diopsidiche:



è espresso in cifra tonda da:

$$1:13,5.$$

Nei campioni da me esaminati l'epidoto forma delle masse compatte a struttura minutamente cristallina di colore un poco variabile, ma sempre tendente al verde-giallastro, e si trovano a contatto agli scisti del tetto essi pure metamorfosati. Al microscopio risultano costituite di cristallotti incompleti, intrecciati fittamente in modo irregolare. Non si tratta di un termine unico, ma di un'associazione di termini clinozoisitici e pistacitici. Infatti, insieme ad alcuni individui assai colorati e un poco pleocroici dal giallo-verde all'incolore e dotati di vivaci colori d'interferenza, se ne hanno altri del tutto incolore e a birifrangenza bassa. In molti cristalli è visibile la sfaldatura secondo 001 e in altri pochi si scorgono le due tracce di sfaldatura (001) e (100).

Nei preparati sottili si nota un poco di quarzo ad estinzione ondulata e della calcite ad inquinare l'epidoto.

I dati analitici del materiale decalcificato, mediante HCl diluito a freddo, sono i seguenti:

		Rapporti molecolari
SiO ₂	40,58	0,676
Al ₂ O ₃	29,72	0,290
Fe ₂ O ₃	5,19	0,034
FeO	2,29	0,031
MnO	2,36	0,033
CaO	20,05	0,358
H ₂ O	0,84	0,046
	<hr/> 101,03	

Risulta che questo epidoto è modicamente ferifero, ma anche manganesifero, come lo erano l'ilvaite e l'hedembergite. Nell'analisi si nota un leggero eccesso di silice imputabile all'inquinazione di quarzo, già riconosciute microscopicamente.

Non ho bisogno di spendere molte parole per dimostrare che si tratta evidentemente di un giacimento d'estrazione magmatica da rocce acide, qual'è il porfido granofirico, e di tipo metasomatico, essendosi avuta non solo una cristallizzazione delle rocce calcaree preesistenti e una sostituzione a gran parte di esse di minerali metalliferi, ma anche la produzione di caratteristici silicati di contatto alluminico-ferrico-calciferi.

Biologia. — *I muscoli intercostali e la differenza sessuale del tipo di respirazione nello cimpanzé.* Nota preventiva e riassuntiva del dott. SERGIO SERGI⁽¹⁾, presentata dal Socio GIULIO FANO⁽²⁾.

Riassumo qui i risultati di alcune mie osservazioni sui muscoli intercostali di due cimpanzé (*Anthropopithecus troglodytes*), un maschio adulto ed una femmina giovane⁽³⁾. Queste osservazioni hanno avuto particolarmente di mira la conoscenza della grandezza di sviluppo delle masse muscolari. Dopo l'esame morfologico *in situ*, i singoli muscoli intercostali di ognuno dei soggetti furono separati dalle loro inserzioni e pesati. Le pesate ottenute non hanno che un valore relativo, perchè i muscoli avevano subito da tempo l'azione della soluzione della formalina con la quale erano stati conservati i corpi dei due animali. Io ho pensato di esprimere questo valore relativo in funzione della intera massa muscolare degli intercostali: ciò non solo mi ha permesso di procedere al confronto tra loro di tutti i singoli muscoli dello stesso individuo, ma anche tra quelli dei due individui esaminati. Ri-

(1) Dall'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1920.

(3) Il ♂ morì nel Giardino zoologico di Roma il 14 febbraio 1919 la ♀ al circo Bisini di Roma il 22 giugno 1920. Ulteriori particolari e completi sui due soggetti sono dati in un lavoro più ampio in corso.

produco in una tabella i valori relativi ottenuti nel modo indicato: l'intera massa muscolare degli intercostali è considerata = 1000.

VALORE RELATIVO DEL PESO DEI MUSCOLI INTERCOSTALI
essendo il peso complessivo di tutta la massa dei muscoli intercostali
esterni ed interni = 1000.

Cimpanzè ♂ adulto						Cimpanzè ♀ giovane					
Muscoli intercostali esterni			Muscoli intercostali interni			Muscoli intercostali esterni			Muscoli intercostali interni		
Muscoli	D.	S.	Muscoli	D.	S.	Muscoli	D.	S.	Muscoli	D.	S.
	‰	‰		‰	‰		‰	‰		‰	‰
I	23,8	19,8	I	17,0	12,6	I	15,8	15,3	I	15,5	11,6
II	25,7	27,5	II	24,1	24,4	II	32,4	27,3	II	14,9	14,6
III	23,6	24,5	III	25,4	26,1	III	23,7	26,1	III	19,4	18,7
IV	22,5	20,5	IV	29,0	25,2	IV	29,1	25,7	IV	23,5	20,8
V	22,9	24,0	V	32,7	30,2	V	27,2	26,4	V	21,6	25,1
VI	23,5	19,9	VI	24,4	29,7	VI	25,6	22,3	VI	21,8	19,9
VII	19,6	16,0	VII	31,2	28,6	VII	22,7	19,2	VII	21,1	19,7
VIII	(14,4)	19,0	VIII	29,9	29,4	VIII	21,3	20,8	VIII	32,3	29,9
IX	12,3	12,0	IX	25,8	24,5	IX	20,4	18,4	IX	24,0	22,5
X	14,1	11,5	X	24,3	23,4	X	20,1	20,6	X	20,3	17,4
XI	14,3	10,4	XI	14,9	11,2	XI	16,3	20,1	XI	22,5	18,2
XII	11,5	10,6	XII	6,0	3,7	XII	14,9	12,3	XII	11,8	11,2
SOMMA	229,1	216,4	SOMMA	284,9	269,4	SOMMA	266,2	255,0	SOMMA	248,3	230,3

Dai valori della tabella e dai diagrammi con essi costruiti, per una più rapida sintetica visione dei fatti, si rileva:

Considerando le masse muscolari complessive:

1°) La massa muscolare complessiva degli intercostali esterni ed interni nei due soggetti è maggiore a destra. E ciò è in dipendenza ancora del fatto, che le masse muscolari complessive dei soli intercostali esterni e dei soli intercostali interni singolarmente considerate di fronte alle corrispondenti dell'altro lato sono maggiori a destra sia nel maschio sia nella femmina.

2°) La massa muscolare complessiva degli intercostali esterni è maggiore di quella degli intercostali interni nella femmina tanto a destra quanto a sinistra. Viceversa la massa muscolare complessiva degli intercostali interni è maggiore di quella degli intercostali esterni nel maschio sia a destra sia a sinistra.

3°) La massa dei muscoli intercostali esterni prossimali è maggiore di quella dei muscoli intercostali esterni distali sia nel maschio sia nella femmina.

4°) La massa dei muscoli intercostali interni intermedi è maggiore di quella dei prossimali e di quella dei distali sia nel maschio sia nella femmina.

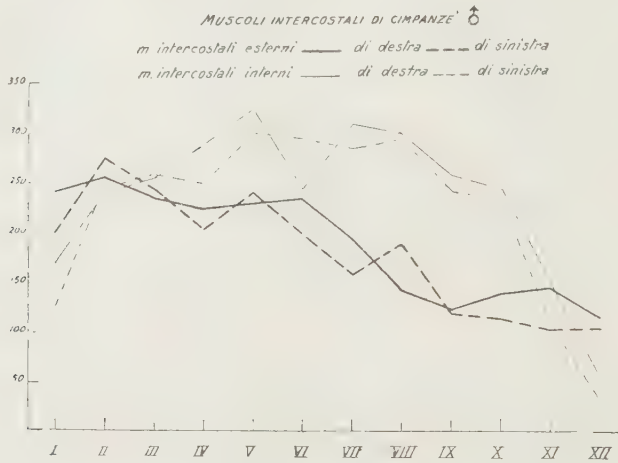


FIG. 1.

Considerando la massa di ogni singolo muscolo:

5°) Tra i muscoli intercostali esterni nel maschio prevalgono a sinistra i muscoli II, III, V, VIII; nella femmina i muscoli III, X, XI. Cioè

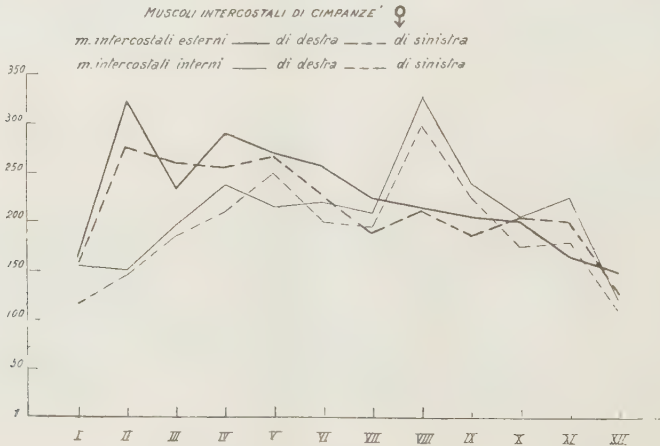


FIG. 2.

nei due soggetti vi è uno spazio intercostale prossimale a sinistra dove prevale il muscolo intercostale esterno su quello di destra e questo è il III. Distalmente la prevalenza a sinistra in qualche settore dei muscoli intercostali esterni è più prossimale nel maschio, alquanto più distale nella femmina.

6°) Tra i muscoli intercostali interni nel maschio prevalgono a sinistra i muscoli II e III di poco, il VI di molto; nella femmina il V sol-

tanto e di molto. Cioè è caratteristica la notevole prevalenza di un muscolo intercostale interno a sinistra, che nella femmina si trova in uno spazio intercostale immediatamente più prossimale di quello nel quale si trova nel maschio. Questa prevalenza dipende dalla prevalenza della massa muscolare della porzione intercartilaginea come lo dimostrano questi valori:

Peso relativo dei muscoli intercartilaginei essendo tutta la massa dei muscoli intercostali = 1000 *Cimpanzè* ♂.

Muscolo	D	S
V	10,3	10,2
VI	6,8	11,0
VII	5,5	5,2
VIII	4,9	5,4
IX	2,2	1,9

7°) Nella femmina prevalgono a destra i muscoli intercostali interni VIII, IX, X e XI sugli esterni dello stesso lato ed in ambedue i lati vi ha prevalenza massima per l'VIII, notevole per il IX. Nel maschio prevalgono i muscoli intercostali esterni I, II e XII sugli interni dello stesso lato ed in ambedue i lati. Pertanto, tenendo conto delle concordanze e divergenze rilevate nei due soggetti, in essi si ha ugualmente in ambedue i lati il predominio degli intercostali esterni I, II e XII sugli interni dello stesso lato e dei muscoli intercostali interni VIII, IX, sugli esterni del lato corrispondente.

Questi fatti assumono una importanza speciale se vengono tradotti nel loro significato funzionale, per cui, tenendo conto della diversità del sesso, possiamo ritenere che nello *cimpanzè*:

La potenzialità funzionale respiratoria prevale a destra in ambo i sessi. Ciò è conforme a quanto accade nell'uomo.

La potenzialità funzionale complessiva dei muscoli intercostali inspiratori (gli esterni) prevale su quella degli espiratori (muscoli intercostali interni) nella femmina, viceversa nel maschio. Ciò implica un tipo di respirazione diverso per i due sessi. Nella femmina la potenzialità degli intercostali inspiratori, maggiore che nel maschio, indica cioè un intervento di questi muscoli più attivo che nel maschio in relazione alla funzione inspiratoria del diaframma; nel maschio la potenzialità degli intercostali espiratori maggiore che nella femmina indica la esistenza di un intervento più attivo della massa muscolare a funzione antagonista di quella del diaframma. Il diverso grado di sviluppo nei due sessi della massa dei due gruppi di muscoli intercostali a funzione antagonista dimostra quindi nel maschio la tendenza al predominio del tipo respiratorio diaframmatico e nella femmina del tipo costale. Ciò è conforme a quanto comunemente si ammette per l'uomo.

La potenzialità funzionale dei muscoli inspiratori intercostali va gradualmente scemando dai settori prossimali ai distali; ciò dimostra che l'azione del diaframma si fa sempre più potente nell'atto inspiratorio quanto più di-

stale è il settore toracico e nel complesso si rileva evidente il compenso funzionale del sistema dei muscoli intercostali esterni con il diaframma per la fase inspiratoria.

La potenzialità dei muscoli espiratori intercostali è massima a livello degli spazi intercostali intermedi, cioè di quei settori del torace che subiscono di più l'azione espansiva nella fase inspiratoria.

Nei due tipi di respirazione, il diaframmatico ed il costale e quindi anche nei due sessi, però vi ha ugualmente il predominio costante della potenzialità inspiratoria dei due primi muscoli intercostali esterni su quella espiratoria dei relativi muscoli intercostali interni, e viceversa predominio costante della potenzialità espiratoria dei muscoli intercostali interni VIII, IX, che occupano gli spazi intercostali tra le costole spurie. Ciò dimostra che i muscoli intercostali intervengono sempre attivamente nei due momenti dell'atto respiratorio, e cioè i muscoli esterni più prossimali iniziando o regolando volta a volta la fase inspiratoria, gli interni distali la fase espiratoria.

La potenzialità inspiratoria del III muscolo intercostale esterno prevale costantemente a sinistra sulla destra in ambo i sessi. Ciò dimostra che a questo livello l'atto inspiratorio deve essere particolarmente rinforzato per superare una condizione di inerzia del torace alla fine della espirazione dipendente dalla posizione della estremità prossimale del cuore dislocata a questo livello.

La potenzialità espiratoria in modo notevole prevale a sinistra sulla destra nel maschio col VI muscolo intercostale interno, per la femmina col V muscolo intercostale interno. Anche questo fatto indica che l'attività espiratoria deve essere particolarmente rinforzata in questo lato per superare una condizione di inerzia dipendente dalla posizione distale del cuore alla fine della inspirazione. La differenza di uno spazio intercostale nei due soggetti è dipendente dal fatto, che nella femmina l'estremità distale del cuore è situata più prossimalmente che nel maschio. Questo si rileva bene dalla descrizione e dalle figure di Ruge⁽¹⁾, il quale però non ne rilevò l'importanza come elemento distintivo del sesso.

I due fatti precedenti confermano che i muscoli intercostali sia espiratori, sia inspiratori intervengono attivamente nella respirazione tranquilla e che in quei settori del torace dove l'azione dell'elasticità polmonare, che si accompagna a quella dei muscoli respiratori, non è sufficiente all'equilibrio dinamico dei due momenti della respirazione per ricondurlo volta a volta ed alternativamente alla posizione iniziale di una delle fasi dell'atto respiratorio, essa viene coadiuvata da un aumento della potenzialità muscolare dei muscoli intercostali. L'elasticità polmonare è appunto deficiente

⁽¹⁾ Georg Ruge, *Die Grenzlinien der Pleurasäcke und die Lagerung des Herzens bei Primaten, insbesondere bei den Anthropoiden*. Morph. Jahrb. XIX Bd, 1893.

a sinistra rispetto alla destra per la presenza del cuore, per cui occorre l'intervento più attivo dei muscoli intercostali o interni o esterni alternativamente in quel settore dove deve esser vinta una resistenza maggiore per iniziare una delle due fasi dell'atto respiratorio.

Il predominio sulla destra della potenzialità funzionale dell'intercostale interno, a sinistra, a livello dell'estremità distale del cuore è dovuta alla porzione intercartilaginea o ventrale del medesimo muscolo intercartilagineo; il che dimostra ancora una volta l'importanza dell'intervento attivo dei muscoli intercostali interni ed in particolare delle loro porzioni ventrali (vedi tabellina più sopra riportata).

La potenzialità funzionale espiratoria dei muscoli intercostali interni VIII, IX., che occupano gli spazi intercostali compresi tra le costole spurie, è prevalente in ambo i lati su quella inspiratoria dei muscoli intercostali esterni relativi. Ciò dimostra l'importanza dell'intervento attivo dei muscoli intercostali interni come antagonisti del diaframma a quel livello, nel quale questo raggiunge la sua massima potenzialità inspiratoria, e spiega la ragione della riduzione della potenzialità inspiratoria dei muscoli intercostali esterni compensata qui da quella notevole del diaframma ⁽¹⁾.

CONCLUSIONI. — Le mie osservazioni dimostrano:

- a) *l'esistenza di un complesso di leggi di sviluppo dei muscoli intercostali in funzione di altrettante leggi meccaniche della respirazione;*
- b) *l'esistenza nello cimpanzé di un tipo di respirazione differente per il sesso e che coincide con quanto si rileva nell'uomo.*

Queste conclusioni che non hanno la pretesa di avere chiuso il tema, vogliono essere di suggestione a più ampie e larghe indagini.

Chimica fisiologica. — *L'azoto proteico e l'azoto residuale nel siero di sangue di vari animali (vertebrati e invertebrati)* ⁽²⁾.
Nota del Dr. G. QUAGLIARIELLO, presentata dal Socio F. BOTTAZZI ⁽³⁾.

Riferisco in questa Nota alcuni dati relativi al contenuto in azoto proteico e in azoto residuale del siero di sangue o dei liquidi cavitari di animali vertebrati e invertebrati.

Questi dati ho raccolto in vari anni man mano che mi si è presentata l'occasione, o nel corso di altre ricerche. E sebbene in questi ultimi tempi la ripartizione dell'azoto nel sangue sia stato oggetto di minuta indagine da parte di diversi autori, tuttavia mi son deciso alla pubblicazione dei miei

(1) Circa la dottrina della meccanica respiratoria, che io seguo per i muscoli intercartilaginei, rimando al mio lavoro in corso.

(2) Lavoro eseguito nella Stazione Zoologica e nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.

(3) Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1920.

dati, sembrandomi che da essi possa ricavarsi qualche considerazione d'indole generale non priva d'interesse.

Dalle ricerche di Baglioni ⁽¹⁾, Bottazzi ⁽²⁾, Delaunay ⁽³⁾, Myers ⁽⁴⁾, risulta che nel sangue di tutti gli animali, anche degli invertebrati inferiori più semplici, quali i Celenterati (e in questo caso la denominazione sangue è adoperata nel suo significato più vasto), le sostanze proteiche non mancano mai. La loro concentrazione percentuale può scendere sino a pochi miligrammi, ma è sempre possibile svelarne la presenza coi comuni reattivi.

Dalle ricerche del Bottazzi (loc. cit.) risulta inoltre che, in linea generale, man mano che ci si eleva nella scala zoologica, dai Celenterati ai Mammiferi, il contenuto proteico del sangue aumenta. L'unica eccezione a questa regola è data dai Molluschi cefalopodi e da alcuni Artropodi, nel cui sangue è disciolta una quantità di proteine superiore a quella contenuta nel sangue dei Mammiferi.

Probabilmente la ragione di questa eccezione sta nel fatto, che in questi animali, i quali presentano una organizzazione già molto complessa e abbastanza perfetta, mentre la funzione respiratoria del sangue assume per la prima volta una considerevole importanza, la sostanza proteica a tale funzione deputata è disciolta nel sangue, e non fissata in speciali corpuscoli, come nei vertebrati; la quale ultima condizione importa una migliore utilizzazione della sostanza stessa.

Accanto alle sostanze colloidali, nel sangue di tutti gli animali esistono inoltre sostanze azotate non proteiche.

Le ricerche già citate di Delaunay e di Myers han dimostrato che tali sostanze sono le stesse, almeno qualitativamente, in tutti gli animali: aminoacidi, urea, acido urico, creatina, creatinina, ammoniaca, ecc.

I risultati delle indagini che qui riferisco contribuiscono a chiarire un altro punto, vale a dire, la concentrazione complessiva delle sostanze azotate non proteiche, e il loro rapporto alle sostanze proteiche, nella serie animale.

Il modo di raccolta del sangue (uso questa espressione anche pei liquidi cavitari degli invertebrati inferiori) variò naturalmente secondo la specie animale: ma in tutti gli esperimenti il sangue (il siero nei casi nei quali il sangue coagulava) fu sottoposto a una energica centrifugazione.

Le proteine furono precipitate mediante una soluzione satura di tannino, acidificata con acido acetico: dopo 24 ore si filtrava, e si lavava il precipitato con soluzione semisatura di tannino.

Nel precipitato e nel filtrato fu determinato l'azoto col metodo di Kjeldahl. Molte volte, quando la quantità di sangue raccolta lo permise, si determinò anche l'azoto totale direttamente.

Nella tabella I sono raccolti i dati analitici ordinati secondo la classificazione zoologica degli animali esaminati. Nella tabella II gli stessi dati sono ordinati secondo il valore crescente dell'azoto proteico. Inoltre in

questa tabella, ai valori riferentisi ad animali della stessa specie, è stato sostituito il loro valore medio.

Dall'esame delle tabelle risulta che l'azoto proteico, che si trova in tracce appena apprezzabili in alcuni invertebrati inferiori, sale a valori veramente cospicui nei cefalopodi e in alcuni crostacei decapodi. Nei vertebrati la variazione è meno sensibile, pure essendo notevole la differenza fra il sangue di *Emys* ad esempio, e quello di cane.

Volendo classificare gli animali pel contenuto proteico dei loro liquidi interni, si potrebbe dividerli in due grandi classi: alla prima appartengono quegli animali nel cui sangue è contenuto meno dell'1 % di proteine; essi sono tutti gl'invertebrati ad eccezione dei molluschi cefalopodi e di alcuni artropodi (crostacei decapodi); alla seconda classe invece appartengono quegli animali nel cui sangue trovasi più dell'1 % di proteine, vale a dire tutti i vertebrati, più gl'invertebrati sopra menzionati. Questi dati circa l'azoto proteico coincidono perfettamente con quanto ebbe già ad osservare Bottazzi (loc. cit.).

Interessante mi sembra il comportamento dell'azoto residuale. Questo, a prescindere dai Selacei, nel cui sangue, come è noto, è contenuto urea in notevole quantità, varia relativamente poco nei diversi tipi animali: da un minimo di mg. 1,3 (in *Sphaerechinus g.*) a un massimo di 108 (nell'*Emys*). E se si considerano a parte i Rettili e gli Uccelli, la variazione si riduce notevolmente: da un minimo di 1,3 a un massimo di 29 mmg. per 100 cm³. di sangue.

Così che, mentre l'azoto proteico del sangue dei vari tipi animali varia da 1 a 1700, l'azoto residuale varia soltanto da 1 a 30, o da 1 a 100 comprendendo anche i Rettili e gli Uccelli.

Questa relativa costanza dell'azoto residuale nel sangue di tutti gli animali, a qualsiasi classe appartenenti, considerata in confronto dell'enorme variabilità del contenuto proteico, è importante, perchè dimostra che la funzione fondamentale, elementare, per così dire, del sangue è quella di trasportare ai tessuti e dai tessuti i materiali anabolici e catabolici (aminoacidi, urea, ammoniaca, ecc.).

Solo successivamente, col perfezionarsi dell'organizzazione, il sangue assume altre funzioni, e allora, di pari passo collo sviluppo dell'apparecchio cardiovascolare, procede l'arricchimento del sangue in sostanze colloidali.

Bibliografia. — (1) Baglioni S., *Einige Daten zur Kenntniss der quantitativen Zusammensetzung verschiedener Körperflüssigkeiten von Seetieren* (Fischen und einigen Wirbellosen). *Hoim. Beiträge*, Bd. 9, pag. 50, 1907. — (2) Bottazzi F., *Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. Il contenuto in azoto proteico del siero del sangue dei diversi animali*. *Rend. R. Acc. dei Lincei*, vol. 17, serie 5^a, 2° sem. pag. 16, 1908. — (3) De-launay H., *Sur la répartition de l'azote restante du sang et du liquide cavitaire de quelques invertebrés*. *Compt. rend. Soc. de Biol.*, t. 74, pp. 151, 154 et 641, 1913. — (4) Myers R. G., *Blood of Invertebrates*, *Journ. of Biol. Chem.*, vol. 41, pag. 119, 1920.

TABELLA I.

TIPO	CLASSE	SPECIE	N in mg. per 100 cm ³ siero			% N totale		Proteine per 100 cm ³ sangue g.
			totale	proteico	residuale	N proteico	N residuale	
Celenterati	Antozoi	<i>Alcyonium palmatum</i> . .	64	39	25	60	40	0,244
Vermi	Anellidi	<i>Sipunculus nudus</i>	32	17	15	53	47	0,10
		" "	45	31	14	69	31	0,19
		" "	22	13	9	60	40	0,08
		" "	61	35	26	57	43	0,22
Echinodermi	Asteroidi	<i>Astropecten aurantiacus</i> . .	2,6	1,1	1,5	43	57	0,006
		" " . .	6	2	4	34	66	0,012
		<i>Asterias glacialis</i>	4	2,6	1,4	65	35	0,016
	Echinoidi	<i>Strongylocentrotus lividus</i> .	5,8	3,9	1,9	67	33	0,024
		<i>Sphaerechinus granularis</i> .	2,4	1,4	1,0	58	42	0,009
		" " .	5	3,4	1,6	68	32	0,02
	Oloturie	<i>Holoturia Poli</i>	4	—	—	—	—	—
		" "	3	1,4	1,6	47	53	0,009
Molluschi	Acefali	<i>Pectunculus violaceus</i> . .	76	60	16	79	21	0,375
		<i>Venus verrucosa</i>	39	29	10	75	25	0,181
	Gasteropodi	<i>Aplysia limacina</i>	25	21	4	84	16	0,13
		" "	15	13	2	87	13	0,09
		<i>Tethis fimbriata</i>	22	8	14	36	64	0,05
		<i>Tethis leporina</i>	6	2	4	33	67	0,012
		" "	5	2,3	2,7	47	53	0,014
		<i>Pleurobranchaea Meckeli</i> .	11,8	5,4	6,4	46	54	0,035
	Cefalopodi	<i>Octopus vulgaris</i>	1727	—	—	—	—	—
		" "	1528	1511	17	98,9	1,1	9,44
		" "	1669	1656	13	99,2	0,8	10,35
		" "	1288	1269	19	98,5	1,5	7,93
		<i>Eledone moschata</i>	1598	—	—	—	—	—
		" "	1788	1764	24	98,1	1,3	11,03
Artropodi	Crostacei de- capodi	<i>Carcinus moenas</i>	1126	1109	17	98,5	1,5	6,93
		<i>Portunus depurator</i>	518	483	35	93,2	6,8	3,02
		<i>Maja verrucosa</i>	213	201	12	94,4	5,6	1,26
		" "	565	533	32	94,4	5,6	3,33

Segue TABELLA I.

TIPO	CLASSE	SPECIE	N in mg. per 100 cm ³ siero			% N totale		Proteine per 100 cm ³ sangue g.
			totale	proteico	residuale	N proteico	N residuale	
Artropodi	Crostacei	<i>Maja squinado</i>	19,7	8,8	10,9	44,6	55,4	0,05
		" "	146	120	26	82,2	17,8	0,75
		" "	24	15,4	8,6	64	36	0,1
		" "	462	442	20	95,7	4,3	2,76
		<i>Eriphia spinifrons</i>	857	839	18	97,9	2,1	5,24
		<i>Homarus vulgaris</i>	833	821	12	98,6	1,4	5,13
		" "	714	675	39	94,5	5,5	4,22
		<i>Palinurus vulgaris</i>	932	920	12	98,8	1,2	5,76
		" "	719	710	9	98,8	1,2	4,44
Tunicati	Ascidieci	<i>Ciona intestinalis</i>	4,8	3,1	1,7	65	35	0,02
		" "	9,2	5,3	3,9	58	42	0,033
		" "	10,0	5,4	4,6	54	46	0,035
		<i>Ascidia mammillata</i>	12,3	6,7	5,6	55	45	0,042
		" "	10,6	6,1	4,5	58	42	0,038
Vertebrati	Pesci	<i>Torpedo marmorata</i>	1395	464	931	33,3	66,7	2,90
		<i>Torpedo ocellata</i>	1683	488	1195	29	71	3,05
		<i>Scyllium canicula</i>	2031	596	1435	29,4	70,6	3,72
	Anfibi	<i>Rana esculenta</i>	445	434	11	97,5	2,5	2,71
		<i>Bufo vulgaris</i>	397	385	12	97	3	2,41
	Rettili	<i>Emys europaea</i>	459	299	150	67,4	32,6	1,87
		" "	325	234	91	72	28	1,46
		" "	322	212	110	66	34	1,32
		<i>Talassochelys caretta</i>	253	235	18	92,9	7,1	1,47
		" "	596	481	115	80,7	19,3	3,00
	Uccelli	<i>Meleagris gallopavo</i>	714	607	106	85	15	3,79
		" "	689	591	98	85,6	14,4	3,69
		<i>Ovis aries</i>	935	910	25	97,3	2,7	5,69
		" "	1117	1089	28	98,4	1,6	6,81
		<i>Canis familiaris</i>	1043	1021	22	97,8	2,2	6,38
		<i>Sus domesticus</i>	990	970	20	98	2	6,06

TAVOLA II.

TIPO E CLASSE	SPECIE	100 cm ³ di siero contengono		
		Azoto proteico mg.	Azoto residuale mg.	Proteine g.
Echinodermi	<i>Holoturia Poli</i>	1,4	1,6	0,009
"	<i>Astropecten aurantiacus</i>	1,5	2,7	0,010
Molluschi. Gasteropodi	<i>Tethys leporina</i>	2,2	3,3	0,014
Echinodermi	<i>Sphaerechinus granularis</i>	2,4	1,3	0,015
"	<i>Asterias glacialis</i>	2,6	1,4	0,016
"	<i>Strongylocentrotus lividus</i>	3,9	1,9	0,024
Tunicati	<i>Ciona intestinalis</i>	4,6	3,4	0,029
Molluschi. Gasteropodi	<i>Pleurobranchaea Meckeli</i>	5,4	6,4	0,035
Tunicati	<i>Ascidia mammillata</i>	6,4		0,040
Molluschi. Gasteropodi	<i>Tethys fimbriata</i>	8	14	0,050
" "	<i>Aplysia limacina</i>	17	3	0,106
Vermi. Anellidi	<i>Sipunculus nudus</i>	24	16	0,150
Molluschi. Acefali	<i>Venus verrucosa</i>	29	10	0,181
Celenterati	<i>Alcyonium palmatum</i>	39	25	0,244
Molluschi. Acefali	<i>Pectunculus violaceus</i>	60	16	0,375
Artropodi. Crostacei	<i>Maja squinado</i>	147	16	0,918
Vertebrati. Rettili	<i>Emys europaea</i>	248	117	1,550
" "	<i>Talassochelys caretta</i>	358	66	2,237
Artropodi. Crostacei	<i>Maja verrucosa</i>	367	22	2,293
Vertebrati. Anfibi	<i>Bufo vulgaris</i>	385	12	2,406
" "	<i>Rana esculenta</i>	434	11	2,712
" Pesci	<i>Torpedo</i>	476	1063	2,975
Artropodi. Crostacei	<i>Portunus depurator</i>	483	35	3,019
Vertebrati. Pesci	<i>Scyllium canicula</i>	596	1435	3,725
" Uccelli	<i>Meleagris gallopavo</i>	599	102	3,743
Artropodi. Crostacei	<i>Homarus vulgaris</i>	748	25	4,675
" "	<i>Palinurus vulgaris</i>	815	11	5,093
" "	<i>Eriphia spinifrons</i>	839	18	5,240
Vertebrati. Mammiferi	<i>Sus domesticus</i>	970	20	6,062
" "	<i>Ovis aries</i>	1000	26	6,250
" "	<i>Canis familiaris</i>	1021	22	6,381
Artropodi. Crostacei	<i>Carcinus moenas</i>	1109	17	6,931
Molluschi. Cefalopodi	<i>Octopus vulgaris</i>	1479	16	9,243
" "	<i>Eledone moschata</i>	1764	24	03

Biologia. — *Sulla lotta naturale contro le larve di Anopheles per mezzo degli insetti acquatici* ⁽¹⁾. Nota II di ENRICO FEDERICI, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽²⁾.

III. COLEOTTERI. — I Coleotteri nostrali viventi nelle acque dolci si dividono comunemente, se non scientificamente, in tre famiglie principali: i Ditiscidi, i Girinidi, gli Idrofilidi ⁽³⁾. Chi conosca l'indole vorace e le abitudini predatrici delle larve e degli adulti della prima e seconda famiglia e delle larve della terza ⁽⁴⁾, attribuirà ad essi senza esitazione un'importanza considerevolissima nella distruzione naturale delle larve di anofeli; questa almeno sembra essere implicitamente l'opinione degli autori già citati, i quali, accennando in modo generale ai naturali nemici delle larve di anofeli, indicano senza eccezione come tali i Coleotteri acquatici. Non sarà tuttavia difficile dimostrare infondata questa asserzione.

È noto che le larve dei Ditiscidi, essendo provviste di un sistema respiratorio tracheale, sono costrette a risalire ogni tanto a fior d'acqua per attingere aria, mediante due tubetti situati all'estremità dell'addome; per far questo, la larva che si trova sul fondo, oppure in seno al liquido, va nuotando o camminando all'indietro sino a far emergere l'estremità dei tubi addominali, avvicinandosi alla superficie: così che tutto il corpo viene ad essere disposto obliquamente rispetto al pelo dell'acqua e non sale mai orizzontalmente ⁽⁵⁾. È possibile ottenere che questo atteggiamento si verifichi più spesso di quanto sia necessario alla respirazione, collocando le larve in recipienti poco profondi, ma nelle condizioni naturali (o in vasi più ampi), esse stanno ordinariamente nel fondo e risalgono soltanto quando le funzioni respiratorie lo rendono indispensabile. A questo punto è opportuno ricordare le condizioni in cui si svolge normalmente la vita delle larve di anofele; esse giacciono orizzontalmente sulla superficie (per lo più in mezzo alle piante galleggianti) e, quando discendono al disotto di essa, subito risalgono con

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma, durante l'estate del 1919.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1920.

(3) Conducono vita acquatica anche altri Coleotteri, cioè sono i Parnidi o Elmidi e alcuni Crisomelidi (subf. *Galerucinae*); ma dal nostro punto di vista possono trascurarsi senza danno.

(4) Gli Idrofilidi adulti si cibano di materia morta.

(5) Tale posizione si può osservare con particolare evidenza soprattutto nelle larve appartenenti a specie di maggiori dimensioni.

rapidissimi movimenti laterali del corpo, vermicolari o serpentiformi, riuscendo anche a spostarsi considerevolmente e all'improvviso. Perciò esse rarissimamente, e in modo eccezionale sempre, possono cadere sotto le mandibole dei Ditiscidi, le cui larve, sempre tarde e lente nei loro movimenti, non nuotano veramente, ma piuttosto strisciano e camminano sul fondo e sulle piante sommerse.

Larve di *Cybister*, tenute viventi per due mesi in laboratorio, divoravano gran numero di larve di Efemeridi (*Cloëon* ecc.) e di Libellulidi nei primi stadi del loro sviluppo (*Epithea*, *Libellula*, ecc.), perchè questi si mantenevano normalmente sul fondo del vaso o negli strati inferiori dell'acqua; ma non riuscivano mai a far preda di larve di anofeli, quando la superficie dell'acqua era ingombra di alghe galleggianti (che servivano di rifugio agli anofeli medesimi) e solo raramente ne afferravano qualcuno, in condizioni eccezionalmente favorevoli (limpidezza dell'acqua, assenza di ogni altra specie di preda), quali non possono assolutamente verificarsi in natura. I risultati di queste esperienze valgono anche per le larve degli altri maggiori e più comuni Ditiscidi (*Dytiscus*, *Acilius*), che hanno minime differenze morfologiche rispetto ai *Cybister*, e per quelle degli Idrofilidi, che vivono nelle identiche condizioni.

Altre esperienze fatte su molte larve di Ditiscidi e di Idrofilidi appartenenti a specie di piccole dimensioni, diedero risultati parimenti negativi: tutte le specie osservate sono voracissime, fino a divorarsi spesso fra loro, ma non mi è stato possibile, anche nelle condizioni più favorevoli, vederle cibarsi di anofeli.

Riuscirono invece in parte positive le esperienze fatte con i Coleotteri idrobii adulti, di cui ho potuto facilmente raccogliere un numero abbastanza considerevole di specie e di individui; la distruzione di anofeli operata da essi nelle esperienze di laboratorio dipende in parte dalle condizioni eccezionalmente favorevoli, ma in parte è anche da attribuirsi alle abitudini dei Coleotteri adulti, i quali, soprattutto a causa del loro modo di respirazione, nuotano continuamente in senso verticale, dal basso in alto e viceversa, mentre nello stesso tempo si spostano orizzontalmente, correndo sul fondo. In tal modo, specialmente se in gran numero, possono occasionalmente far preda di anofeli.

Ciononostante è certo che, mentre per gli altri gruppi di animali acquatici i Coleotteri carnivori debbono rappresentare una causa importantissima di distruzione, nel caso particolare degli anofeli questi risultano, mercè le loro peculiari condizioni di vita, singolarmente ed efficacemente difesi dalla voracità predatrice di essi.

IV. RINCOTI. — I Rincoti idrobii sono rappresentati da vari generi, raggruppati generalmente in quattro famiglie, che noi considereremo separatamente:

a) *Idrometridi*. — I generi più comuni (*Velia*, *Gerris*, *Hydrometra*) si trovano ordinariamente in acque stagnanti o lentamente correnti, esposte al sole o più spesso ombreggiate, alla superficie delle quali corrono a rapidi sbalzi. Sono carnivori e mostrano nutrirsi, sia nelle condizioni naturali, sia negli esperimenti compiuti in laboratorio, anche di larve di anofeli, che affermano e tengono ferme con le zampe anteriori, mentre ne succhiano il contenuto pungendole col rostro. Ricorderò che alcuni autori citano casi di zanzare adulte, prese e succhiate da *Idrometridi* ⁽¹⁾.

b) *Nepidi*. — Comprendono i generi *Nepa* e *Ranatra*, ambedue comunissimi, tanto come larve, quanto come adulti, ma inefficaci dal nostro punto di vista, trattandosi di insetti pigri, che strisciano ordinariamente sul fondo o si tengono aderenti alle piante sommerse (aspettando in agguato il passaggio della preda) e che presentano un modo di respirazione analogo a quello delle larve dei Ditiscidi. Le Nepe e le Ranatre hanno infatti l'estremità posteriore dell'addome prolungata in tubi respiratori, dei quali si servono risalendo obliquamente in seno al liquido, fino a far sporgere il loro apice alla superficie, mentre il resto del corpo e la testa pendono in basso. Vale perciò anche in questo caso l'osservazione fatta pei Ditiscidi, che cioè l'animale sia condotto dalla sua caratteristica posizione a cercare cibo al disotto di sé piuttosto che al disopra e non possa ordinariamente far preda di organismi superficiali, come gli anofeli.

c) *Nauccridi* e *Notonettidi*. — I generi *Notonecta*, *Corisa*, *Naucoris* ed altri di minori dimensioni e di più scarsa diffusione (*Ploa*, *Sigara* ecc.) sono veramente distruttori voracissimi di anofeli, tanto che io non esito ad attribuir loro, pel nostro punto di vista, una importanza preponderante. I tre generi summenzionati presentano notevole uniformità di caratteristiche etologiche, dimensioni fra loro poco diverse e grandissima voracità: ricordano da vicino le abitudini dei Coleotteri acquatici adulti e, come questi, percorrono incessantemente gli strati liquidi dal basso in alto e viceversa, facendo tuttavia più lunghe e frequenti stazioni alla superficie (specialmente le notonette) ove inseguono la preda fra gli ammassi di alghe galleggianti, afferandola con le zampe anteriori e trafiggendola col rostro. È facile constatare che le notonette sostano per lo più alla superficie dell'acqua, su cui si muovono in modo caratteristico, e sono ordinariamente natanti quando si trovano in seno al liquido; viceversa *Naucoris* e *Corisa* alternano disordinate scorriere, tanto sul fondo quanto alla superficie, con periodi di sosta durante i quali si mantengono immobili tra i vegetali sommersi. Credo perciò

(1) « Die Nahrung der Hydrometriden besteht aus schwächeren Insekten, besonders wohl auch aus eben ausgeschlüpften Mücken, die sie mit ihrem Stech- oder Sauggrüssel aussaugen » (E. Schmidt-Schwedt, *Kerfe und Kerflarven des süßen Wassers*, in « Tier- und Pflanzenwelt des Süßwassers », herausg. v. C. Zacharias, II Bd. Leipzig, 1891).

(e la comparazione degli esperimenti che ho istituito, allevando in laboratorio numerosi esemplari di Rincoti acquatici, mi conferma nella mia opinione) che le notonette siano, relativamente agli altri insetti e tenendo anche conto della loro frequenza e diffusione, da annoverarsi fra i più voraci distruttori di anofeli ⁽¹⁾. Debbo infine ricordare come tale anche una piccola e voracissima specie di Notonettide, molto comune nei dintorni di Roma e rimasta finora indeterminata.

(¹) Anche un autore tedesco, il Dempwolf (cit. da Tänzer e Osterwald), in un lavoro che non ho potuto vedere (*Notonecta als Malaria bekämpferin*. Deutsches Kolonialbl. 14 Jahrg. n. 5) indica la notonetta come un mezzo di lotta antimalarica naturale.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1920.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Osservazioni circa il carattere quadratico dei numeri in un corpo quadratico.* Nota del Socio L. BIANCHI ⁽¹⁾.

1. Se in un corpo algebrico $K(\theta)$ consideriamo un qualunque *ideale primo* P , e con ω indichiamo un intero del corpo, non divisibile per P , il simbolo $\left[\frac{\omega}{P} \right]$ denoterà l'unità positiva o negativa, secondo che la congruenza

$$(1) \quad x^2 \equiv \omega \pmod{P}$$

è solubile, ovvero insolubile, con un intero x del corpo $K(\theta)$. All'ideale primo P è coordinato un ordinario numero primo p (il più piccolo numero razionale intero contenuto in P).

Quando $p = 2$, allora è sempre $\left[\frac{\omega}{P} \right] = +1$, ossia ω è residuo quadratico (mod P), e la congruenza (1) ha una sola radice. Se p è dispari, come ora supponiamo, può essere $\left[\frac{\omega}{P} \right] = +1$, ovvero $\left[\frac{\omega}{P} \right] = -1$, e nel primo caso la (1) ha due radici. In ogni caso vale pel simbolo $\left[\frac{\omega}{P} \right]$,

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1920.

che diciamo di Dirichlet, il criterio generalizzato di Eulero

$$\left[\frac{\omega}{P} \right] = \pm 1, \text{ secondo che } \omega^{\frac{1}{2}\Phi(P)} \equiv \pm 1 \pmod{P},$$

dove con $\Phi(P)$ si è indicato la funzione aritmetica generalizzata di Gauss

$$\Phi(P) = NP - 1$$

e con NP s'intende la norma dell'ideale P

$$NP = p^f,$$

l'esponente f essendo il grado dell'ideale P .

Nelle sue celebri ricerche sulle forme binarie quadratiche nel *campo di Gauss* [1, 2], Dirichlet ha ridotto, per questo corpo quadratico, il calcolo del simbolo $\left[\frac{\omega}{P} \right]$ a quello di un ordinario simbolo di Legendre $\left(\frac{a}{p} \right)$. Non constandomi che sia stata osservata la riduzione del tutto analoga pel caso di un corpo quadratico qualunque, dimostro in questa breve Nota le due formole relative.

2. Indicando con m un numero razionale intero, positivo o negativo, ma privo di fattori quadrati, il corpo quadratico $K(\sqrt{m})$ ha il numero *fondamentale* D dato da

$$\begin{aligned} D &= 4m, & \text{se } m \not\equiv 1 \pmod{4} \\ D &= m, & \text{per } m \equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Una *base* per gli interi del corpo è data da

$$[1, \theta],$$

avendo posto

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{m}, & \text{per } m \not\equiv 1 \pmod{4} \\ \theta &= \frac{-1 + \sqrt{m}}{2}, & \text{per } m \equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Gli ideali primi P del corpo $K(\sqrt{m})$, a numero primo coordinato p dispari, sono da distinguersi in tre specie, a seconda che si presenta uno dei tre casi possibili seguenti

$$\begin{aligned} a) \quad \left(\frac{m}{p} \right) &= -1, & b) \quad \left(\frac{m}{p} \right) &= +1, \\ c) \quad m &\text{ divisibile per } p \text{ o } \left(\frac{m}{p} \right) &= 0. \end{aligned}$$

L'accennata formola di riduzione assume due diversi aspetti, secondo che

ci troviamo nel caso a), ovvero in uno degli altri due b) o c). Pel caso a) dimostreremo che si ha la formola di riduzione

$$(A) \quad \left[\frac{\omega}{P} \right] = \left(\frac{N\omega}{p} \right),$$

dove $N\omega$ denota la norma del numero ω .

In questo primo caso a) l'ideale principale (p) coincide coll'ideale primo P (di 2° grado) ed è $NP = p^2$. La congruenza (1) equivale perfettamente all'altra

$$x^2 \equiv \omega \pmod{p},$$

dalla quale prendendo le norme dei due numeri congrui x^2, ω , risulta

$$(Nx)^2 \equiv N\omega \pmod{p};$$

la risolubilità della (1) porta quindi la risolubilità dell'altra nel *campo razionale*

$$(2) \quad \xi^2 \equiv N\omega \pmod{p}.$$

Vediamo dunque che, se nella (A) il valore del simbolo a sinistra è -1 , tale è anche quello del simbolo a destra. Basterà quindi provare che inversamente se $\left(\frac{N\omega}{p} \right) = +1$ è anche $\left[\frac{\omega}{P} \right] = +1$, cioè che, supposta solubile la (2) (nel campo razionale), è pure solubile la (1) nel campo $K(\sqrt{m})$.

Cominciamo per ciò dal supporre $m \not\equiv 1 \pmod{4}$, indi $\theta = \sqrt{m}$, e posto

$$\omega = a + b\sqrt{m},$$

con a, b interi razionali, avremo

$$N\omega = a^2 - mb^2.$$

Per ipotesi esiste un intero razionale s che soddisfa alla congruenza (2)

$$s^2 \equiv a^2 - mb^2 \pmod{p};$$

dobbiamo provare l'esistenza di due numeri razionali interi t, u , tali che sussista la congruenza

$$(t + u\sqrt{m})^2 \equiv a + b\sqrt{m} \pmod{p}.$$

Questa si scinde, nel campo razionale, nelle due

$$(4) \quad \begin{cases} t^2 + mu^2 \equiv a \\ 2tu \equiv b \end{cases} \pmod{p}$$

e se dapprima consideriamo il caso $b \equiv 0 \pmod{p}$, sarà certamente $\left(\frac{N\omega}{p}\right) = \left(\frac{a^2}{p}\right) = +1$ e dovremo provare che anche $\left[\frac{\omega}{p}\right] = +1$, ossia che le (4) ammettono soluzioni. E infatti, siccome $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, perchè ω non è divisibile per P , avremo

$$\left(\frac{a}{p}\right) = +1, \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{a}{p}\right) = -1.$$

Nel primo caso basta prendere $u = 0$ e per t una radice della congruenza $t^2 \equiv a \pmod{p}$; nel secondo caso si assuma $t = 0$ e si prenda u come radice della congruenza

$$mu^2 \equiv a \pmod{p},$$

la quale è solubile, perchè m è non residuo come $a \pmod{p}$.

Sia ora $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, e si osservi che da

$$(Nx)^2 = (t^2 - mu^2)^2 \equiv s^2 \pmod{p}$$

segue

$$t^2 - mu^2 \equiv \pm s \pmod{p},$$

che, combinata per addizione e sottrazione colla prima delle (4), dà

$$(5) \quad \begin{aligned} 2t^2 &\equiv a \pm s \pmod{p}, \\ 2mu^2 &\equiv a \mp s \pmod{p}. \end{aligned}$$

Ma per la prima delle (3)

$$2(a - s) \cdot 2(a + s) \equiv 4mb^2 \pmod{p},$$

onde, essendo $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$, segue

$$\left(\frac{2(a-s)}{p}\right) \cdot \left(\frac{2(a+s)}{p}\right) = -1.$$

Poniamo p. e. che sia

$$\left(\frac{2(a+s)}{p}\right) = +1, \quad \left(\frac{2(a-s)}{p}\right) = -1,$$

e scegliendo nelle (5) i segni superiori, queste risulteranno solubili. Inoltre, dalla loro moltiplicazione, risulta

$$4mt^2u^2 \equiv a^2 - s^2 \equiv mb^2 \pmod{p},$$

ossia

$$4t^2u^2 \equiv b^2$$

$$2tu \equiv \pm b \pmod{p},$$

e disponendo dei segni di t, u possiamo così soddisfare anche la seconda delle (4). Nel caso $m \equiv 1 \pmod{4}$ la formola (A) è così dimostrata.

3. Per provare che sussiste la medesima formola (A) anche nel caso $m \equiv 1 \pmod{4}$, ove è da prendersi

$$\theta = \frac{-1 + \sqrt{m}}{2},$$

osserviamo che l'equazione quadratica per θ si scrive ora

$$(6) \quad \theta^2 + \theta - \frac{m-1}{4} = 0,$$

e se $a + b\theta$ è un intero qualunque del corpo (a, b interi razionali), per la sua norma si ha

$$N(a + b\theta) = a^2 - \frac{m-1}{4} b^2 - ab.$$

Dobbiamo ora provare che, se è solubile in s la congruenza

$$(7) \quad s^2 \equiv a^2 - \frac{m-1}{4} b^2 - ab,$$

è solubile anche l'altra in t, u

$$(t + u\theta)^2 \equiv a + b\theta \pmod{p}.$$

Questa, sviluppata con riguardo alla (6), si sdoppia, nel campo razionale, nelle due

$$(8) \quad \begin{cases} t^2 + \frac{m-1}{4} u^2 \equiv a \\ 2tu - u^2 \equiv b \end{cases} \pmod{p}.$$

Come al numero precedente, consideriamo capprima il caso $b \equiv 0 \pmod{p}$, indi $a \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Se $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$ prendiamo $u = 0$ e t come radice di $t^2 \equiv a \pmod{p}$;

se invece $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, facciamo $u = 2t$ e, per soddisfare anche alla prima delle (8), prendiamo t dalla congruenza

$$mt^2 \equiv a \pmod{p},$$

che è solubile perchè a ed m sono insieme non residui \pmod{p} .

Considerando ora il caso generale $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, alle (8) associamo l'altra

$$N(t + u\theta) \equiv \pm s,$$

ossia

$$(8^*) \quad t^2 - \frac{m-1}{4} u^2 - tu \equiv \pm s \pmod{p}.$$

Le (8), (8*), risolte rapporto a t^2, u^2, tu . danno il sistema equivalente:

$$(9) \quad \begin{cases} mt^2 \equiv \frac{m+1}{2} a + \frac{m-1}{4} (b \pm 2s) \\ mu^2 \equiv 2a - (b \pm 2s) \\ mtu \equiv a + \frac{m-1}{2} b \mp s. \end{cases} \pmod{p}$$

Ma dalla (7), scritta sotto la forma

$$(2a - b)^2 - 4s^2 = (2a - b - 2s)(2a - b + 2s) \equiv mb^2 \pmod{p},$$

avendosi $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$, vediamo che il prodotto

$$(2a - b - 2s)(2a - b + 2s)$$

è un non residuo \pmod{p} , cioè

$$\left(\frac{2a - b - 2s}{p}\right) = \mp 1, \quad \left(\frac{2a - b + 2s}{p}\right) = \mp 1.$$

E allora nelle (9) prendiamo quella determinazione di segni che rende, nella media delle (9), il secondo membro non residuo \pmod{p} : così questa sarà risolubile e si potrà scegliere fra due valori opposti per u . Dopo ciò, la terza delle (9), essendo $u \not\equiv 0 \pmod{p}$, individuerà un valore di t , che soddisferà insieme la prima delle (9). Quest'ultima cosa risulta evidente servendosi dell'identità

$$\left\{a + \frac{m-1}{2} b \mp s\right\}^2 \equiv \left\{\frac{m+1}{2} a + \frac{m-1}{4} (b \pm 2s)\right\} \cdot \{2a - (b \pm 2s)\},$$

la quale, a meno del fattore m , non è altro che la (7).

Concludiamo adunque: *Per quegli ideali primi P del corpo quadratico, che sono al tempo stesso ideali principali, vale la formola di riduzione (A) del simbolo di Dirichlet al simbolo di Legendre.*

4. Veniamo al secondo caso b), ove $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$. Qui l'ideale principale (p) si scompone nel prodotto PP' di due ideali primi coniugati e *diversi*, che possiamo definire mediante le loro basi come segue.

Si consideri dapprima il caso $m \not\equiv 1 \pmod{4}$, e indichi α una radice della congruenza

$$(10) \quad \alpha^2 \equiv m \pmod{p};$$

potremo prendere

$$(11) \quad P = [p, \alpha + \sqrt{m}],$$

indi pel coniugato

$$(11') \quad P' = [p, -\alpha + \sqrt{m}].$$

Se si suppone solubile la congruenza

$$(12) \quad x^2 \equiv a + b\sqrt{m} \pmod{P},$$

cioè

$$\left[\frac{a + b\sqrt{m}}{P} \right] = +1,$$

siccome $NP = p$, e i numeri razionali

$$0, 1, 2, \dots, p-1$$

formano già un sistema completo di numeri incongrui \pmod{p} , il valore della incognita x nella (12) può assumersi razionale intero. Ma ogni numero dell'ideale P , colla base (11), ha la forma

$$rp + s(\alpha + \sqrt{m}) \quad (r, s \text{ razionali interi})$$

e la (12), ovvero

$$x^2 = a + b\sqrt{m} + rp + s(\alpha + \sqrt{m}),$$

si sdoppia nelle due nel campo razionale

$$\begin{cases} x^2 = a + s\alpha + rp \\ s = -b \end{cases}$$

che equivalgono alla congruenza

$$x^2 \equiv a - \alpha b \pmod{p}.$$

Così, se $\left[\frac{a + b\sqrt{m}}{P} \right] = +1$ è anche $\left(\frac{a - \alpha b}{p} \right) = +1$, ma anche viceversa da questa seconda eguaglianza segue la prima. Nel caso attuale $m \not\equiv 1 \pmod{4}$ la formola di riduzione domandata si scrive dunque

$$(B) \quad \left[\frac{a - b\theta}{P} \right] = \left(\frac{a - \alpha b}{p} \right).$$

È facile vedere che questa medesima formola sussiste anche nel caso $m \equiv 1 \pmod{4}$, purchè s'intenda allora per α una radice della congruenza

$$\alpha^2 - \alpha - \frac{m-1}{4} \equiv 0 \pmod{p},$$

ossia

$$(10^*) \quad (2\alpha - 1)^2 \equiv m \pmod{p},$$

chè allora per base dell'ideale P possiamo prendere

$$P = [p, \alpha + \theta],$$

e pel coniugato P'

$$P' \equiv [p, \alpha' + \theta], \quad \alpha' = 1 - \alpha,$$

e basta procedere come sopra.

Resta solo da considerare il terzo caso c) in cui $m \equiv 0 \pmod{p}$, e l'ideale principale (P) è il quadrato di un ideale primo P , coincidente col coniugato P' , e colla base

$$\begin{aligned} & [p, \sqrt{m}], \quad \text{se } m \not\equiv 1 \pmod{4} \\ & \left[p, \frac{p+1}{2} + \theta \right], \quad \text{se } m \equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Ma si osserva subito che la medesima formola (B) è applicabile anche in questo caso, ove si ponga $\alpha = 0$ quando $m \not\equiv 1 \pmod{4}$. ed $\alpha = \frac{p+1}{2}$ (o $\alpha \equiv \frac{1}{2}$) quando $m \equiv 1 \pmod{4}$.

Non lasceremo di osservare che dalla formola (B) risulta un facile confronto fra i due caratteri quadratici che uno stesso numero ω del corpo offre rispetto a due ideali primi coniugati (diversi) P, P' , colla formola

$$\left[\frac{\omega}{P} \right] \left[\frac{\omega}{P'} \right] = \left(\frac{N\omega}{p} \right),$$

in parole: Ogni numero ω del corpo quadratico ha, rispetto a due ideali primi coniugati diversi del corpo, caratteri quadratici concordanti o discordanti secondo che la sua norma è residuo o non residuo del numero primo p coordinato ai due ideali.

Matematica. — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota V del Corrispondente GINO FANO ⁽¹⁾.

1. A seguito di quanto detto nella precedente Nota IV ⁽²⁾, esaminiamo ora il caso di una superficie del 4° ordine F^4 condotta nel modo più generale per una curva di genere 2 e ordine dispari $m = 2h - 1$ ($m \geq 5$, $h \geq 3$).

Per questa curva passa un sistema lineare di superficie di ordine h , non contenenti la F^4 come parte, di dimensione non inferiore a

$$\binom{h-3}{3} - 1 - \binom{h-1}{3} - 1 - 1 - 1(2h-1) - 2 - 1 = h + 2$$

le quali segano ulteriormente F^4 secondo un sistema, appunto ∞^{h+2} , di curve di ordine $2h + 1$ e genere $h + 2$. Perchè la C_2^{2h-1} stia, oltre che sopra F^4 , anche in una F^{h-1} non contenente F^4 come parte, occorrono ancora, se $h > 3$, altre $h - 3$ condizioni.

La $C_2^{2h-1} \equiv \gamma$ e la sezione piana C costituiscono sopra F^4 una base di determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 2h-1 \\ 2h-1 & 4 \end{vmatrix} = -(2h-1)^2 - 8;$$

base che sarà perciò minima, ogni qualvolta $(2h-1)^2 - 8$ non ammetta alcun divisore quadrato perfetto. Supponiamo per ora che così sia.

La determinazione delle reti di genere 2 esistenti sopra F^4 (del tipo $\lambda\gamma + \mu C$) dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione:

$$(1) \quad \lambda^2 + (2h-1)\lambda\mu + 2\mu^2 = 1;$$

e la determinazione delle eventuali curve razionali (di genere virtuale zero, e grado virtuale -2) dipende dall'altra equazione:

$$(2) \quad \lambda^2 + (2h-1)\lambda\mu + 2\mu^2 = -1.$$

Per ogni soluzione intera di una delle due equazioni precedenti, sarà λ dispari (se no sarebbero pari tutti tre i termini del 1° membro), e, per

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1920.

(2) Questi Rendiconti, pag. 175.

conseguenza, μ *pari* (se no sarebbe di nuovo pari il 1° membro) ⁽¹⁾. Possiamo perciò applicare la sostituzione:

$$\lambda = t - (2h - 1)u \quad \mu = 2u$$

trasformando le (1) e (2) nell'equazione di Fermat-Pell (col doppio segno al 2° membro):

$$(3) \quad t^2 - \{ (2h - 1)^2 - 8 \} u^2 = \pm 1$$

della quale si dovranno cercare tutte le soluzioni intere, tali che la curva corrispondente

$$(4) \quad \{ t - (2h - 1)u \} \gamma + 2u\mathbf{C}$$

risulti effettiva, vale a dire abbia l'ordine

$$\{ t - (2h - 1)u \} (2h - 1) + 8u > 0.$$

A questa condizione soddisfanno (come nella Nota prec.) le soluzioni per le quali t è positivo. Infatti la condizione indicata può scriversi

$$(2h - 1)t - \{ (2h - 1)^2 - 8 \} u > 0;$$

e si può verificare anzitutto ch'essa è soddisfatta se t, u sono entrambi positivi ⁽²⁾. Premesso questo, è chiaro ch'essa sarà pure soddisfatta conservando invariato t e cambiando di (solo) segno la u .

L'equazione (3) ha infinite soluzioni se al 2° membro si prende il segno $+$, e può invece averne o anche non averne quando vi si prenda il segno negativo. Poichè il coefficiente $(2h - 1)^2 - 8$ è congruo, mod. 4, a $+1$, vi sono certo soluzioni, col segno negativo al 2° membro, se detto coefficiente è numero primo, mentre possono esservene o anche non esservene se $(2h - 1)^2 - 8$ non è numero primo ⁽³⁾. I valori più piccoli di h pei quali $(2h - 1)^2 - 8$ non è numero primo sono $h = 7, 8, 14, 15, \dots$; per questi valori di h la (3), col segno negativo al 2° membro, non ammette soluzioni.

⁽¹⁾ Anzi, nella (1) deve essere μ multiplo di 4; nella (2) invece μ semplicemente pari (non multiplo di 4). Perciò nella (3) sarà u pari o dispari (t invece rispett. dispari o pari), secondo che vi si prende il segno $+$ oppure il segno $-$.

⁽²⁾ Dalla (3) emerge che, per t, u positivi, sarà $t < (2h - 1)u$; se dunque, nel primo membro della (3) stessa, a uno dei due fattori t del primo termine sostituiamo la quantità maggiore $(2h - 1)u$, renderemo positivo detto membro. Dopo di che, dividendo per u , si ha quanto richiesto.

⁽³⁾ Legendre, *Théorie des nombres* (Paris, 1830), vol. 1°, pag. 65, come pure tavola X, nota alla fine del volume.

2. Supponiamo che la (3), sempre col segno negativo, ammetta soluzioni: e sia t_1, u_1 la più piccola sua soluzione positiva. Allora l'espressione

$$(5) \quad t_n + u_n \sqrt{D} = (t_1 + u_1 \sqrt{D})^n \quad (D = (2h-1)^2 - 8)$$

darà per valori dispari di n tutte le soluzioni intere positive della stessa equazione, e per valori pari di n quelle della stessa (3) col segno $+$ al 2° membro.

La soluzione t_1, u_1 conduce a una curva razionale

$$\gamma_1 \equiv \{t_1 - (2h-1)u_1\} \gamma + 2u_1 C \equiv 2u_1 C - \{(2h-1)u_1 - t_1\} \gamma$$

che si può effettivamente costruire sopra F^4 , come residua di un gruppo di $(2h-1)u_1 - t_1$ curve γ rispetto al sistema multiplo secondo $2u_1$ delle sezioni piane. Invero, quest'ultimo sistema, essendo di genere $8u_1^2 + 1$, è anche di dimensione $8u_1^2 + 1$. Ora, la prima γ impone a una F^{2u_1} obbligata a contenerla $2u_1 \cdot (2h-1) - 1$ condizioni (al più); e, per le successive γ , questo numero diminuisce di due unità per volta; ricordando pertanto che la somma dei primi r numeri dispari vale r^2 , le condizioni imposte a una F^{2u_1} , complessivamente, dalle $(2h-1)u_1 - t_1$ curve γ saranno (al più) in numero di

$$\begin{aligned} & 2u_1 \cdot (2h-1) \{ (2h-1)u_1 - t_1 \} - \{ (2h-1)u_1 - t_1 \}^2 \\ &= \{ (2h-1)u_1 - t_1 \} \{ (2h-1)u_1 + t_1 \} \\ &= (2h-1)^2 u_1^2 - t_1^2 = 8u_1^2 + 1. \end{aligned}$$

Esiste dunque certo una F^{2u_1} , non contenente F^4 come parte, e passante per $(2h-1)u_1 - t_1$ curve γ ; e esiste quindi la curva, già riconosciuta come razionale, intersezione residua di tale F^{2u_1} con F^4 . Insieme ad essa esisterà pure l'altra curva razionale $\{t_1 + (2h-1)u_1\} \gamma - 2u_1 C$, trasformata della prima mediante l'involuzione $I(t' = t, u' = -u)$, cui appartiene la rete γ . Tali curve saranno irriducibili; vedremo infatti che sopra F^4 tutte le altre curve di genere virtuale zero contengono o l'una o l'altra di queste come parte.

3. Le altre soluzioni positive t_n, u_n dell'equazione (3), essendo t_n, u_n definiti dalla (5), condurranno a curve

$$\gamma_n \equiv \{t_n - (2h-1)u_n\} \gamma + 2u_n C$$

di grado virtuale -2 oppure $+2$, perciò di genere virtuale *zero* oppure *due*, secondo che n è dispari o pari, e perciò secondo che si tratta di soluzioni della (3) col segno $-$ oppure col segno $+$ al 2° membro.

Per $n = 2$ si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \{t_2 - (2h-1)u_2\} \gamma + 2u_2 C \\ &= \{2t_1^2 + 1 - (2h-1) \cdot 2u_1 t_1\} \gamma + 2 \cdot 2u_1 t_1 C = \gamma + 2t_1 \gamma_1 = (\gamma + t_1 \gamma_1) + t_1 \gamma_1 \end{aligned}$$

vale a dire il sistema $|\gamma_2|$, di genere 2 e grado virtuale 2, risulta composto del sistema $|\gamma + t_1 \gamma_1|$, di grado $2(t_1^2 + 1)$ e dimensione $t_1^2 + 2$, e di una parte fissa, multipla secondo t_1 della curva razionale γ_1 , incontrata al n. prec., e colla quale la parte variabile $\gamma + t_1 \gamma_1$ non ha alcun punto a comune ⁽¹⁾.

Analogamente, per $n = 3$, si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \{t_3 - (2h - 1) u_3\} \gamma + 2u_3 C \\ &= \{t_1 t_2 + Du_1 u_2 - (2h - 1) (u_1 t_2 + u_2 t_1)\} \gamma + 2(u_1 t_2 + u_2 t_1) C \end{aligned}$$

dove $D = (2h - 1)^2 - 8$. Raccogliendo il fattore t_2 nei termini che lo contengono, ponendo negli altri termini $u_2 = 2u_1 t_1$, e ricordando la (3), onde $Du_1^2 = t_1^2 + 1$, si ricava:

$$\gamma_3 = 2t_1 \gamma - t_1 \gamma_1 - t_2 \gamma_1$$

ancora somma di un multiplo del sistema $|\gamma + t_1 \gamma_1|$ e di una parte fissa, multipla della curva razionale γ_1 , fondamentale per $|\gamma + t_1 \gamma_1|$.

Dico ora che, in generale:

$$\gamma_n = A_{n-1}(\gamma + t_1 \gamma_1) + t_{n-1} \gamma_1$$

dove le A sono definite mediante la relazione ricorrente $A_n = t_{n-1} + t_1 A_{n-1}$, coi valori iniziali $A_0 = 0$, $A_1 = 1$; perciò, per $n \geq 2$:

$$A_n = t_{n-1} + t_{n-2} t_1 + t_{n-3} t_1^2 + \dots + t_2 t_1^{n-3} + 2t_1^{n-1}$$

valore certamente positivo. Invero, essendo tali relazioni verificate per $n = 2$ e $n = 3$, basterà mostrare che sono verificate per l'indice $n + 1$, nell'ipotesi che lo siano per l'indice n . Ora:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \{t_{n+1} - (2h - 1) u_{n+1}\} \gamma + 2u_{n+1} C \\ &= \{t_1 t_n + Du_1 u_n - (2h - 1) (u_1 t_n + u_n t_1)\} \gamma + 2(u_1 t_n + u_n t_1) C. \end{aligned}$$

Raccogliendo il fattore t_n nei termini che lo contengono, e ricordando che $Du_1 u_n - t_1 t_n = t_{n-1}$ ⁽²⁾, si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= t_n \gamma_1 + t_{n-1} \gamma + t_1 \gamma_n = t_n \gamma_1 + t_{n-1} \gamma + t_1 \{A_{n-1}(\gamma + t_1 \gamma_1) + t_{n-1} \gamma_1\} \\ &= A_n \gamma + t_1 A_n \gamma_1 + t_n \gamma_1 = A_n(\gamma + t_1 \gamma_1) + t_n \gamma_1 \end{aligned}$$

c. s. v. d. Tutti i sistemi $|\gamma_n|$ sono dunque somme di un multiplo del

(1) Si verifica infatti immediatamente che la curva γ_1 incontra le γ in $2t_1$ punti, e perciò le $\gamma + t_1 \gamma_1$ in zero punti.

(2) Ciò si ricava infatti dalle due relazioni

$$t_n = t_{n-1} t_1 + Du_{n-1} u_1, \quad u_n = t_{n-1} u_1 + u_{n-1} t_1,$$

tenuto presente ancora che $t_1^2 - Du_1^2 = -1$.

sistema $|\gamma + t_1\gamma_1|$ e di una parte fissa, multipla della curva razionale γ_1 , fondamentale per $|\gamma + t_1\gamma_1|$.

Le rimanenti soluzioni dell'equazione (3), per le quali t è positivo e u negativo, conducono ai sistemi trasformati di questi ultimi mediante l'involuzione I.

Sulla superficie F^4 non esistono dunque altre reti di genere 2, effettive e irriducibili, all'infuori della rete γ (nè altre curve razionali, effettive e irriducibili, all'infuori di γ_1 e della sua trasformata mediante l'involuzione I).

Ogni trasformazione birazionale di F^4 deve perciò mutare in sé stessa la rete $|\gamma|$, unica rete effettiva, irriducibile, di genere 2, e non può esservi di cessa dall'involuzione I. La forma quadratica fondamentale di F^4 , cioè il primo membro della (1), non ammette infatti altre sostituzioni lineari che trasformino in sé la coppia di valori $\lambda = 1, \mu = 0$ corrispondente alla rete $|\gamma|$, all'infuori dell'identità e della sostituzione involutoria $\lambda' = \lambda + (2h - 1)\mu, \mu' = -\mu$, immagine della I. Perchè vi fossero sopra F^4 altre trasformazioni, dovrebbe dunque esservi una proiettività non identica trasformante in sé ogni sistema lineare; il che non è possibile (per le stesse ragioni accennate alla fine del n. 3 della Nota IV).

4. Se invece, contrariamente all'ipotesi fatta al principio del n. 2, l'equazione (3), col segno negativo al 2° membro, non ammette soluzioni, vi saranno tuttavia egualmente soluzioni della stessa (3) col segno + al 2° membro: e, in corrispondenza di queste, la (4) fornirà sistemi di grado virtuale = 2. Tali sistemi saranno certo tutti irriducibili, e saranno perciò effettive reti di genere 2. Infatti, sopra F^4 non esistono in questo caso curve irriducibili di genere virtuale zero (perchè la (3), col segno negativo, non ammette soluzioni), nè di genere uno (perchè il discriminante

$$-(2h - 1)^2 - 8\}$$

non è quadrato perfetto⁽¹⁾: perciò la curva generica di uno dei sistemi in parola, se riducibile, non potrebbe essere composta che di parti irriducibili, tutte di genere > 1 , appartenenti a sistemi almeno ∞^2 , e perciò anche certo incontrantisi tutte a due a due in un numero di punti > 0 ; e con tali parti, se in numero > 1 , non si possono formare che sistemi di genere > 2 .

Poichè la superficie F^4 contiene infinite reti effettive di genere 2, essa ammetterà tutte le involuzioni definite da queste singole reti; involuzioni che operano sopra queste reti in modo identico a quanto si è veduto nella Nota IV per le F^4 contenenti curve di genere 2 e di ordine pari, e che generano perciò un gruppo analogo.

(¹) Severi, *Complementi alla teoria della base ecc.*, n. 7.

Invero, l'involuzione I_1 cui appartiene la rete $|\gamma|$, composta di curve di ordine $2h - 1$, determina sui sistemi lineari di F^4 la sostituzione $\gamma' = \gamma$, $C' = (2h - 1)\gamma - C$, e sopra t, u la solita sostituzione $t' = t$, $u' = -u$. Indicando ora con t_1, u_1 la più piccola soluzione positiva della (3) (col segno +), e con t_2, u_2 , ecc. le successive, l'involuzione I_2 , cui appartiene la rete

$$(6) \quad |\delta| \equiv \{t_1 - (2h - 1)u_1\}\gamma + 2u_1C$$

(che è composta di curve di ordine $t_1(2h - 1) - Du_1$) muterà, per analogia, il sistema $|C|$ delle sezioni piane nel sistema

$$\begin{aligned} C'' &= \{t_1(2h - 1) - Du_1\}\delta - C \\ &= \{t_1(2h - 1) - Du_1\}\{t_1 - (2h - 1)u_1\}\gamma + \{2u_1[t_1(2h - 1) - Du_1] - 1\}C \end{aligned}$$

che, con opportune riduzioni, assume la forma

$$C'' = \{2h - 1\}t_2 - (D + 4)u_2\}\gamma - \{t_2 - (2h - 1)u_2\}C.$$

D'altra parte l'involuzione I_2 , mentre muta γ e C in nuove curve γ'' e C'' , lascia invariate le δ , e perciò il 2° membro della (6); scrivendo pertanto:

$$\{t_1 - (2h - 1)u_1\}\gamma'' + 2u_1C'' = \{t_1 - (2h - 1)u_1\}\gamma + 2u_1C$$

e tenendo conto dell'espressione già trovata per C'' , si ricava

$$\gamma'' = \{t_2 - (2h - 1)u_2\}\gamma + 2u_2C.$$

La rete $|\gamma| \equiv (t_0, u_0)$ è dunque scambiata dall'involuzione I_2 colla rete (t_2, u_2) , come avveniva nella Nota IV; e si riconosce pure facilmente, per induzione da n a $n + 1$, che la stessa involuzione scambia fra loro, anche nel caso presente, tutte le coppie di reti del tipo $(t_{n-2}, -u_{n-2})$ e (t_n, u_n) . Le reti di genere 2 esistenti sulla F^4 ora in esame si distribuiranno perciò, come nella Nota IV, in due successioni, sulle quali le involuzioni I_1 e I_2 e loro prodotti opereranno nello stesso modo della Nota cit.; nè, all'infuori di questi prodotti, la F^4 ammetterà altre trasformazioni birazionali.

Alle F^4 considerate nella presente Nota sono pure applicabili le considerazioni svolte alla fine della Nota prec.; è a ritenersi perciò che l'ipotesi, anche qui introdotta al n. 1, che la base (γ, C) sia minima, non implichi alcuna restrizione ulteriore; sia cioè verificata ogni qualvolta la F^4 sia condotta nel modo più generale per una curva di genere 2 e ordine $2h - 1$.

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale* ⁽¹⁾. Nota II del socio CARLO DE STEFANI ⁽²⁾.

II.

Specificazione.

Trias inferiore. (Cava Negrotto ad Arenzano).

I. Sopra la grande massa della Quarzite scavata per uso industriale è un Micascisto quarzoso. (Quarzo, raramente Opale e Calcedonio, Muscovite con rara Clorite, Limonite, scarso Rutilo) coperto da altra Quarzite. Nel piano dei suoi straterelli con forte lente notansi reti sottilissime di Silice ferruginosa a larghe maglie, disposte radialmente, riempite da Mica o da Limonite; in costa quelle appaiono sovente compresse, includenti reticoli minori, pure schiacciati. Le sezioni microscopiche, a 90 D. presentano cavità occupate da Quarzo limpido o raramente da Limonite, nettamente delimitate, rotondeggianti, triangolari, esagone, poligonali, prevalentemente quadrate o molto irregolari, a dimensioni variabili, anche perchè in parte rotte, che si anastomizzano irregolarmente nell'interno e sono forse cavità *cavediali*. Sono contornate da una maglia ferruginosa, talora filiforme, talora confusa, che a prima vista per le irregolari ramificazioni parrebbe doversi attribuire a *Tetractinellidae*: ma che in realtà è costituita da intreccio *diactinico* di reticolati minori, disposti talora radialmente, cruciformi, di almeno due ordini di *Hexactiniae* spesso ben distinguibili a 404 D., regolarmente quadrati o triangolari. Il reticolo (che a volte risalta meglio al Polariscopio) apparisce in nero in mezzo alla Silice ferruginosa, oppure in Silice chiara in mezzo alla Limonite, od anche distinguesi entro la Silice stessa.

I raggi prossimali delle spicole paiono più lunghi, come in varie *Lysacinae*: mancano però le *Comitalia* e così pure da tutto l'insieme risulta trattarsi di una *Dictyonina*. Talune spicole maggiori paiono a volte fornite di minutissimi aculei, e vi si scopre il canale assile riempito da silice, a volte, come suole, apparentemente segmentato. Vi sono *ostia* puntiformi.

(1) Questi Rendiconti, vol. XXIX, 2° sem., fasc. 1°, 1920, pag. 16.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1920.

Vere *Aporhize* ed *Epirhize* non ho osservato. Di *Parenchimali* non è il caso di parlare. Principalmente entro il Quarzo che riempie le cavità si vedono forme vermicolari che accennerebbero a *Oxy-* e *Discohexaster* e perfino ad *Amphidischii* e *Uncini*; ma si tratta di parvenze di struttura minerale. Con l'*Eosina* si distinguono al più alcuni piccoli reticolati.

La specie è fra le meglio conservate ed è ben distinta da ogni altra. Per la struttura direi quasi pumicea, per la larghezza del reticolato ha qualche rapporto con le *Hexasterophora* Schulze *Lyssacina*; ma essendo una *H. Dictyonina* Zittel potrebbe paragonarsi soltanto ai viventi e fossili generi *Hexactinella* Carter e *Apicrocallistes* Gray della Subtribù *Uncinataria* od *Autophax* Schulze della Subt. *Inermia*. Mancano termini di paragone con specie triassiche o giuresi.

II. Nella stessa località, anzi nella stessa cava, la parte inferiore degli strati, al di sotto delle puddinghe quarzose, è costituita da una Quarzite cloritico-sericitica, sulla superficie de' cui strati sono parvenze di vermicolazioni a uso *Helminthoidea* costituite dal Quarzo che spunta irregolarmente a traverso la Mica. Oltre al Quarzo granuloso ovvero in cristallotti bipiramidati alternanti con veli di Sericite passante talora a Clorite, è singolare la presenza di cristallotti di Albite isolati nella roccia oppure in certe venette di Quarzo. Vi sono pure tracce di una *Hexasterofora dictyonina* diversa dalla precedente. Dall'esterno, in costa agli strati più a lungo esposti alle intemperie le quali asportarono la Sericite, con forti ingrandimenti si notano regolari maglie quadrate hexactiniche, dictyonali, di 3 o 4 ordini, le quali si osservano pure nelle sezioni microscopiche a 90 D. con *hexactiniae* isolate, visibili distintamente anche con 404 D. Vi sono pure *Ostia* di canali con intreccio circolare o radiale all'intorno. In taluna delle maglie maggiori le spicole nei punti di giunzione sono rafforzate da espansioni o apparentemente da *Lychnische* o *Synapticoli*, come p. es. nel genere Giurese *Pachyteichisma* Zittel appartenente alle *Ventriculitidae*, famiglia delle *Hexasterophora Dictyonina* Tribù, *Lychniscosa*.

Nella compagine dello Spongiario appaiono inclusi oscure tracce forse di Radiolarie, e meno incerti in alcuni straterelli *Rhabdi* e *Rhizocloni* come di *Hyalotragos*, o di altra *Rhizomorina*, tipo che dura del Paleozoico ad oggi.

Le predette rocce quarzose sono sottostanti ai calcari del Trias medio e superiore. Io per varie induzioni avevo ultimamente creduto che si dovessero attribuire al Carbonifero Superiore. Issel ed altri le avevano invece riposte nel Trias inferiore, e nello stato presente delle nostre cognizioni quest'ultima opinione mi sembra preferibile.

Infatti poco o punto si conoscono gli Spongiari del Trias. Le *Hexasterophora dictyonina* per quanto si sa cominciano in quel piano geologico;

mentre nel Paleozoico dal Cambriano al Permiano le *Hexactinellidae* sono rappresentate da *Lyssacinae*. La presenza di almeno due specie di *Dictyonina* nella roccia di Arenzano induce ad attribuire al Trias inferiore piuttosto che al Paleozoico le rocce quarzifere sottostanti ai calcari Triassici. *Lyssacinae* e *Dictyoninae* seguitano poi fino all'epoca attuale e queste ultime si diffondono grandemente nel Giura e nella Creta, comparendo pure nella Eocene, nel Miocene e fin nel Pliocene d'Italia.

Trias medio e superiore.

I. Anche nei Calcari del Trias medio o superiore fossilifero sono tracce di *Hexactinellidae*.

Il calcare dolomitico dei Bagni popolari di Voltaggio che altra volta mi era sembrato potesse avvicinarsi ad un Calcare Nummulitico, ho constatato che è una lumachella a *Diplopora* e *Teutloporella*, e poichè le *Dasycladacee* sono assai rare nel Trias superiore, sarei propenso ad attribuirlo piuttosto al Trias medio. Mi è parso vedervi frammenti stracci di una minutissima rete hexactinica, forse di una *Hexasterophora Lyssacina*.

II. Il calcare Triassico di Spotorno ne' suoi strati più alti, simile ad un Bardiglio bene stratificato (con Calcite prevalente; Dolomite; cristallini microscopici di Quarzo, abbondanti; alquanto Silice colloide, Mica, Rutile eventuale, pulviscolo limonitico e carbonioso) di origine frammentizia, mostra all'esterno nelle sezioni microscopiche, tracce d'intreccio *hexactinico dictyonale* minutissimo, talora più grossolano, con *ostia* puntiformi, con residui di *Dactylopora* o d'altra *Dactylavacea* e forse anche di Radiolarie. La Limonite segnala qualche *O. ghexactinia* isolata. Le spicole sono lisce e senza *Lychnosche*, appartengono perciò ad una *Hex. ellipsoi*. Le lamine silicee non disciolte dagli acidi presentano placche verosimilmente dermali o gastrali con piccoli fori.

Trattando con acido acetico nella Silice così liberata si contengono microscopiche *Hexactiniae* paramecchiniati e qualche *Hexaster* e forse *Scopulae* che attesterebbero trattarsi di una *Hex. uncinataria*. Nella Silice poi risaltano delle Macrosciere vuote, si direbbe in negativa, confermant che parti dello Spongiario furono convertite in Calcite.

III. Il Grezzone o calcare Triassico, chiaro, magnesiaco dell'ellissoide di Isoverde, è circondato, specialmente nel lato occidentale verso Isoverde, da un calcare grigio cupo sottilmente stratificato ma compatto, che avevo paragonato al marino Bardiglio delle Alpi Apuane ed eventualmente attribuito al Trias superiore. Oltre alla prevalente Calcite contiene cristallini di Quarzo con inclusioni liquide, qualche cristallino di Pirite, e materia carboniosa e limonitica disposta preferibilmente in sottilissime zonule paral-

lele. Esaminai un esemplare appunto di Isoverde. Pare costituito da una *Hexasterophora* quasi interamente trasformata in Carbonato calcico. L'intreccio dictyonale di varii ordini si vede meglio, come di solito, nei tratti nei quali compaiono i pulviscoli carboniosi e limonitici. L'intreccio, quasi sempre regolarmente cubico si svolge con direzioni longitudinali, radiali e specialmente intorno a corpi estranei, circolari. Le maglie sono quadrate ordinariamente, di rado circolari per espansione delle spicole nei punti d'incrocio e risaltano a volte nelle sezioni solo perchè il centro delle piccole *Hexactinine* calcificate è occupato da regolari serie di puntini neri limonitici. Ciò avviene talora anche per l'interno dei canali acquiferi derivanti da *ostia* puntiformi, che sono piccoli e disposti almeno in parte in serie regolari alternate. Le spicole sono semplici, non aculeate, apparentemente con *Lychnische*. Vi sono *Diactiniae*. Alcune aperture, visibili nelle sezioni al microscopio, hanno dimensioni notevoli più che in ogni altro caso; sono disposte in serie e risaltano assai perchè riempite e circondate da materia ferruginosa. Sono cinte da pieghettature dell'intreccio radiali, angolose verso l'interno dell'apertura.

Piuttosto che *ostia* di grossi canali le ritengo aperture delle cavità gastrali d'una colonia d'individui tubiformi. Questo carattere manca in tutte le altre forme da me osservate: bensì ripetesi nei *Polyblastidium* Schrammen della Creta superiore aventi piccole *ostia* ovali e *Lychnische*, ma formanti colonie d'individui tubiformi con cavità gastrali costituite nel suddetto modo e mancanti di canali acquiferi. Niuna traccia apparisce di altri organismi.

Astronomia. — *Nuova determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio.* Nota I di G. ARMELLINI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE ⁽¹⁾.

In questa Nota e nella successiva espongo i risultati di una nuova determinazione di latitudine, che io ho eseguito nel corrente anno al R. Osservatorio del Campidoglio in Roma.

Io ho applicato a tale scopo il metodo di osservazione proposto da Horrebow e Talcott adoperando lo strumento dei passaggi di Bamberg, a cannocchiale spezzato, di 88 mm. di apertura libera e di m. 0.95 circa di distanza focale. L'ingrandimento usato era di circa 55 volte.

Le coppie di stelle su cui ho fondato le mie osservazioni sono tratte dal *Preliminary General Catalogue* di L. Boss e vengono riportate nella seguente

TABELLA I.

Coppia	N	Mag	α (1920, 0)	δ (1920, 0)	Coppia	N	Mag	α (1920, 0)	δ (1920, 0)
			^h ^m ^s	[°] ['] ^{''}				^m ^h ^s	[°] ['] ^{''}
I	2157	6,1	8 5 38	25 45 3,95	X	3023	5,4	11 24 46	39 46 38,50
	2197	6,1	8 13 59	57 59 38,46		3063	5,7	11 34 5	44 4 8,17
II	2293	6,3	8 23 23	52 59 35,14	XI	3090	3,9	11 41 50	48 13 22,56
	2338	6,4	8 40 27	30 59 17,54		3102	6,0	11 45 33	35 22 33,86
III	2409	5,6	8 54 38	32 43 48,44	XII	3190	3,3	12 11 28	57 28 37,21
	2430	7,0	8 59 42	51 8 36,87		3224	4,9	12 18 29	26 17 23,77
IV	2474	5,6	9 9 55	57 4 26,86	XIII	3322	5,6	12 41 23	45 52 38,24
	2524	4,7	9 20 0	26 31 38,56		3343	6,1	12 46 23	37 57 6,85
V	2552	3,2	9 27 31	52 2 33,82	XIV	3439	5,9	13 11 56	41 16 37,50
	2578	5,8	9 31 58	31 31 15,52		3500	6,3	13 27 48	42 31 2,14
VI	2614	5,4	9 40 52	57 29 45,98	XV	3561	5,3	13 43 37	54 49 55,28
	2648	4,1	9 48 13	26 23 3,38		3591	6,1	13 49 33	29 2 28,16
VII	2684	6,0	9 59 18	54 16 45,61	XVI	3703	6,5	14 22 13	38 45 14,44
	2724	5,6	10 11 42	29 42 34,29		3744	5,5	14 35 52	44 44 57,20
VIII	2750	6,0	10 17 26	41 38 9,43	XVII	3822	5,9	14 53 44	49 57 18,15
	2773	6,2	10 22 44	42 0 36,60		3887	3,4	15 12 17	33 36 44,70
IX	2940	6,1	11 0 5	38 40 21,32	XVIII	3911	5,9	15 17 44	52 14 45,60
	2958	3,0	11 5 10	44 55 57,86		3953	4,3	15 29 42	31 37 41,71

Per il passo della vite ho adottato il valore 0",5671 e per la divisione dei due livelli i valori 1",069 e 1",216 fornitimi tutti dal chiarissimo prof. F. Giacomelli, primo astronomo di questo R. Osservatorio. Per mancanza di strumenti non è stato possibile di determinare l'errore progressivo della vite,

(¹) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1920.

e di esso si terrà conto nel lavoro definitivo. Però possiamo dire che questo errore è debolissimo per ogni singola osservazione, e per il modo come sono state scelte le coppie va preso alternativamente col segno positivo e negativo. La sua influenza sul risultato finale è quindi evanescente.

Il micrometro usato era fornito di quindici fili, e per ogni stella io ho eseguito tre puntate e cioè al *quinto*, all'*ottavo* e all'*undicesimo* filo. Le osservazioni sono state poi ridotte al filo medio (l'*ottavo*) tenendo conto della curvatura del parallelo descritto dalla stella.

Ciò posto le mie osservazioni sono divise in tre serie e riportate nelle seguenti tabelle in cui figurano da sinistra a destra: la data, la coppia, la posizione del cerchio verticale (Est od Ovest) durante l'osservazione della prima stella, la semisomma delle declinazioni apparenti D , la semidifferenza delle letture al micrometro ΔL , le tre correzioni (C_1 , C_2 , C_3) per il livello, per la curvatura del parallelo e per la rifrazione atmosferica, ed infine la latitudine dedotta λ .

TABELLA II
(1^a serie - marzo ed aprile 1920).

DATA	Coppia	Cerchio	D	ΔL	C_1	C_2	C_3	Latitudine λ
1920								
Marzo 24	I	E	41° 52' 15.99	+ 1' 17.29	- 0.65	+ 0.14	+ 0.02	41° 53' 32.79
26	"	"	16.16	16.75	+ 0.02	+ 0.14	"	33.69
29	"	W	16.41	17.72	- 1.08	+ 0.07	"	33.14
Aprile 4	"	"	16.86	16.15	- 0.80	+ 0.14	"	32.37
Marzo 26	II	W	41 59 20.25	- 5 46.80	- 0.35	+ 0.13	- 0.11	41 53 33.12
27	"	E	20.35	47.73	- 0.29	"	"	32.35
Aprile 4	"	"	21.14	48.43	- 0.58	"	"	32.15
6	"	W	21.31	47.92	- 0.35	"	"	33.06
7	"	E	21.39	48.69	- 0.27	"	"	32.45
8	"	W	21.48	48.65	+ 0.16	"	"	33.01
Marzo 25	III	E	41 56 5.44	- 2 32.25	- 0.24	+ 0.13	- 0.04	41 53 33.04
26	"	"	5.57	32.47	- 0.65	"	"	32.54
27	"	W	5.69	31.78	- 0.53	"	"	33.38
Aprile 1	"	E	6.30	33.70	+ 0.19	"	"	32.88
3	"	"	6.53	34.10	+ 0.06	"	"	32.54
4	"	W	6.63	34.26	+ 0.08	"	"	32.54
5	"	E	6.73	34.05	+ 0.60	"	"	33.37
6	"	"	6.83	33.49	- 0.28	"	"	33.15
7	"	W	6.93	33.53	- 0.19	"	"	33.30
8	"	E	7.03	33.68	- 0.05	"	"	33.39
Marzo 23	IV	E	41 47 54.39	+ 5 38.56	- 0.36	+ 0.14	+ 0.10	41 53 32.83
24	"	W	54.52	37.67	+ 0.25	"	"	32.68
28	"	E	55.04	37.89	- 0.03	"	"	33.14
31	"	"	55.43	37.74	- 0.81	"	"	32.60

DATA	Coppia	Cerchio	D	ΔL	C_1	C_2	C_3	Latitudine λ
1920								
Aprile 5	IV	W	41° 47' 56,02	+ 5' 37,55	— 0,26	+ 0,05	+ 0,10	41° 53' 33,46
6	"	E	56,12	37,27	— 0,11	+ 0,14	"	33,52
8	"	W	56,34	37,03	— 0,03	"	"	33,58
Marzo 23	V	W	41 46 45,59	+ 6 46,48	+ 0,40	+ 0,13	+ 0,11	41 53 32,71
25	"	E	45,87	47,92	— 0,69	+ 0,05	"	33,26
31	"	W	46,73	45,94	+ 0,43	+ 0,13	"	33,34
Aprile 1	"	E	46,87	46,70	— 0,44	"	"	33,37
4	"	W	47,27	45,90	— 0,05	"	"	33,36
5	"	E	47,39	45,00	+ 0,34	"	"	32,97
6	"	"	47,51	45,67	— 0,25	"	"	33,17
7	"	W	47,64	44,71	+ 0,30	"	"	32,89
8	"	E	47,77	45,73	— 0,15	"	"	33,59
Marzo 24	VI	W	41 56 15,15	— 2 42,94	+ 0,41	+ 0,14	— 0,06	41 53 32,70
26	"	"	15,45	42,09	— 0,07	"	"	33,37
27	"	E	15,60	42,99	— 0,14	"	"	32,55
28	"	"	15,75	42,55	— 0,26	"	"	33,02
31	"	"	16,20	42,93	— 0,29	"	"	33,06
Aprile 1	"	W	16,35	43,66	+ 0,27	"	"	33,04
4	"	E	16,77	43,53	— 0,18	"	"	33,14
5	"	W	16,90	43,59	— 0,06	"	"	33,33
6	"	"	17,04	43,59	— 0,35	"	"	33,18
7	"	E	17,17	43,47	— 0,35	"	"	33,43
8	"	W	17,30	44,06	— 0,14	"	"	33,08
Marzo 26	VII	E	41 59 29,86	— 5 57,07	— 0,21	+ 0,13	— 0,11	41 53 32,60
28	"	W	30,19	57,10	— 0,26	"	"	32,85
Aprile 1	"	E	30,85	57,39	— 0,28	"	"	33,20
4	"	W	31,32	57,96	— 0,34	"	"	33,04
5	"	E	31,47	58,57	+ 0,02	"	"	32,94
6	"	"	31,62	58,31	+ 0,12	"	"	33,45
8	"	W	31,92	58,59	+ 0,08	"	"	33,46
Aprile 1	VIII	W	41 49 13,28	+ 4 19,77	+ 0,17	+ 0,12	+ 0,07	41 53 33,41
4	"	E	13,79	19,27	— 0,30	"	"	32,95
5	"	W	13,95	18,60	+ 0,78	"	"	33,52
6	"	"	14,11	18,10	+ 0,58	"	"	32,98
7	"	E	14,27	19,34	— 0,43	"	"	33,37
8	"	W	14,44	19,18	— 0,51	"	"	33,30

Biologia. — *Sulla lotta naturale contro le larve di Anopheles per mezzo degli insetti acquatici* ⁽¹⁾ Nota III di ENRICO FEDERICI, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽²⁾.

Continuo in questa Nota la esposizione sistematica dei risultati da me ottenuti negli esperimenti sull'azione esplicata dagli insetti acquatici, considerati come agenti distruttori delle larve e ninfe di *Anopheles*.

V. NEUROTTERI. — Nella nostra fauna d'acqua dolce i Neurotteri sono rappresentati dai Friganeidi (in senso lato, cioè identificati col così detto gruppo dei Tricotteri) e dai gen. *Osmylus*, *Sisyrax*, *Sialis* fra i così detti Planipenni. Non ho istituito, rispetto a queste forme, una serie di esperienze sistematiche, e ciò per ovvie ragioni, mercè le quali è lecito affermare la nessuna importanza dei Neurotteri acquatici, per quanto riguarda la lotta naturale contro gli anofeli:

a) la massima parte dei Friganeidi si nutrono di piante, esclusivamente o quasi;

b) tanto i Friganeidi quanto i gen. *Osmylus*, *Sisyrax*, *Sialis* (questi ultimi sono carnivori) vivono nelle acque limpide, spesso fortemente correnti e per lo più a un'altezza piuttosto elevata, là dove raramente si trovano le zanzare malarigene;

c) infine i Friganeidi, nel loro caratteristico astuccio, formano con la lentezza dei loro movimenti un contrasto non privo di importanza con la rapidità dei movimenti a scatto proprii delle larve di *Anopheles*.

Effettivamente, una sola volta potei rinvenire, in uno stagno popolato da numerosissimi anofeli, due larve di *Limnophilus rhombicus* (?), delle quali riscontrai in laboratorio il nutrimento esclusivamente vegetale.

Secondo me, non risulterebbe quindi confermata l'asserzione di Tänzer e Osterwald (loc. cit.), che annoverano i Friganeidi (Köcher- oder Frühlings-fliegen), fra i naturali distruttori delle larve di anofeli.

VI. PSEUDONEUROTTERI. — Dal nostro punto di vista, possiamo distinguere le larve dei Libellulidi in due gruppi, che differiscono anatomicamente per la forma del corpo e della maschera, biologicamente per l'*habitat*; le une (gen. *Libellula*, *Epithea*, *Cordulia*) hanno corpo tozzo, largo e breve, maschera così detta a elmo (ted. Helmmaske) e vivono sul fondo dei ba-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma, durante l'estate del 1919.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1920.

cini, in mezzo al fango di cui sono ordinariamente coperte; le altre (gen. *Aeschna*, *Anax*, *Calopteryx*, *Gomphus*, *Agrion*, *Lestes*, ecc.) hanno corpo allungato, maschera piatta (ted. flache Maske) e si trovano per lo più tra le erbe sommerse, attaccate a queste con le zampe, oppure natanti, con forza e velocità maggiore delle precedenti.

Convien senz'altro escludere il primo gruppo dal novero delle cause di distruzione naturale degli anofeli, e ciò per le condizioni di vita proprie delle specie che ne fanno parte. Queste non possono in alcun modo far preda di anofeli (che stanno con tutto il corpo alla superficie e, quando scendono al disotto di questa, vi si trattengono soltanto pochi secondi), perchè non abbandonano mai, per le esigenze della caccia, il fango del fondo.

Infatti, in alcune esperienze che ebbero esito completamente negativo, potei constatare che le larve di *Epithea* possono vivere per più giorni in recipienti con sabbia o fango e detriti vegetali sul fondo (in mezzo a cui trovano di che nutrirsi), mentre muoiono in breve, se in bicchieri d'acqua del tutto limpidi e con numerosi anofeli alla superficie.

Risultati almeno in parte positivi hanno dato le larve del secondo gruppo tutte voracissime e ferocemente carnivore: tuttavia anch'esse tengono, nuotando, la parte posteriore del corpo rivolta obliquamente verso l'alto e questo atteggiamento le costringe a cercare la preda al disotto di sè piuttosto che al disopra. Anche questa circostanza è favorevole agli anofeli, che si trovano, come è noto, alla superficie dell'acqua e al disotto (o molto vicino) delle chiazze di alghe galleggianti. Ciò è confermato da alcune esperienze compiute in proposito: le larve del nostro secondo gruppo si sono dimostrate divoratrici voraci di piccoli animali e tra questi anche di larve di anofeli, ma altresì (e a preferenza) di Perlidi e di Efemeridi, che si trattengono costantemente sul fondo o negli strati inferiori dell'acqua.

In complesso, mi sembra giustificato affermare che la presenza delle larve dei Libellulidi del secondo gruppo, possa essere in qualche modo efficace, pel nostro punto di vista, quando si tratti di stagni poco profondi e con abbondante vegetazione sommersa, così da permetter loro di trattenersi negli strati liquidi superiori; ma che d'altra parte nelle raccolte acquose piuttosto profonde e con diffusa vegetazione galleggiante (tali cioè da costituire l'ambiente più propizio allo sviluppo degli anofeli) le larve dei Libellulidi si trattengano a preferenza sul fondo e mangino al fondo. In tal modo le loro condizioni di vita ne annullano l'opera là dove sarebbe più efficace⁽¹⁾; così che non sembra improbabile che (eccettuando il caso particolare accennato) la distruzione delle zanzare adulte operata dalle libellule pure adulte

(1) Tale sembra essere anche l'opinione di alcuni autori americani (Dupree, Smith, Mitchell) ricordati dalla Mitchell (op. cit.).

debba risultare, in ultima analisi, più notevole di quella che ha luogo durante il periodo larvale dell'una e dell'altra specie ⁽¹⁾.

VII. CONCLUSIONI. APPLICAZIONI PRATICHE. — Le esperienze sistematicamente condotte sui vari gruppi di insetti che rappresentano la entomofauna delle nostre acque dolci, relativamente alla loro importanza nella lotta naturale contro gli anofeli nello stadio di larva e di ninfa, autorizzano a concludere:

1°) che gli anofeli alla stadio larvale risultano molto efficacemente difesi dalle loro peculiari condizioni di vita e soprattutto dal fatto che esse si trattengono quasi costantemente in posizione orizzontale alla superficie dell'acqua e in vicinanza immediata delle piante galleggianti;

2°) che il numero delle specie di insetti predatori, la cui azione può considerarsi più o meno efficace rispetto alla distruzione degli anofeli, viene considerevolissimamente ridotto, qualora si tengano nel debito conto le restrizioni di cui al capoverso precedente;

3°) che fra questi insetti i risultati degli esperimenti compiuti indicano soprattutto:

a) fra i Rincoti i gen. *Naucoris*, *Notonecta*, *Corisa* (larve e adulti), sia per le dimensioni relativamente considerevoli, sia per la grandissima frequenza e voracità;

b) fra i Pseudoneurotteri le larve dei gen. *Aeschna*, *Anax*, *Calopteryx*, *Gomphus*, *Agrion*, *Lestes* ed affini, ma in minor grado e probabilmente solo nei bacini acquei poco profondi e con abbondante vegetazione sommersa poco al disotto della superficie.

Per ciò che riguarda l'entità della distruzione operata da questi insetti, la mia impressione complessiva è che essa non sia tale da avere una reale efficacia pratica. Anche se nelle condizioni naturali dovesse verificarsi da parte degli insetti predatori una prevalente distruzione di anofeli, rispetto alle altre specie di animalicoli acquatici (ciò che probabilmente è), la cosa dovrebbe essere unicamente attribuita all'enorme numero di individui, con

(1) Accenno in modo sommario alle altre due famiglie, che coi Libellulidi rappresentano i Pseudoneurotteri acquatici, i Perlidi e gli Efemeridi, ambedue di nessuna importanza rispetto al nostro punto di vista, come ho potuto accertare io stesso con vari esperimenti e come del resto confermano le naturali condizioni di vita delle specie appartenenti ai due gruppi. Infatti gli Efemeridi vivono specialmente di vegetali (esclusivamente *Clinëon dipterum*, che è la specie di gran lunga più comune) e inoltre si trovano sempre sul fondo dei bacini acquei, perchè, essendo provvisti di apparato respiratorio branchiale, non hanno alcun bisogno di risalire alla superficie. I Perlidi invece sono schiettamente carnivori e possono, in condizioni eccezionalmente favorevoli, cibarsi di anofeli; ma in natura ciò deve avvenire molto raramente, dato che essi frequentano soltanto le acque correnti e per lo più montane, ove si trattengono nascosti sotto le pietre del fondo.

cui gli anofeli pullulano negli stagni, durante la maggior parte dell'anno ⁽¹⁾.

Infine, gli eventuali tentativi di applicazioni pratiche, date le ovvie difficoltà tecniche che si opporrebbero alla loro attuazione, sembrano presentare pochissime ed incerte probabilità di riuscita positiva.

(¹) A conferma della mia opinione, citerò il parere del Consiglio della sanità germanica, riferito e condiviso da Tänzer e Osterwald (loc. cit.) e secondo il quale la presenza degli insetti indicati come distruttori delle larve di anofeli è praticamente del tutto trascurabile: « Wir (int. gli autori) schliessen uns der Ansicht des Reichsgesundheitsamtes an, welches die Bedeutung der erwähnten Tiere für die Praxis der Mückenbekämpfung nur gering einschätzt ».

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1920.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo).

~ ~ ~

Fisica. — *Forze elastiche molecolari e vibrazioni che ne risultano.* Nota del Corrispondente MICHELE CANTONE ⁽¹⁾.

Se nello studio della elasticità l'indirizzo seguito finora, di assumere la pressione come elemento meccanico fondamentale, ha dato modo di stabilire rapporti fra le azioni deformatrici e le deformazioni, o di rappresentare legami fra tali enti ed influenze di varia natura, adottando in ogni caso il criterio di distribuzione corrispondente al concetto fittizio di continuità della materia, è naturale che, con la tendenza delle teorie fisiche moderne ad orientarsi verso sistemi di rappresentazione conformi alla natura reale discontinua dei corpi, ci si riferisca a preferenza alle forze agenti sulle singole monadi, giacchè, mentre la deformazione è individuata dalla medesima grandezza qualunque sia il numero di particelle sopra l'elemento di superficie, la forza effettiva su ciascuna di queste assume grandezze diverse dipendentemente dal numero di molecole distribuite sull'areola, e quindi la pura azione meccanica esterna non può considerarsi astraendo dalla qualità di materia che ne subisce l'effetto.

Nè vi sarà difficoltà ad attuare il passaggio, attesa la circostanza che in tutte le teorie molecolari dei solidi amorfi l'ipotesi di una struttura cubica è riconosciuta legittima ai fini dell'equivalenza allo stato reale; onde sarà lecito nel nostro caso ricorrere a questo ripiego per ottenere, in base al

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1920.

valore noto della costante N di Avogadro, la forza che si esercita sopra ogni molecola effettiva dello strato superficiale quando sia conosciuta la forza complessiva esterna che corrisponde ad una determinata area. Ciò importa che, denotando con a il lato del cubo elementare, fra la pressione p esercitata sul corpo (di densità ρ e di massa molecolare M) e la forza F_1 che ne risulta per ogni molecola superficiale esiste la relazione

$$(1) \quad F_1 = pa^2 = p \left(\frac{M}{\rho N} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Alla forza F_1 può farsi corrispondere la dilatazione $\frac{\Delta a}{a}$ per avere dal loro rapporto il *modulo elementare lineare* caratteristico di un corpo omogeneo ed isotropo sottoposto a pressione uniforme, modulo che è da supporre costante entro i limiti di perfetta elasticità. Epperò, avendosi per il modulo ordinario

$$K = \frac{pV}{\Delta V} = \frac{pa}{3\Delta a}$$

e per la (1)

$$(2) \quad K = \frac{F_1 a}{3a^2 \Delta a},$$

per il nuovo modulo K' si otterrà:

$$(3) \quad K' = 3a^2 K.$$

In modo analogo si procede nel caso degli scorrimenti assumendo per *modulo elementare di rigidità* il rapporto fra la forza tangenziale Φ_1 che agisce su ciascuna molecola e lo scorrimento $\frac{\Delta b}{a}$ che questa subisce. Si avrà allora per il modulo ordinario:

$$n = \frac{\Phi_1 a}{a^2 \Delta b} = \frac{n'}{a^2},$$

da cui si ricava la formula relativa al modulo elementare

$$n' = a^2 n;$$

ed è facile dedurre similmente la relazione che lega il *modulo elementare di trazione* E' al modulo di Young E , come quella fra gli elementi analoghi E'_i E_i in corrispondenza alle dilatazioni longitudinali non accompagnate da contrazioni trasversali; vale a dire:

$$E' = a^2 E, \quad E'_i = a^2 E_i.$$

Abbiamo dunque in ogni caso un mezzo semplice per passare dall'ordinario al nuovo sistema, ed il coefficiente a^2 che compare nelle nostre for-

mule finali è appunto la grandezza che può servire a mettere in evidenza la distribuzione delle forze esterne sulle molecole dello strato limite del corpo. Il fattore di riduzione è la potenza di grado $\frac{2}{3}$ del volume molecolare effettivo, ossia di quella grandezza che nella classificazione degli elementi può bastare da sola a stabilire il loro raggruppamento in serie; onde la modificazione qui proposta rispecchia un ordine d'influenze subordinate alla grande legge che governa la struttura atomica delle sostanze semplici. Solo nel caso della compressibilità il fattore di riduzione è $3a^2$, ma ciò dipende dalla circostanza che nella teoria ordinaria si assume la dilatazione cubica per individuare la modificazione subita dal corpo, laddove con la proposta che io faccio l'elemento cinematico è la dilatazione lineare, il che risponde ad un criterio di completa uniformità quando importi paragonare gli effetti delle varie specie di reazioni elastiche.

Tolta l'influenza che deriva dall'adozione di questo criterio, i rapporti fra le varie specie di elasticità rimangono immutati a causa dell'anzidetto fattore a^2 che interviene in tutte le formule stabilite per i corpi isotropi: non così accade per gli anisotropi; ma la trattazione del problema richiederebbe in tal caso la conoscenza della particolare struttura dell'edificio molecolare, e perciò potrà essere fatta in un secondo tempo.

Le cose dette trovano applicazione in vari rami della fisica, e specialmente nei problemi in cui le forze elastiche si oppongono ad azioni che sollecitano i singoli atomi o le cariche elettriche in essi contenute; e non è escluso che dallo studio della resistenza dei materiali si abbiano elementi per un giudizio quantitativo sulla coesione e sui caratteri essenziali della plasticità; ma per ora mi limito ad alcuni rilievi riguardanti le reazioni elastiche molecolari in rapporto alle vibrazioni atomiche.

La nozione di forze elastiche agenti su singoli punti in opposizione alle forze esterne offre un mezzo semplicissimo per trovare la frequenza caratteristica dei moti atomici secondo il concetto seguito da Einstein⁽¹⁾. Egli immaginava i 26 atomi più vicini alla particella in esame distribuiti sopra una superficie sferica di raggio uguale alla distanza media, ed in tal modo per via approssimata perveniva alla formula

$$(4) \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \frac{16 N^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{3}}}{M^{\frac{1}{3}}},$$

dove, per una sostanza di massa molecolare M e di volume V , K denota il modulo ordinario di compressibilità cubica.

(1) Ann. der Phys., 34, pag. 170, an. 1911.

Ora evidentemente la reazione elastica che si desta per uno spostamento Aa di un atomo del sistema immaginando, come fa Einstein, che gli altri restino di posizione invariabile è doppia della F_1 che compare nella (2): e potendosi pertanto porre $\frac{F_1}{Aa} = 6aK$, per il moto armonico che ne risulta si avrà una frequenza data dalla formula

$$(4)' \quad \nu_K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6aKN}{M}},$$

che con passaggi semplici si dimostra coincidere con la (4).

Da coloro che si sono occupati di vibrazioni degli atomi si è fatto notare che i valori dedotti dalla (4), pure risultando dell'ordine di grandezza della frequenza limite a cui porta la teoria di Debye sui calori specifici, non offrono per siffatta frequenza una indicazione attendibile; tuttavia non sarà superfluo rilevare che a risultati più concordanti si arriva in base alle (4) qualora per la costante N di Avogadro si assuma il valore $6,06 \times 10^{23}$ ricavato da Millikan con metodo rigoroso. Si ha infatti

	Sn	Bi	Cd	Pb	Al	Ag	Au	Cu	Ni	Fe	Pt
per $\nu_K \times 10^{-12}$,	3,51	2,13	3,06	2,63	8,08	4,88	4,58	6,65	7,81	7,77	4,60
e per $\nu_{max} \times 10^{-12}$,	3,83	2,30	3,48	1,49	8,26	4,39	3,44	6,81	9,01	9,67	4,68

Siamo certamente lontani da una coincidenza, ma il divario fra le due serie di valori non è così marcato come si manifesta adottando per la costante di proporzionalità nella (4) il valore $2,54 \times 10^7$ dedotto in modo quasi empirico.

Che non si possa parlare di coincidenza è facile intendere considerando che uno stato di moto vibratorio più o meno stazionario in un solido non è possibile senza che vengano in giuoco le forze elastiche inerenti alla propagazione delle onde longitudinali e trasversali; quindi il problema relativo alle condizioni dinamiche stazionarie può essere posto nei suoi giusti termini solo quando compaiono le velocità rispettive, anche perchè allora vien meno da sè la supposizione (non rigorosa per una teoria molecolare) di particelle che si spostano rispetto ad altre considerate immobili; tuttavia il non grave disaccordo fra le ν date dalle (4) e le corrispondenti ν_{max} di Debye induce a ritenere che il limite messo in rilievo da questo fisico per lo spettro di frequenze compatibili con l'agitazione termica speciale dei solidi non sia molto diverso dai valori di ν deducibili per moti armonici delle singole particelle in base ai legami caratterizzati dall'unico modulo della elasticità di volume.

L'attendibilità dei valori ricavati dal Debye per i calori specifici non può mettersi in dubbio, in quanto che a giustificare tutto il processo seguito

per ottenerli è sufficiente il mirabile accordo dei risultati teorici con quelli sperimentali; parmi però che resti ancora da mettere in chiaro qualche punto che si riferisce alla interpretazione della formula finale della seconda parte di quel lavoro.

Nella teoria di Debye si parte del concetto di Planck, di aversi per ogni frequenza caratteristica ν delle vibrazioni atomiche l'ammontare di energia $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k\theta}} - 1}$; ma si pone la condizione generale che i moti vibratorii

siano quelli forniti dalla teoria elastica dei mezzi continui per ciò che riguarda la legge di distribuzione delle frequenze, mentre se ne limita il numero totale a $3N$, quante cioè se ne debbono avere in un reticolo spaziale di N punti occupanti il volume V . Si viene così ad introdurre un limite massimo ν_{\max} per le frequenze, limite che è dato dalla relazione del noto tipo

$$(5) \quad h\nu_{\max} = k\theta,$$

dove θ può assumersi come una temperatura assoluta caratteristica della sostanza in esame; epperò la scelta di questa relazione, del tutto arbitraria, viene giustificata dall'accordo quasi perfetto fra i risultati della teoria ed i valori ottenuti sperimentalmente per i calori specifici nel campo termico in cui si rendono manifeste le deviazioni dalla legge di Dulong e Petit fin quasi *allo zero assoluto*.

La determinazione della costante θ , che permette di uniformare il comportamento delle varie sostanze rispetto alla legge di variazione del calore specifico a volume costante (in quanto lo si può esprimere per mezzo di una funzione universale di $\frac{T}{\theta}$), è subordinata alla conoscenza di ν_{\max} , e questa alla sua volta è data dalla relazione

$$(6) \quad 3N = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{2\nu_{\max}^3}{v_t^3} + \frac{\nu_{\max}^3}{v_l^3} \right),$$

in cui v_t e v_l denotano le velocità di propagazione delle onde trasversali e longitudinali ⁽¹⁾ ed N rappresenta la costante di Avogadro se per V si assume il volume atomico.

(1) Nelle formule di Debye al posto di v_t e v_l trovansi le espressioni $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$; ma ho creduto di poter fare la sostituzione attenendomi alla teoria dei sistemi elastici continui seguita dal Debye. A rigore non si potrebbe non fare una riserva tenuto conto che nella teoria molecolare di Born e Kármán (Phys. Zeits., 13, pag. 397), le velocità di propagazione, per lunghezze d'onda paragonabili con la distanza di due punti contigui, risultano un po' minori delle ordinarie v ; ma le deduzioni degli autori sono di carattere approssimato, e semplificate per giunta in modo non del tutto legittimo; sicchè per ora la questione si può ritenere impregiudicata, specialmente se si guarda al concetto generale delle mie deduzioni.

Risultando in ogni caso $\frac{V}{N}$ uguale al volume a^3 spettante ad una molecola effettiva, ed essendo in generale $\frac{v}{v'}$ l'espressione di una lunghezza d'onda, alla precedente relazione stabilita dal Debye daremo la nuova forma

$$(6)' \quad 3 = \frac{4}{3} \pi a^3 \left(\frac{2}{\lambda_{lm}^3} + \frac{1}{\lambda_{lm}} \right),$$

dove, invece delle frequenze massime, compariscono le rispettive lunghezze d'onda minime. Posto dunque un limite ed una struttura discontinua, come per serie di righe, allo spettro di frequenze che risulterebbe compatibile con le proprietà elastiche dei solidi, si perviene ad una relazione che può dirsi equivalente alla (6), ma che sembra più consona alla natura del problema nel senso di aversi, in luogo di un risultato valido dal punto di vista formale, l'affermazione di un concetto avente significato-fisico preciso.

Ed invero l'ipotesi del Debye che debba esistere una sola frequenza limite non appare del tutto legittima quando si pensi che nei solidi esistono due specie di propagazione con velocità distinte, ed attesa la posizione pressochè invariabile dei loro atomi non si saprebbe concepire un sistema di moti vibratorii stazionari per i quali non fossero i ventri, o i nodi, coincidenti con la posizione media delle particelle materiali, sicchè si sarebbe spinti ad ammettere un valore limite, non per la frequenza, ma per la lunghezza d'onda relativa alle due specie di propagazione; ed in tale ipotesi dalla (6)' si otterrebbe per siffatta lunghezza:

$$\lambda_m = a \sqrt[3]{\frac{4}{3} \pi} = 1,612 a.$$

Era da aspettarsi per il coefficiente numerico il valore 2 perchè con una struttura tetraedrica (equivalente a quella di un corpo solido amorfo) è del tutto ammissibile una semilunghezza d'onda minima data dallo spigolo del cubo elementare; ma il risultato diverso non può farci meraviglia ove si consideri che il valore dedotto in base alla (6), la quale implicitamente suppone che si abbia un'unica frequenza limite, non può che rendere manifesto il contrasto fra questa ipotesi e l'altra da me inclusa, per quanto il divario rispetto alle previsioni sia tale da potersi dire raggiunto l'ordine di grandezza.

E che la mia opinione non sia priva di fondamento mostrerò modificando la relazione fondamentale (5) in guisa da porre in evidenza sotto forma addittiva i contributi delle onde trasversali e longitudinali, e cioè ponendo

$$(7) \quad h(2\nu_{l\max} + \nu_{l\max}) = 3k\theta,$$

dove θ è una nuova costante che corrisponde all'ipotesi apparentemente

arbitraria di attribuire alle onde trasversali un contributo doppio di quello ammesso per le longitudinali, il che del resto emerge del pari dalla (6) ottenuta dal Debye in modo rigoroso dal punto di vista della teoria elastica applicata ai mezzi formati da un numero discreto di punti materiali ⁽¹⁾.

Posto $\nu_{t\max} = \frac{v_t}{\lambda_{tm}}$ e $\nu_{l\max} = \frac{v_l}{\lambda_{lm}}$, qualora si faccia $\lambda_{tm} = \lambda_{lm} = 2a$ si potrà scrivere in luogo della (7):

$$(7)' \quad \frac{h}{2a} (2\nu_t + \nu_l) = 3k\theta,$$

donde risulta:

$$(8) \quad \theta = \frac{h}{6ak} (2\nu_t + \nu_l).$$

laddove in base alle (5) e (6) la costante Θ di Debye viene espressa dalla formula

$$\Theta = \frac{h}{ka} \left(\frac{9}{4\pi} \frac{1}{\frac{2}{v_t^3} + \frac{1}{v_l^3}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Eppure, fatti i calcoli, si trova che i valori ottenuti con le due formule coincidono, come può vedersi dall'annesso specchietto, eccezione fatta di poche divergenze per le quali è da notare che le θ da me calcolate si avvicinano di più, specialmente nel caso del piombo, alle Θ osservate, cioè dedotte mediante i calori specifici per i metalli studiati da Nernst e dai suoi allievi.

	Sn	Bi	Cd	Pb	Zn	Al	Ag	An	Cu	Ni	Fe	Pd	Pt	Ir
Θ =	183	110	166	71	—	395	210	165	326	431	427	253	224	—
θ =	177	107	165	94	284	396	218	180	322	412	434	284	234	236
$\Theta_{oss.}$ =	—	—	—	95	—	396	215	—	309	—	—	—	—	—

Vi è dunque motivo di credere che nel procedimento del Debye deve potersi ricavare la Θ servendosi di una proprietà addittiva conforme a quella cui si riferisce la (7) da me stabilita, vale a dire ponendo invece della (5):

$$(5)' \quad k\Theta_t = h\nu_{t\max}, \quad k\Theta_l = h\nu_{l\max},$$

con la condizione che sia

$$\Theta = \frac{2\Theta_t + \Theta_l}{3} = \frac{h}{3k} (2\nu_{t\max} + \nu_{l\max});$$

(1) Il particolare di cui qui si parla risponde evidentemente al fatto che per lo spostamento di un punto del reticolo a struttura tetraedrica in direzione di uno qualunque degli spigoli del cubo elementare si destano tre reazioni elastiche, una di pura dilatazione longitudinale e due di scorrimento.

e nello stesso tempo si avrebbe un argomento a favore della ipotesi, accennata già da Sutherland, Madelung, Born e Kármán ⁽¹⁾, che vi sia una lunghezza d'onda minima coincidente col doppio dello spigolo del cubo elementare in un reticolo spaziale a struttura tetraedrica.

Considerata sotto questo nuovo aspetto la questione del limite da attribuirsi al sistema di moti vibratorî compatibili con le proprietà elastiche di un solido, le frequenze massime, caratterizzanti secondo Debye le singole sostanze, sarebbero da ammettere solo da un punto di vista formale, e cioè come atte a definire le temperature Θ di transizione fra lo stato solido vero e proprio e lo stato parzialmente pastoso.

Ad ogni modo quanto sopra si è esposto in ordine alla interpretazione dei risultati per le vibrazioni atomiche non menoma per nulla il pregio della ricerca di Debye sulla determinazione teorica dei calori specifici in base alle proprietà elastiche, giacchè i precedenti rilievi si riferiscono, più di ogni altro, al significato fisico delle costanti ν_{\max} , non sembrando legittimo che si parli di una frequenza limite piuttosto che di una lunghezza d'onda minima. E ciò non apparirà privo di interesse ove si tenga presente che il particolare di cui ci occupiamo, pure essendo il portato di una teoria elastica dei mezzi continui, suggerisce un indirizzo fondato sulla costituzione molecolare come più adatto allo studio dei problemi riguardanti le azioni termoelastiche nei solidi.

Che tale indirizzo sia consentaneo anche allo studio dei calori specifici può argomentarsi dal successo notevole ottenuto con la particolare formula stabilita da Nernst e Lindemann ⁽²⁾ prendendo le mosse dalla geniale indagine schematica di Einstein ⁽³⁾ sui calori specifici degli elementi, giacchè in fondo i primi eseguirono nel campo molecolare una ricerca del tipo di quella istituita poi dal Debye, ma si arrestarono solo al primo armonico basso dell'ipotetica frequenza semplice di Einstein; ed il grande vantaggio realizzato starebbe ad indicare che basta arrestarsi ad una lunghezza d'onda doppia della minima caratteristica del solido per rendere conto quasi esattamente della legge di variazione del suo calore specifico nell'intervallo termico in cui più complicata appare questa legge.

Veramente anche nella deduzione di Nernst e Lindemann si parla di valori della frequenza; e non può mettersi in dubbio che questo elemento sia atto a riassumere le condizioni dinamiche dell'atomo in vari problemi che si riferiscono alle radiazioni; ma non è detto che il periodo del moto vibratorio atomico abbia rapporto semplice di dipendenza col moto degli

⁽¹⁾ Ved. Phil. Mag., 20, pag. 657, an. 1910; Phys. Zeits., 11, pag. 898, an. 1910; Phys. Zeits., 13, pag. 297, an. 1912.

⁽²⁾ Zeits. f. Elektroch., pag. 817, an. 1911.

⁽³⁾ Ann. der Phys., 22, pag. 180, an. 1907.

elettroni esercitanti funzione ottica autonoma, anzi, avuto riguardo all'ordine di grandezza (10^{15}) che si desume per la frequenza degli elettroni liberi dalle ricerche di spettrologia e dalle indagini teoriche sulla struttura dell'atomo, è facile comprendere che la frequenza limite di Debye dipende in ultima analisi dalle condizioni di moto stazionario che si determinano nello aggruppamento degli atomi. È naturale quindi pensare che le bande di assorbimento nell'ultravioletto con frequenze dell'ordine di grandezza di 10^{12} , intraviste dalla teoria della dispersione come caratteristiche delle particelle materiali aventi la massa di un atomo e riscontrate sperimentalmente in alcuni casi, rappresentino *effetti di risonanza* per un meccanismo di azione con sede nelle particelle materiali. Tale meccanismo si esplicherebbe con la regolarità che deriva dalla distribuzione degli atomi in virtù d'impulsi irregolari, probabilmente di origine elettrica, paragonabili a quelli per cui si eccita una corda tesa o una canna sonora; sicchè lo spettro di assorbimento si estenderebbe, a partire dall'ultravioletto, sino alle frequenze che di solito si attribuiscono alle azioni elastiche, ma la loro efficacia, rispetto ai fenomeni termici, si rende particolarmente sensibile con le frequenze che corrispondono ad una lunghezza d'onda doppia della distanza media fra gli atomi.

Fisica matematica. — *Teoria del condensatore elettrico a piattini circolari* ⁽¹⁾. Nota II di ROCCO SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA ⁽²⁾.

4. RISOLUBILITÀ DELLE EQUAZIONI INTEGRALI. — Per dimostrare che le equazioni integrali (A_2) (B_2) sono risolubili in modo unico, basterà dimostrare che le corrispondenti equazioni omogenee hanno l'unica soluzione $\psi = 0$, quindi che $\frac{1}{\pi}$ e $-\frac{1}{\pi}$ non sono parametri (o autovalori) pel nucleo. Consideriamo, per es., l'equazione omogenea corrispondente ad (A_2) :

$$(13) \quad \psi(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-iu} \psi(u) \left[\frac{\sin(u+s)a}{u+s} + \frac{\sin(u-s)a}{u-s} \right] du.$$

Essa si deduce col ragionamento del § 3 dal sistema

$$(14) \quad \begin{cases} \int_0^\infty I_0(rs) s \psi(s) ds = 0 & \text{per } r > a, \\ \int_0^\infty I_0(rs) (1 - e^{-rs}) \psi(s) ds = 0 & \text{per } r < a. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Vedi I Nota, questi Rendiconti, pag. 34.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1920.

Viceversa se $\psi(s)$ soddisfa alla (13) soddisfa anche alla (14). Infatti chiamiamo ψ' il secondo membro della (13). Si ha, pel ragionamento del § 3, che ψ' soddisfa alle equazioni

$$\int_0^\infty I_0(rs) s \psi'(s) ds = 0 \quad \text{per } r > a,$$

$$\int_0^\infty I_0(rs) \psi'(s) ds = \int_0^\infty e^{-ls} I_0(rs) \psi(s) ds \quad \text{per } r < a:$$

di qui essendo per la (13) $\psi' = \psi$ si deducono le (14).

Se ora dimostro che le (14) non possono avere altra soluzione che $\psi(s) = 0$, tale sarà anche l'unica soluzione della (13) e quindi $\frac{1}{\pi}$ non sarà parametro dell'equazione (di Fredholm) (A_2) : questa sarà pertanto risolubile in modo unico.

Supponiamo infatti che le (14) abbiano una soluzione $\psi \neq 0$. La funzione

$$(15) \quad \varphi(r, z) = \int_0^\infty \left[e^{\mp(z - \frac{l}{2})s} - e^{\mp(z + \frac{l}{2})s} \right] I_0(rs) \psi(s) ds$$

è, per quanto s'è detto al § 1, armonica e si annulla all'infinito, insieme colle derivate prime.

Inoltre la prima delle (14) mi dice che la derivata rispetto a z è continua anche attraverso i piani $z = \frac{l}{2}$, $z = -\frac{l}{2}$ per $r > a$.

La seconda delle (14) esprime che la funzione prende sui piatti il valore zero. Ma tale funzione φ non può che essere zero identicamente.

Consideriamo infatti lo spazio S limitato da due cilindri, aventi per asse l'asse delle z , che abbraccino separatamente i piatti e che si faranno variare in modo che il loro raggio tenda ad a mentre l'altezza tenderà a zero, e da una sfera col centro nell'origine e raggio abbastanza grande, e che dovrà farsi tendere all'infinito.

Applichiamo allora la nota formula

$$\int_S \Delta \varphi dS + \int_\sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma = 0,$$

dove ν si intende la normale interna alla superficie σ che limita S ; e

$$\Delta \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2.$$

Passando al limite, nel modo detto sopra, l' \int_σ deve tendere a zero, perchè

entrambe le parti, quella relativa ai due cilindri e quella relativa alla sfera, si annullano. Rimane

$$\int_s \Delta \varphi \, dS = 0,$$

ossia

$$\Delta \varphi = 0.$$

Si deduce di qui $\varphi = \text{costante}$ e quindi zero, perchè tale è il valore di φ all' ∞ e sui dischi. Per completare la dimostrazione bisogna ora far vedere che non può essere φ identicamente zero se non è $\psi = 0$. Mi occorre perciò ricordare che dalla relazione

$$\int_0^\infty I_0(rs) \chi(s) \, ds = F(r),$$

si deduce ⁽¹⁾

$$\frac{\chi(s)}{s} = \int_0^\infty I_0(su) u F(u) \, du;$$

cosicchè se $F(r) = 0$ si ottiene $\chi(s) = 0$. Tale è appunto il nostro caso:

perchè se $\varphi = 0$ si avrà in particolare, per $z = \frac{l}{2}$,

$$\int_0^\infty I_0(rs) (1 - e^{-ls}) \psi(s) \, ds = 0,$$

ossia $\psi(s) = 0$.

Lo stesso ragionamento si fa per l'equazione (B₂). Dimostrato così che le (A₂), (B₂) sono risolubili, la risoluzione si potrà ottenere col metodo di Fredholm.

5. STUDIO DI DUE CASI PARTICOLARI. — La risoluzione del problema si semplifica in due casi: di questi il primo è quello studiato dal Kirchhoff.

1° caso. $\frac{a}{l} = \infty$: cioè la distanza dei due piatti è infinitesima rispetto al raggio. Facciamo nelle equazioni (A₂) (B₂) le sostituzioni $s = \frac{s_1}{l}$, $u = \frac{u_1}{l}$.

La (A₂) diventa

$$(16) \quad \psi_1\left(\frac{s_1}{l}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen} a \frac{s_1}{l}}{\frac{s_1}{l}} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-u_1} \psi_1\left(\frac{u_1}{l}\right) \left[\frac{\operatorname{sen} (u_1 + s_1) \frac{a}{l}}{u_1 + s_1} + \frac{\operatorname{sen} (u_1 - s_1) \frac{a}{l}}{u_1 - s_1} \right] du_1.$$

(1) Beltrami, loc. cit., § 4.

Ma il secondo termine del secondo membro quando $\frac{a}{l}$ diventa ∞ , diviene semplicemente (1)

$$e^{-s_1} \psi_1\left(\frac{s_1}{l}\right) = e^{-ls} \psi_1(s).$$

Abbiamo allora dalla (16) ritornando alle primitive variabili

$$(17) \quad \psi_1(s) = \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen } as}{s(1 - e^{-ls})},$$

e analogamente da (B_2)

$$(18) \quad \psi_2(s) = \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen } as}{s(1 + e^{-ls})}.$$

Queste danno luogo ad una soluzione approssimata del problema nel caso del Kirchhoff.

2° caso. $\frac{a}{l} < \frac{\pi}{2}$. Come è noto la soluzione di una equazione di Fredholm

$$\psi(s) = F(s) + \lambda \int_0^1 K(s, u) \psi(u) du$$

è una funzione meromorfa di λ . Quando λ è sufficientemente piccolo, la soluzione è data da una serie in λ (elemento della funzione meromorfa corrispondente all'origine). È questo il caso che qui studiamo.

Consideriamo per ciò l'equazione che comprende come casi particolari per $\lambda = \pm \frac{1}{\pi}$ le (A_2) , (B_2) ,

$$(19) \quad \psi(s) = \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen } as}{s} + \lambda \int_0^\infty e^{-lu} \psi(u) \left[\frac{\text{sen}(u+s)a}{u+s} + \frac{\text{sen}(u-s)a}{u-s} \right] du,$$

e cerchiamo se è possibile una soluzione del tipo

$$(20) \quad \psi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \psi_i(s).$$

Formalmente si ottiene la soluzione ponendo nel modo noto (2) :

$$\psi_0(s) = \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen } as}{s},$$

$$\psi_i(s) = \int_0^\infty e^{-lu} \psi_{i-1}(u) \left[\frac{\text{sen}(u+s)a}{u+s} + \frac{\text{sen}(u-s)a}{u-s} \right] du,$$

con la condizione però che la serie (20) sia convergente.

(1) Beltrami, loc. cit., § 6 (alla fine).

(2) Ved. p. es., Vivanti, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari*, § 50 Manuali Hoepli.

Si osservi ora che

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(u+s)a}{u+s} + \frac{\operatorname{sen}(u-s)a}{u-s} \right| = \left| 2 \int_0^a \cos(ut) \cos(st) dt \right| < 2a$$

quindi essendo

$$|\psi_0| < \frac{2a}{\pi}$$

sarà

$$|\psi_1| \leq \frac{2a}{\pi} \cdot 2a \int_0^\infty e^{-lu} du = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{2a}{l}$$

e in generale

$$|\psi_i| \leq \frac{2a}{\pi} \cdot \left(\frac{2a}{l}\right)^i$$

La serie (20) sarà certamente convergente quando

$$\frac{2a}{l} |\lambda| < 1.$$

Nel nostro caso $|\lambda| = \frac{1}{\pi}$: perciò se

$$\frac{a}{l} < \frac{\pi}{2}$$

le soluzioni di (A_2) , (B_2) sono date dalla serie (20) ponendovi rispettivamente

$$\lambda = \pm \frac{1}{\pi}.$$

Astronomia. — Nuova determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio. Nota II di G. ARMELLINI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE ⁽¹⁾.

Riporto ora i risultati delle mie osservazioni fatte nel maggio e giugno 1920: l'ordine delle colonne nelle tabelle e le denominazioni sono identiche a quelle adoperate della Nota I.

TABELLA III

(2^a serie - maggio 1920).

DATA	Coppia	Cerchio	D	ΔL	C ₁	C ₂	C ₃	Latitudine λ	
1920									
Maggio	3	IX	E	41° 48' 3,92	+ 5' 29,94	- 0,57	+ 0,12	+ 0,10	41° 53' 33,51
	4	"	W	4,05	29,42	0,00	"	"	33,69
	5	"	E	4,18	29,21	+ 0,32	"	"	33,93
	8	"	W	4,56	28,85	- 0,50	"	"	33,13
Maggio	3	X	W	41 55 17,33	- 1 44,39	+ 0,18	+ 0,12	- 0,03	41 53 33,21
	5	"	"	17,63	44,38	- 0,32	"	"	33,02
	6	"	"	17,78	44,90	+ 0,23	"	"	33,20
	8	"	E	18,08	45,23	- 0,43	"	"	32,51
	9	"	W	18,24	45,56	- 0,01	"	"	32,76
Maggio	3	XI	E	41 47 51,95	+ 5 41,20	- 0,26	+ 0,12	+ 0,10	41 53 33,11
	5	"	"	52,28	40,53	- 0,08	"	"	32,95
	6	"	"	52,44	40,08	+ 0,18	"	"	32,92
	9	"	"	52,94	40,94	- 0,88	"	"	33,22
Maggio	3	XII	W	41 52 53,81	+ 0 39,00	- 0,05	+ 0,14	0,00	41 53 32,90
	5	"	"	54,17	38,95	0,00	"	"	33,26
	8	"	E	54,71	38,82	- 0,30	"	"	33,37
	9	"	W	54,89	38,45	+ 0,11	"	"	33,59
Maggio	8	XIII	W	41 54 46,49	- 1 13,58	+ 0,08	+ 0,12	- 0,03	41 53 33,08
	9	"	E	46,72	13,62	- 0,23	"	"	32,96

Passiamo infine alle mie osservazioni del mese di giugno, i cui risultati sono contenuti nella tabella seguente:

(¹) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1920.

TABELLA IV
(3^a serie - giugno 1920).

DATA	Coppia	Cerchio	D	ΔL	C ₁	C ₂	C ₃	Latitudine λ
1920								
Giugno 6	XIV	E	41° 53' 49",68	— 0' 16",29	— 0",48	+ 0",07	0",00	41° 53' 32",98
7	"	"	49,83	16,91	+ 0,02	"	"	33,01
11	"	"	50,43	17,24	— 0,32	"	"	32,94
Giugno 5	XV	E	41 56 11,65	— 2 37,74	— 0,06	+ 0,07	— 0,04	41 53 33,88
7	"	"	11,99	38,54	— 0,08	"	"	33,40
11	"	W	12,69	39,75	+ 0,17	"	"	33,14
12	"	"	12,85	39,66	— 0,24	"	"	33,06
14	"	"	13,19	39,82	— 0,36	"	"	33,04
Giugno 6	XVI	E	41 45 6,69	+ 8 27,19	— 0,51	+ 0,07	+ 0,15	41 53 33,59
7	"	"	6,90	26,24	— 0,06	"	"	33,30
12	"	W	7,99	26,29	— 1,10	"	"	33,40
13	"	E	8,20	24,29	+ 0,31	"	"	33,02
14	"	"	8,41	24,29	+ 0,32	"	"	33,24
15	"	W	8,61	24,79	— 0,05	"	"	33,57
20	"	"	9,52	26,08	— 2,03	"	"	33,79
22	"	"	9,86	23,94	— 0,58	"	"	33,44
23	"	"	10,04	23,84	— 0,34	"	"	33,76
Giugno 6	XVII	W	41 47 2,74	+ 6 30,37	+ 0,18	+ 0,14	+ 0,12	41 53 33,55
11	"	E	3,91	29,85	— 0,59	"	"	33,43
12	"	W	4,14	28,43	+ 0,82	"	"	33,61
13	"	"	4,38	28,70	— 0,19	"	"	33,15
14	"	"	4,61	28,20	+ 0,19	"	"	33,26
15	"	E	4,84	29,77	— 0,34	"	"	33,53
16	"	W	5,06	27,81	— 0,21	"	"	32,92
18	"	"	5,47	26,98	+ 0,69	"	"	33,40
20	"	E	5,87	27,31	— 0,07	"	"	33,37
21	"	W	6,08	25,89	+ 0,54	"	"	32,77
22	"	E	6,29	27,42	— 0,36	"	"	33,61
24	"	W	6,69	26,21	+ 0,47	"	"	33,63
26	"	E	7,08	25,97	— 0,52	"	"	32,79
Giugno 12	XVIII	E	41 56 16,79	— 2 44,04	+ 0,20	+ 0,14	— 0,05	41 53 33,04
14	"	"	17,28	44,13	— 0,43	"	"	32,91
18	"	"	18,19	44,48	— 0,08	"	"	33,72
20	"	W	18,63	44,90	— 0,12	"	"	33,70
21	"	E	18,86	46,07	+ 0,08	"	"	32,96
22	"	W	19,08	46,18	— 0,21	"	"	32,78
23	"	"	19,30	43,67	— 2,80	"	"	32,92
26	"	"	19,94	46,99	+ 0,24	"	"	33,28
27	"	E	20,13	46,82	— 0,46	"	"	32,94
28	"	W	20,32	48,00	+ 0,69	"	"	33,10

Dai valori riportati nelle precedenti tabelle, otteniamo come medie delle mie osservazioni i seguenti risultati:

I serie (Coppie 60 — 1920,2)	$\lambda = 41^{\circ} 53' 33'',05$
II serie (Coppie 19 — 1920,3)	$\lambda = 41^{\circ} 53' 33'',17$
III serie (Coppie 40 — 1920,5)	$\lambda = 41^{\circ} 53' 33'',28$

Abbiamo riportato i centesimi di secondo soltanto per completezza, giacchè è chiaro che essi possono subire qualche variazione non essendo ancora definitivi i valori adottati ⁽¹⁾ per le costanti dello strumento.

Ma intanto dobbiamo notare come *dal confronto delle tre serie sembra apparire chiaramente la variazione della latitudine* del Campidoglio, dovuta allo spostamento del Polo istantaneo. Su questo punto delicatissimo occorrerebbe però un'ampia discussione.

Purtroppo poi, a cagione dell'attuale inattività dell'Ufficio delle Latitudini, non è possibile, per ora, di ridurre i risultati dal Polo istantaneo al Polo medio.

Mi propongo quindi di tornare sull'argomento in un lavoro definitivo in cui, tra l'altro, riporterò per esteso la lista delle singole osservazioni con le discussioni che si riferiscono a ciascuna di esse. Ma prima di terminare questa nota sento il gradito dovere di ringraziare il ch.mo prof. Di Legge, direttore dell'Osservatorio, il quale ha posto a mia disposizione gli strumenti necessari per l'esecuzione del presente lavoro.

(¹) Come ho detto nella Nota I, queste costanti sono state determinate dal ch.mo prof. Giacomelli astronomo dell'Osservatorio. Egli si è servito di coppie di stelle del Boss per il passo della vite, ed ha trovato il valore delle divisioni dei livelli ponendoli sopra il dado dello strumento dei passaggi di Ertel. Le sue osservazioni, che sta ora completando, saranno presto pubblicate; ed intanto vadano anche a lui i miei più vivi ringraziamenti.

Meccanica. — *Sulle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie (seconda approssimazione)*. Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (¹).

In una Nota, comparsa lo scorso anno (²) nei Rendiconti di questa R. Accademia, ho iniziato lo studio, in seconda approssimazione, delle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie. Ivi, dopo aver trovato la soluzione generale della equazione caratteristica della prima approssimazione, ho mostrato come la soluzione, in seconda approssimazione, della equazione del nostro problema, dell'equazione cioè

$$\begin{aligned} & \xi \frac{d}{d\xi} \left\{ \varepsilon(\alpha\xi) + \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right\} + k \left\{ \varepsilon(\alpha\xi) - \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right\} = \\ & = -\xi \left[\varepsilon(\alpha\xi) + \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) - \varepsilon(\alpha\xi) \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right] \frac{d}{d\xi} \left[\varepsilon(\alpha\xi) + \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right] + \\ & + \left[1 + \varepsilon(\alpha\xi) + \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) + \varepsilon(\alpha\xi) \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right] \frac{d}{d\xi} \left[\varepsilon(\alpha\xi) \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right], \end{aligned}$$

resulta espressa (supposta privata del termine costante) mediante (³)

$$\varepsilon_2 = \mu(\xi + \xi^{-1}) - \frac{3k^2 - 1}{2} \mu^2(\xi^2 + \xi^{-2}).$$

(¹) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1920.

(²) Questi Rendiconti, vol. XXVIII, fasc. 5°, 2° sem., pag. 174.

(³) Giova richiamare, per comodità del lettore, il significato dei simboli.

Si pensi ad un canale rettilineo, a sponde verticali, col medesimo stato di moto lungo ogni retta perpendicolare alle sponde. Basterà allora studiare cotesto moto in una sezione parallela a coteste sponde. I caratteri qualitativi del moto stesso vengono supposti essere quelli che corrispondono ad onde propagantesi entro il canale senza alterazione di forma. La qualifica « permanente » sta qui a significare che, per un osservatore dotato della velocità di propagazione, il movimento ha carattere stazionario. Detta c la grandezza di cotesta velocità di propagazione ed assunto un sistema di assi x, y , animati della stessa velocità, avremo che le proiezioni della velocità in discorso saranno — c, o , supponendo orizzontale il fondo del canale ed intendendo l'asse y verticale e l'asse x , scorrente sul fondo, volto in senso opposto alla traslazione. L'asse delle y verrà supposto volto verso l'alto. La regione del moto sarà rappresentata, nel piano xy , da una striscia L , semplicemente connessa, indefinita, limitata, inferiormente, dall'asse delle x e, superiormente, da una linea libera l . Qualora questa linea consti di tratti riproducentesi periodicamente, le onde diconsi *oscillatorie*; diversamente si ha un tipo di onde, che comprende (come caso particolare) il caso dell'onda *solitaria*. Il movimento del liquido nella striscia L ,

In una Memoria, che verrà inserita nel Nuovo Cimento, mostrerò, per estenso, come sono successivamente pervenuto (in seconda approssimazione) agli ulteriori risultati che qui mi permetto riassumere.

semplicemente connessa, viene supposto ovunque regolare ed irrotazionale. Esisterà, perciò, il potenziale $\varphi(x, y)$ (potenziale di velocità) uniforme e regolare in L . La funzione φ sarà funzione armonica, a motivo della incompressibilità del fluido; quindi si potrà definire la funzione associata ψ (detta funzione di corrente). Denotate con u e v le proiezioni della velocità *relativa* del fluido in un generico punto (x, y) , ammetteremo naturalmente che sia positivo il limite inferiore dei valori di u , dovendosi, nel nostro caso, ogni singola particella fluida, ritenere dotata di velocità assoluta non rilevante in confronto alla velocità di propagazione $(-c, 0)$. In modo, cioè, che la suddetta velocità relativa possa differire soltanto di poco dalla $(c, 0)$. Ciò premesso, posto $\varphi + i\psi = f$, $u - iv = w$, e considerato un piano di Gauss rappresentativo dei valori f , sul quale la striscia L viene rappresentata in modo conforme dalla striscia limitata dalle rette $\psi = 0$ e $\psi = q$ (essendo q la portata del moto relativo per unità di larghezza del canale, nell'ipotesi di ritenere unitaria la densità del liquido), il Levi-Civita pervenne a caratterizzare il problema meccanico, relativo al suddetto moto di un liquido pesante, mediante la seguente equazione funzionale:

$$(1) \quad \frac{d}{df} \left\{ w(f + iq) w(f - iq) \right\} - ig \left\{ \frac{1}{w(f + iq)} - \frac{1}{w(f - iq)} \right\} = 0.$$

la quale può dirsi insieme differenziale e alle differenze finite. In essa $i = \sqrt{-1}$, mentre g è la grandezza dell'accelerazione della gravità, ed f è la variabile complessa $\varphi + i\psi$; tutto essendo ricondotto alla determinazione di integrali $w(f)$ della (1), reali sull'asse reale, regolari nella striscia $\psi = \pm q$, finiti all'infinito e tali che la loro parte reale non scenda, in cotesta striscia, al disotto di una costante positiva (del resto comunque piccola). Il caso che si tratti di onde oscillatorie, si traduce analiticamente nella periodicità di $w(f)$

(con periodo reale), per cui, allora, posto $\xi = e^{\frac{2\pi i f}{\omega}}$ (dove ω , quantità positiva, rappresenta il periodo), la funzione $w(f)$ diventa funzione uniforme e regolare della variabile complessa ξ nella corona corrispondente, nel piano ξ , alla suddetta striscia. Posto, inoltre,

$\alpha = e^{-\frac{2\pi q}{\omega}}$ (con che α risulta frazione propria), la corona, corrispondente alla striscia $\psi = \pm q$, si trova limitata, internamente, dalla circonferenza $|\xi| = \alpha$ ed, esternamente, dalla circonferenza $|\xi| = \frac{1}{\alpha}$. Posto, infine, $w = c(1 + \varepsilon)$ (dove c rappresenta la velocità di propagazione), avremo che l'equazione delle onde di tipo permanente, nel caso si tratti di onde oscillatorie, assume la forma superiormente riprodotta nel testo, essendo $k = \frac{g\omega}{2\pi c^3}$.

L'equazione in discorso può, brevemente, scriversi $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)$, dove A , come si vede, è un operatore lineare (nei riguardi di ε e della sua derivata), mentre B è un operatore non lineare.

L'equazione considerata dal Levi-Civita come caratteristica delle soluzioni approssimate è l'equazione $A(\varepsilon) = 0$. Ricordiamo come ε viene, insieme con α , supposta sviluppabile in serie di potenze intere e positive di un parametro γ ; sicchè $\alpha = \alpha_0 + S(\gamma)$, essendo, in prima approssimazione, $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$ ed $\varepsilon = \varepsilon_1 = \gamma(\xi + \xi^{-1})$ (soluzione di Airy). Ricordiamo, poi, come la ε , in seconda approssimazione, si ottiene considerando

I. La espressione del *potenziale di velocità* è la seguente:

$$\varphi = cx + \mu \frac{c\lambda}{\pi} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{icy}{\lambda} - \mu^2 \frac{3(k^2 - 1)}{4\pi} c\lambda \sin 4\pi \frac{x}{\lambda} \cos 4\pi i \frac{y}{\lambda}.$$

II. L'equazione del *pelo libero* assume la forma

$$h - y = \mu \frac{\lambda}{i\pi} \sin 2\pi \frac{ih}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{3k^2 - 1}{4i\pi} \mu^2 \lambda \sin 4\pi \frac{ih}{\lambda} \cos 4\pi \frac{x}{\lambda},$$

dopo avere introdotta la *profondità media*, la quale si trova espressa mediante

$$(2) \quad h = \frac{q}{c} + \frac{\mu^2 \lambda}{2i\pi} \sin 4\pi \frac{iq}{c\lambda}.$$

Fra la *massima sopraelevazione*, h_1 , (sul livello medio) del pelo libero e la *massima depressione*, h_2 , risulta un *divario*, δ^* , espresso da

$$\delta^* = h_1 - h_2 = \frac{3k^2 - 1}{4\pi} \mu^2 \lambda \left(e^{\frac{4\pi h}{\lambda}} - e^{-\frac{4\pi h}{\lambda}} \right),$$

il quale, per onde lunghe, si riduce a

$$\delta^* = 2(3k^2 - 1) \mu^2 h;$$

mentre, denotando *ampiezza d'onda* la semisomma $h^* = \frac{h_1 + h_2}{2}$, si ha

$$h^* = \frac{\mu}{2\pi} \lambda \left(e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}} \right),$$

e, quindi, per onde lunghe,

$$\mu = \frac{h^*}{2h}.$$

III. Nei riguardi del *trasporto globale* (non emergente in prima approssimazione), cioè del flusso di liquido attraverso una verticale fissa, ci limiteremo pure a darne la espressione. Supponendo di considerare un intervallo di tempo eguale ad un periodo, e supponendo unitaria la densità del liquido,

l'equazione $A(\varepsilon) = B(\varepsilon_1)$ ed ivi ponendo $\alpha_0(1 + b_1\gamma + b_2\gamma^2)$ al posto di α ed $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_1 + \gamma^2 \sum_1^\infty \alpha_{2s}(\xi^s + \xi^{-s})$ al posto di ε ; trascurando nella $A(\varepsilon_2) = B(\varepsilon_1)$ i termini, nei quali

compaia γ con grado superiore al secondo, si ottiene $b_1 = 0$, $a_{22} = -\frac{3k^2 - 1}{2}$ ed $a_{20} = 0$ per $s > 2$. Sicchè, denotando $\gamma + a_{21}\gamma^2$ con μ , potremo scrivere, in seconda approssimazione, $\alpha = \alpha_0(1 + b_2\mu^2)$ ed $\varepsilon = \varepsilon_2 \equiv \mu(\xi + \xi^{-1}) - \frac{3k^2 - 1}{2} \mu^2(\xi^2 + \xi^{-2})$.

il detto trasporto globale, per unità di larghezza del canale, risulta espresso da

$$\frac{\mu^2 \lambda^2}{2i\pi} \operatorname{sen} 4\pi \frac{ih}{\lambda},$$

il quale, per onde lunghe, riducesi a $2\mu^2 h \lambda$.

IV. Nei riguardi, infine, della *relazione* esistente, in seconda approssimazione, fra la velocità di propagazione, la lunghezza d'onda e l'altezza del livello medio (profondità), relazione, come vedremo, dipendente dal parametro μ (parametro, come abbiamo notato, proporzionale all'ampiezza d'onda), qui osserveremo, intanto, che essa si ottiene ricordando come (in seconda approssimazione) si ha

$$(3) \quad \alpha \equiv e^{-\frac{2\pi q}{\omega}} = \alpha_0(1 + b_2 \mu^2),$$

essendo b_2 un opportuno coefficiente. Giova pure ricordare che, nell'equazione funzionale fondamentale del Levi-Civita, $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)$, quando si eguagliano a zero i coefficienti di γ e di γ^2 , non interviene b_2 . In questo senso può ritenersi giustificato di riguardare il termine correttivo in μ^2 , nell'espressione di α , come un elemento che trascende la seconda approssimazione, in quanto b_2 figurerebbe soltanto nell'equazione proveniente dall'eguagliare a zero il coefficiente di γ^3 nella $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)$. Tale è, in sostanza, il punto di vista adottato da Stokes, che conduce, anche in seconda approssimazione, alla relazione di Airy, dovendosi allora, logicamente, omettere, nella (3), anche la parte correttiva proveniente dall'esprimere $\frac{q}{\omega}$ mediante $\frac{h}{\lambda}$.

Lo studio della terza approssimazione permette la determinazione di b_2 . Allora la (3), tenendo presente la (2), porge la relazione

$$k = x \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2} \frac{P(k)}{k^2 - 1} \right\},$$

avendo posto

$$x \equiv \frac{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}.$$

$$P(k) \equiv 9(k^4 + 1) - 10k^2.$$

Pertanto (tenendo presente la teoria delle funzioni implicite) potremo scrivere

$$k = x \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2} \frac{P(x)}{x^2 - 1} \right\},$$

ovvero

$$\frac{g\lambda}{2\pi c^2} = \alpha \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2} \frac{P(\alpha)}{\alpha^2 - 1} \right\},$$

perchè $k = \frac{g\omega}{2\pi c^3}$ e perchè si trova essere $\omega = c\lambda$. Come si vede, assegnato $\frac{h}{\lambda}$, potremo sempre trovare un numero, μ_0 , positivo, così piccolo che, per $\mu < \mu_0$, resulti soddisfatta la disequaglianza $k > 1$, come richiede il nostro metodo di approssimazioni successive.

Biologia. — *Ricerche sul manicotto glandulare (stomaco larvale) della Rana esculenta* ⁽¹⁾. Nota della dott. IOLE GALOTTI, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI ⁽²⁾.

Nel 1899 il prof. A. Ruffini ⁽³⁾ descriveva nelle larve di *Rana esculenta* la presenza di un particolare organo che ritenne andasse a formare la parte glandulare dello stomaco della forma definitiva: l'organo lo chiamò « manicotto glandulare ».

Prima del Ruffini il Ruseconi aveva notata l'accennata formazione; ma l'aveva interpretata in maniera inesatta, pur osservando che entrava nella formazione dello stomaco definitivo. Come tale studio, prima del Ruffini, sia stato trascurato, può trovare probabile spiegazione nelle osservazioni del Cotronei ⁽⁴⁾, il quale ha dimostrato che in altre forme larvali di Anfibi anuri (*Bufo*, *Pelobates*, *Discoglossus*) questo manicotto non è macroscopicamente evidente.

Il Duesberg che nel 1906 descriveva le modificazioni istologiche nell'intestino della *Rana fusca*, notava la presenza del manicotto glandulare (*manchon*) del Ruffini, del quale ignorava il lavoro.

Con la presente Nota mi limito ad esporre brevemente i risultati delle mie ricerche sulle modificazioni istologiche del manicotto al momento della metamorfosi, essendo giunta a conclusioni differenti da quelle del Duesberg; rinando per lo studio completo del manicotto al lavoro in esteso corredato da figure, che spero poter pubblicare quanto prima.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma, sotto la guida del dott. Giulio Cotronei, libero docente.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1920.

⁽³⁾ Ruffini A., *Sullo sviluppo e sul tardivo contegno dello strato glandulare dello stomaco di Rana esculenta*. Monitore Zoologico Italiano, vol. X, anno X, 1899.

⁽⁴⁾ Cotronei G., *L'apparato digerente degli Anfibi nelle sue azioni morfogenetiche*. R. Accademia dei Lincei, Memorie, 1914.

Tutte le mie osservazioni sono state fatte su larve di *Rana esculenta*, in parte allevate in laboratorio e sottoposte a speciali regimi alimentari, ed in parte prese direttamente dagli acquitrini della campagna romana.

Il manicotto glandulare si presenta, nelle larve ad accrescimento avanzato, limitato esternamente da un sottile strato di connettivo, intercalato con scarse fibrocellule ed internamente verso il lume da un epitelio cilindrico: tutto lo spessore compreso tra i due strati, è occupato dalle glandule. Le glandule hanno forma tubolosa contorta ramificata e sono immerse in una sottile rete connettivale poco facilmente rilevabile durante l'attività funzionale, più evidente nel riposo, nel digiuno, evidentissima nelle larve ibernanti.

L'epitelio dei tuboli glandulari è formata da cellule sub-cubiche il cui aspetto varia moltissimo a seconda dello stato funzionale dello stomaco larvale ⁽¹⁾.

Venendo a descrivere i fenomeni istologici che avvengono nel manicotto glandulare al momento della metamorfosi, noto che non si possono generalizzare i fatti descritti dal Duesberg nella *Rana fusca*, dove le modificazioni del tubo intestinale avverrebbero costantemente nell'intervallo tra l'*apparition* degli arti posteriori e quella degli arti anteriori: secondo le mie osservazioni sul manicotto, le modificazioni proprio inerenti alla metamorfosi, s'iniziano al tempo in cui gli arti anteriori tendono a fuoruscire e proseguono durante l'emissione e dopo.

Duesberg tratta diffusamente dei fenomeni che avvengono nell'intestino: rispetto al manicotto dice (pp. 210 e 211): « C'est la couche épithéliale superficielle, comprise entre les orifices glandulaires qui seule présente des phénomènes dégénératifs. Les cellules voisines des orifices des culs-de-sac glandulaires prolifèrent alors et prennent la place des éléments mortifiés; puis tout rientre dans l'ordre. La couche glandulaire ne présente pendant cette mue aucune modification » ⁽²⁾.

Ruffini invece dice che: « l'epitelio glandulare subisce delle profonde trasformazioni »; ne rimandava però la descrizione a un successivo lavoro, che non fu più pubblicato.

Dalle mie ricerche io sono venuta alla conclusione che non soltanto l'epitelio superficiale degeneri, ma anche una parte delle glandule mentre rimangono integri i fondi glandulari che daranno origine alle glandule dello stomaco definitivo.

Si osserva in primo tempo un cambiamento nella forma delle glandule (notato dal Ruffini) in quanto che esse tendono a perdere le ramificazioni

(¹) Che il manicotto glandulare rappresenti uno stomaco larvale è stato dimostrato dal Cotronei con la ricerca dell'acido cloridrico.

(²) Il corsivo non è dell'autore.

per una rientranza di rami secondari: cominciano poi i processi degenerativi che interessano l'epitelio superficiale e le glandole, così come ho accennato; la degenerazione dello strato superficiale ricorda perfettamente quanto si verifica nell'intestino; dalla parte superficiale procede verso le glandule; ivi si nota una degenerazione delle cellule che perdono i loro limiti e mostrano i nuclei in cariolisi; il protoplasma si riduce ad una massa informe: non c'è più traccia di lume glandulare: la degenerazione non interessa, come ho già detto, i fondi glandulari che servono a ricostituire le glandule gastriche della forma definitiva.

Fisiologia. — Azione della saliva sull'amido in presenza di succo gastrico e di succo pancreatico ⁽¹⁾. Nota di S. PASTORE, presentata dal Corrispondente S. BAGLIONI ⁽²⁾.

Ci siamo occupati del modo di comportarsi della saliva sia in presenza di succo gastrico, sia in presenza di succo pancreatico. La prima questione fu già da molti altri trattata, ma non definita; la seconda era ancora da trattare sperimentalmente. Abbiamo diviso le nostre esperienze in vari gruppi: di esse riportiamo qui i risultati.

Con la prima serie di esperienze cercammo di stabilire l'ambiente chimico più favorevole all'azione amilolitica della saliva mista umana, e vedemmo:

1°) In miscela a reazione alcalina pari a 0,1 % in g. di NaOH, la digestione dell'amido (10 cc. di amido, salda 0,56 % + 1 cc. di saliva attiva) si verificava entro sei ore.

2°) Anche in miscela a reazione acida pari a 0,12 % in g. di HCl, la digestione dell'amido (10 cc. di amido, salda 0,5 % + 1 cc. di saliva attiva) si ebbe, spesse volte, entro 6 ore; altre volte però fu necessario neutralizzare.

Nella seconda serie di esperienze si è gradatamente elevata la quantità di acido aggiunto fino a giungere a quello capace di distruggere l'enzima.

1°) La saliva sull'amido agisce ugualmente bene sia in presenza di succo gastrico di cane con reazione acida pari a 0,25 % in g. di HCl, sia in presenza di solo HCl alla stessa concentrazione.

2°) Un ambiente acido pari a 0,5 % in g. di HCl, sia dato da succo gastrico di cane, sia da semplice HCl, non è capace, entro 24 ore.

⁽¹⁾ Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. S. Baglioni.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1920.

in presenza di amido (5 cc. di amido, salda 0,5 % + 1 cc. di saliva attiva) di distruggere il potere amilolitico della saliva.

3°) Ogni potere amilolitico è, invece, distrutto alla suddetta concentrazione acida, in assenza di amido.

Con la terza serie di esperienze abbiamo indagato la durata di resistenza dell'enzima in ambiente acido, tanto in presenza di succo gastrico di cane quanto di semplice HCl, e tanto in presenza quanto in assenza di amido, mantenendo le prove in termostato tra 37° e 40°. I risultati sono:

1°) La saliva mista umana in miscela di reazione acida uguale a 0,12 ‰ in g. HCl e in presenza di succo gastrico di cane, anche dopo 96 ore, è attiva, ma il massimo di attività si osserva entro le prime 24 ore.

2°) La saliva mista umana in presenza di HCl, pari a 0,12 ‰, mantiene inalterata la sua attività rispetto all'amido per oltre tre giorni.

3°) La saliva mista umana in un ambiente acido eguale a g. 0,25 ‰ di HCl, mantiene inalterata la sua attività, tanto in presenza, quanto in assenza di amido.

4°) L'attività amilolitica della saliva umana, rimasta in un ambiente acidulato con HCl alla concentrazione di 1,5 ‰ dopo 3 ore, è scomparsa, mentre, se era presente amido (1 cc. di saliva attiva su 10 cc. di amido, salda 2 ‰), è conservata.

Dalla quarta serie di esperienze, intese ad indagare l'azione della saliva mista umana sul potere digerente del contenuto gastrico di uomo, e, viceversa, l'azione di quest'ultimo e del succo gastrico di cane sul potere amilolitico della saliva, è risultato:

1°) La saliva mista umana, in presenza di contenuto gastrico attivo di cadavere umano, agisce egualmente bene a concentrazione acida debole (0,16 ‰ in g. di HCl), come a concentrazione acida più elevata (1,8 ‰ in g. di HCl).

2°) Il contenuto gastrico dell'uomo sano non ha ostacolato l'azione della saliva, la quale si è svolta a concentrazione acida tra 0,15 e 1,2 ‰.

3°) Il potere pepsinico del succo gastrico di cane non è modificato dalla presenza della saliva mista umana.

4°) Il potere pepsinico del contenuto gastrico di individui morti per malattie non compromettenti il tubo gastroenterico, e quello del contenuto gastrico di uomo sano, non sono turbati dalla presenza di saliva mista umana.

Dalla quinta serie di ricerche fatte per indagare il modo di comportarsi della saliva mista umana in presenza di succo pancreatico di cane e di estratto pancreatico di uomo, e viceversa, il modo di comportarsi di questi ultimi in presenza della saliva, è risultato.

1°) La saliva mista umana, tanto in presenza di succo pancreatico di cane (alcalinità in g. di NaOH 2 ‰) quanto in presenza di estratto acido di pancreas umano (acidità in g. di HCl, 0,8 ‰) si è mostrata, entro le 24 ore, molto attiva sull'amido.

2°) La saliva mista umana è attiva in presenza di estratto di pancreas umano, sia lievemente acido ($0,8 \text{ ‰}$ di HCl), sia alcalino ($9,8 \text{ ‰}$ in g. di Na_2CO_3).

3°) L'azione tripsinica dell'estratto pancreatico umano non è turbata dalla presenza della saliva mista umana.

4° L'azione lipolitica di estratto di pancreas umano acido ($0,24 \text{ ‰}$ in g. di HCl) o alcalino ($9,8 \text{ ‰}$ in g. di Na_2CO_3) non è modificata dalla presenza della saliva umana.

Dal complesso di queste ricerche risulta che la ptialina della saliva mista umana è probabilmente in grado, in condizioni ordinarie, di seguitare ad agire sull'amido nello stomaco con una velocità rallentata in proporzione dell'acidità del succo gastrico: in ogni caso, mantiene la sua attività per 3 ore ad una concentrazione acida di oltre $1,5 \text{ ‰}$ in g. di HCl, in modo che, giunta nel duodeno e nel tenue, può seguitare ancora ad agire.

La sua presenza non modifica la digestione pepsinica, nè quella dei tre enzimi del succo pancreatico.

Fisiologia vegetale. — L'influenza delle basse temperature sulla germinazione del frumento appena raccolto e dei semi così detti freschi. Nota riassuntiva di O. MUNERATI, presentata dal Socio R. PIROTTA ⁽¹⁾.

Non è che un contributo occasionale e frammentario che intendo recare sul tema, e mi giustifichi il fatto di avere un tempo studiato, con finalità applicative, il meccanismo della quiescenza dei semi di alcune piante più infeste della Bassa Valle Padana. Fu, anzi, premientemente per codesto motivo che la mia attenzione venne attratta dalla comunicazione di G. T. Harrington, apparsa nel decorso dicembre in *Science* (N. S., vol. L, n. 1301, pag. 528). Affermava Harrington, in opposizione a quanto viene comunemente creduto ed ammesso, che il grano ed altri cereali comuni, quali l'orzo e l'avena, sono in grado di germinare al cento per cento anche appena raccolti, purchè si trovino in ambiente a temperatura verso i 12-16 centigradi.

Orbene: quanto al frumento, una verifica compiuta su un notevole numero di campioni raccolti in varie località durante la mietitura e subito dopo la trebbiatura, mi portava a confermare pienamente e brillantemente le cifre di Harrington. Mentre mi riservo, in una più completa Nota, di pubblicare alcune tabelle con i dati particolareggiati, qui basti l'accennare

(¹) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1920.

che i saggi effettuati in parallelo: in termostato (a 33-35 centigradi); a temperatura di laboratorio (a 25-28); e in una camera frigorifera a (12-15), permettevano di ottenere in media:

		Per cento granelli germinati	
		dopo tre giorni	al 12° giorno
A temperatura di 32-35		3	14
" " 25-27		14	29
" " 12-15		81	96

I granelli di frumento dell'anno 1919 nelle stesse condizioni diedero, dopo 12 giorni, circa il 55 per cento in termostato, 84 a temperatura normale, 93 in camera fredda.

Risultati meno evidenti si ebbero per l'avena comune. Non ebbi occasione di sperimentare l'orzo.

In correlazione, è opportuno rilevare che, da saggi espressamente istituiti, è risultato come l'abbassamento brusco delle temperature a seguito di movimenti temporaleschi determini una assai più alta germinazione dei semi che si sottopongono a prova in comune ambiente negli stessi giorni. I medesimi campioni, in un successivo periodo di giornate in cui i decorsi termici tornino al normale, danno una percentuale molto meno elevata di semi germinanti: il che appare, alla stregua dei fatti precedentemente registrati, naturale ⁽¹⁾.

Si comprende, inoltre, come mi sentissi nel contempo indotto a verificare se le basse temperature avessero potuto determinare una più pronta germinazione anche dei semi così detti « freschi » di alcune delle più comuni piante infeste; ma mi limitai soltanto a qualche rilievo con l'*Avena fatua*. I granelli più grossi di *Avena fatua* (è notorio come questi precedano gli altri della stessa specie nell'uscire dallo stato di quiescenza), posti a germinare una settimana dopo la raccolta, davano alla fine del dodicesimo giorno:

A temperatura di 25-28	3 %
" " 12-15	72 %

Riportandoci sul terreno della grande pratica e per soffermarci su un caso speciale, va ricordato che i granelli di *Avena fatua* nascono di solito in

(1) È ovvio come, in applicazione, per le prove di rapida germinazione di campioni di grano appena raccolto non sia affatto necessario possedere una camera frigorifera p. d. Può bastare all'uopo un dispositivo qualsiasi che permetta di mantenere il germinatoio in ambiente raffreddato a giusto grado con ghiaccio oppure facendo passare intermittentemente acqua fredda in un serpentino collocato entro lo stesso letto di germinazione, ecc.

grande copia nell'autunno che sussegue il periodo della loro caduta al suolo. Ora l'alta germinazione di codesti granelli non va esclusivamente prospettata in dipendenza del fatto per cui le abbondanti piogge li incolgono allorchè hanno nel frattempo subite quelle intime modificazioni che loro hanno permesso di « perfezionarsi » o divenire « pronti alla germinazione », ma ancora in dipendenza delle più basse temperature del periodo autunnale.

CONCLUSIONI. — Le osservazioni, cui si riferisce la brevissima odierna comunicazione, mentre costituiscono una netta conferma dei rilievi di G. T. Harrington circa la facoltà che hanno i semi così detti freschi di alcune specie di germinare prontamente appena raccolti se collocati in letto a bassa temperatura, porterebbero insieme a dover modificare le idee fondamentali sulla interpretazione del meccanismo della quiescenza di alcune categorie di semi. Il supposto, secondo cui l'embrione di questi semi non sarebbe al momento della raccolta ancora « fisiologicamente perfezionato » o « privo di diastasi suscettibili di dissolverne le riserve », non troverebbe di che appoggiarsi sui rilievi di Harrington e nostri. Il problema merita d'essere ripreso.

Patologia. — *Azione del siero di gravida su estratti placentari.* Nota dei professori MAURIZIO ASCOLI e GUIDO IZAR, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI (1).

A suo tempo, in ricerche inedite, abbiamo avuto occasione di indagare se colla reazione meiostagmica stalagmometrica (R. M. S.) fosse possibile mettere in evidenza in condizioni patologiche nel siero di sangue sostanze reagenti con estratti di organi in modo diverso dal siero normale. L'esito fu negativo, fatta eccezione pei tumori maligni.

C'è parso opportuno riprendere queste ricerche con la modificazione (reazione meiostagmica precipitante: R. M. P.) proposta da uno di noi (Izar, Accad. Gioenia, 1920) per la sierodiagnosi dei tumori maligni ed allo stesso risultata applicabile, in linea generica, alle forme infettive.

Comunichiamo oggi le osservazioni raccolte con sieri di gravide messi a reagire con estratti placentari secondo tecnica analoga.

TECNICA:

Antigeno: placenta lavata bene con soluzione clorosodica ripetutamente rinnovata per togliere i disinfettanti ed il sangue; tolto il cordone e le membrane; spremuta in soluzione clorosodica finchè il liquido di lavaggio resta chiaro; asciugata spremendo fra panno pulito, poi fra carta bibula; triturata finamente alla macchina; pesata un'aliquota e triturata in mortaio con polvere di quarzo fino a consistenza friabile; lavaggio con

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1920.

2-3 parti di alcool a 95° che si getta dopo 24 ore di contatto; il residuo, ripreso in boccia a tappo di gomma con 10 parti di alcool a 95°, lasciato a 37° per 8 giorni, agitando almeno una volta al dì. Il soluto alcoolico, filtrato su carta Laurent o Schleicher e Schüll n. 590, si fa evaporare in capsula piana nel vuoto a 37°-40°. Il residuo, ripreso con 3 parti di alcool a 99,3° (Schiapparelli-ridistillato), si filtra come sopra e si conserva sotto CO₂ in bottiglie di vetro bleu o giallo a tappo a smeriglio, oppure nelle speciali fialette descritte per l'antigeno neoplastico.

Titolazione: in una serie di provette (accuratamente lavate con alcali, acidi, acqua still., alcool, etere e seccate alla stufa) si introduce con pipetta secca 1 cm³ di antigene e si aggiungono rispett. 4-9-14-19-24-29 cm³ di alcool a 99,3°. Ad 1 cm³ di ciascuna di queste diluzioni alcooliche, posta in provetta secca, si aggiunge ½ cc. di acqua still. e dopo 10'-60' 7 cm³ di soluzione clorosodica al 10 % (Cloruro sodio secco gr. 10 più acqua still. sino a 100 cm³; filtrazione su carta spessa prima dell'uso); si emulsiona capovolgendo tre volte.

In una serie di provettine ben pulite e ben secche si pongono 0,1 cm³ di siero normale e rispett. in una altra serie di provettine 0,1 cm³ di siero di gravida. Ad una provetta per ciascuna serie si aggiunge 1 cm³ di ciascuna delle emulsioni prima preparate. Tutte le prove si lasciano per 24 ore a 37°. Dopo tale tempo si procede alla lettura. Si avrà un precipitato in tutte e due le serie sino ad una certa diluzione di antigene, al di là della quale si osserverà precipitato solo nella serie con siero di gravida. Sarà questo il limite minimo della diluzione.

In una prova successiva si preciserà con più esattezza questo limite stabilendo delle diluzioni intermedie di antigene. Così se nella prima prova si è avuto precipitato in tutte e due le serie con la diluzione 1/6 e precipitato solo col siero di gravida con la diluzione 1/10, si stabilirà una serie intermedia con diluzioni di antigene 1/6-1/7-1/8-1/9 scegliendo fra queste diluzioni quella che dà più netto precipitato con siero di gravida, nessun precipitato con siero normale.

Dopo queste prove preliminari, per maggior sicurezza, giova cimentare l'antigeno con diversi sieri normali ed altri sieri di gravide per assicurarsi dell'attività e del titolo.

Le diluizioni alcooliche e le emulsioni dell'antigeno non si possono conservare in nessun modo: volta per volta va preparata la diluzione di antigene in alcool e l'emulsione. La soluzione madre invece si conserva purchè si rinnovi il CO₂ ogni volta che si apre la bottiglia contenente tale soluzione: quanto alle fiale, una volta aperte per una esperienza il residuo non può essere conservato.

L'inosservanza di queste regole conduce al fallimento delle prove.

Sieri in esame: il sangue deve essere prelevato con siringa secca direttamente da una vena, non con puntura di un dito, per evitare tracce di pigmenti ematici. Coagulazione spontanea del siero a T. ambiente od in ghiacciaia: prelevamento del siero con pipetta secca; centrifugazione prolungata con forte centrifuga elettrica. La prova va eseguita infra le 12 ore successive al prelevamento del sangue, non più tardi. I sieri non possono essere conservati in apparecchi congelatori, solo in ghiacciaia.

Prova: S'introduce dapprima 0,1 cm.³ del siero in esame, misurati con pipetta perfettamente pulita e secca (acqua still., alcool, etere) in provettina di vetro sottile e perfettamente incolore (accuratamente lavata con alcali, acidi, acqua still., alcool, etere e seccata alla stufa; indi si aggiunge 1 cm³ dell'emulsione di antigene al titolo già determinato di fresco preparata; si agita dolcemente la provettina per alcuni secondi senza provocare la formazione di schiuma; si pone in termostato a 37° per 24-36 ore.

La temperatura del termostato non deve assolutamente superare i 37° perchè il precipitato potrebbe ridisciogliersi.

Dopo tale tempo si procede alla lettura. I sieri normali mostrano appena una lieve opalescenza; i sieri di gravida una sospensione più o meno fine e più o meno distinta di minute particelle in liquido limpido. Il precipitato nel maggior numero dei casi è visibile ad occhio nudo: talvolta però occorre l'uso della lente. La lettura va fatta contro luce diffusa: se a luce artificiale in modo che la provetta sia tenuta ad un livello più basso sia della sorgente luminosa che dell'occhio dell'osservatore situati circa alla stessa altezza.

Talora il liquido non è limpido, ma ancora più o meno opalescente pure rilevandosi il precipitato: occorre allora riporre le prove a 37° e ripetere la lettura dopo altre 6-12 ore: il liquido si è allora chiarificato ed il precipitato fatto più distinto. Coi sieri fortemente positivi talora il precipitato si raccoglie sul fondo della provetta.

Solo a titolo di completezza notiamo che, sia coi sieri normali sia con quelli di gravida, si osserva subito dopo l'aggiunta dell'antigeno un'opalescenza più o meno spiccata del liquido, che va diminuendo più o meno rapidamente nel siero normale, pronunciandosi o dichiarandosi addirittura in un precipitato in quelli gravidici. Ma ciò non conta pel risultato: conta solo la lettura definitiva.

Con questa tecnica abbiamo sinora esaminati 11 sieri di gravide delle quali: una nel primo mese di gravidanza, una nel secondo mese, due nel quarto mese, una nel quinto mese, una nel sesto mese, due nell'ottavo mese, tre a termine, con 10 risultati positivi ed 1 risultato negativo col siero di gravida al 5° mese.

Come controlli furono esaminati 38 sieri di soggetti di sesso maschile; 7 sieri di ragazze dai 6 agli 11 anni, 9 sieri di donne di oltre 60 anni, 23 sieri di donne dai 14 ai 55 anni nubili o sposate. Tutti questi sieri hanno dato risultato negativo. Fra essi figurano sieri di soggetti portatori di tumori maligni (3 casi), e benigni (1 caso), di soggetti affetti da morbo di Basedow (3 casi), diabete (5 casi), sprenomegalie di diversa natura (4 casi), malattie infettive, luetici a R. W. positiva ecc.

La natura del materiale a disposizione del nostro Istituto ci ha permesso di saggiare soltanto un numero ristretto di sieri di gravide; ed anche i controlli, sebbene più numerosi, riguardano per forza un numero limitato di forme morbose. Esperienze su base più larga potranno stabilire quanto costante sia la reazione e di quali limitazioni passibile. Così pure è da vedere se tutte le placente foriscano un estratto attivo: noi ne usammo due diverse con risultati ugualmente buoni. Sta comunque l'interesse dottrinale del fenomeno.

Al riguardo, per quanto concerne la sua natura, è ovvio figurarsi ch'esso vada messo in rapporto col passaggio in circolo di prodotti del ricambio placentare e che questo passaggio determini nell'equilibrio umorale una modificazione, di natura da precisare, per la quale il siero di donna gravida si differenzia nella cennata proprietà da quello normale e patologico.

I fatti esposti fan ritenere verosimile, ed in ogni modo invitano ad indagare, se in condizioni patologiche naturali compaiano analoghe modificazioni della capacità precipitante del siero rispetto ad estratti di organi omologhi a quelli offesi ⁽¹⁾, o, a titolo di riprova, possano provocarsi sperimentalmente tanto mediante riassorbimento parziale di un viscere quanto mediante iniezioni di estratti di organi omologhi, quesiti che ci riserbiamo di studiare metodicamente.

(¹) Così ad esempio in due casi di morbo di Basedow, il siero, cimentato (con qualche modificazione alla tecnica descritta) con estratto alcoolico di tiroide, diede R. M. P. positiva.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 novembre 1920.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sopra alcune equazioni funzionali.* Nota del Socio
S. PINCHERLE.

Non appena le ricerche di Volterra, seguite da quelle di Fredholm, ebbero richiamata l'attenzione dei matematici sulle equazioni integrali di tipo lineare, si osservò che parecchie delle considerazioni che conducevano alla loro risoluzione, e specialmente quelle fondate sul carattere lineare delle equazioni e dell'operazione di integrazione che ne sta a base, si potevano estendere ad altre equazioni funzionali di forma analoga, ma in cui l'operazione funzionale — a carattere essenzialmente distributivo — con cui codeste equazioni sono costruite, non è più espressa in forma di integrale definito: prescindendo dalla questione, studiata dall'Hadarnard e dal Fréchet, se ogni operazione di tale natura sia suscettibile di codesta forma. Ad una tale estensione ho dedicato un apposito lavoro ⁽¹⁾, di cui la seconda parte è tuttora inedita, dove l'operazione assunta a base è considerata in modo astratto, prescindendo da ogni sua rappresentazione analitica. La forma dell'operazione base si può specializzare in una infinità di modi; è particolarmente interessante quella in cui essa consiste nella sostituzione di una funzione determinata $\alpha(x)$ al posto della variabile, entro l'elemento funzionale su cui si

⁽¹⁾ *Appunti di calcolo funzionale.* Memoria prima. (Mem. dell'Acc. delle Scienze di Bologna, serie 6^a, tomo VIII, an. 1911).

opera: questa forma speciale pone in stretta relazione le equazioni funzionali cui essa dà origine coll'importante teoria dell'iterazione analitica. In due Note, in cui riassumo risultati della seconda parte del lavoro testè accennato ⁽¹⁾, ho cercato di porre in luce quella relazione: riporto qui uno dei risultati più semplici, e riferentesi al caso più ovvio, al quale sono giunto in questo ordine di idee.

Sia $\alpha(x)$ un elemento di funzione analitica, regolare per $x=0$, nullo in quel punto, e con $\alpha'(0) = a$, $|a| < 1$. È noto come in tale ipotesi esista una funzione $\omega(x)$, pure regolare per $x=0$ e nulla in quel punto, soddisfacente all'equazione di Schroeder

$$(1) \quad \omega(\alpha(x)) = a\omega(x);$$

essa è determinata da $\omega'(0) = 1$. La $\omega(x)$ è la ben nota funzione di Koenigs, e nella citata Nota *Appunti su alcuni problemi di iterazione* è dato un metodo nuovo ed assai semplice per la sua determinazione. Ciò posto, data l'equazione, del tipo di Fredholm,

$$(2) \quad \varphi(x) - k\varphi(\alpha(x)) = f(x),$$

dove $f(x)$ è una funzione analitica regolare per $x=0$, nulla in $x=0$, e $\varphi(x)$ è una funzione incognita che si richiede pure essere analitica regolare per $x=0$, la soluzione ne è data da

$$(3) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \omega^n(x)}{1 - ka^n},$$

per tutti i valori di k diversi da a^{-n} ($n=1, 2, \dots$). Le q_n sono determinate come coefficienti dello sviluppo di $f(x)$ in serie di potenze di $\omega(x)$. Sviluppo facile a determinarsi formalmente, e che è, sotto le ipotesi ammesse, assolutamente ed uniformemente convergente in un intorno di $x=0$. Si scorge facilmente, da questo breve riassunto, come le a^{-n} e le $\omega^n(x)$ siano, in questa teoria, rispettivamente i numeri e le funzioni invarianti (gli autovalori e le autofunzioni) della teoria delle equazioni integrali. Il carattere analitico della (3) è manifesto: regolare in un intorno di $x=0$ rispetto alla variabile x , meromorfa coi poli a^{-n} rispetto alla variabile k . Il prodotto infinito

$$(4) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - ka^n)$$

che, per essere $|a| < 1$, è una trascendente intera — del resto ben nota

⁽¹⁾ *Sopra alcuni nuclei analitici.* (Rend. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, 9 aprile 1916). *Appunti su alcuni problemi d'iterazione.* (Ibid., 20 maggio 1917).

nella teoria delle funzioni ellittiche — rappresenta qui il determinante di Fredholm.

Ora, in una recente Nota di questi Rendiconti ⁽¹⁾, una egregia cultrice dell'Analisi, la signorina Pia Nalli, prendendo le mosse da un'equazione funzionale incontrata dal Goursat, ha risoluto la equazione (2) nel caso assai particolare in cui la funzione $\alpha(x)$ si riduce semplicemente ad ax , ed il risultato, cui essa giunge, è conforme a quello che è stato ora ricordato per il caso di una sostituzione analitica generale; essa tratta poi della equazione affine

$$(5) \quad \varphi(x) - kg(x) \varphi(ax) = f(x).$$

Il caso trattato dalla signorina Nalli è però interessante perchè si collega con un altro tipo di equazioni funzionali degno di nota, e di cui mi sono pure ripetutamente occupato. Ed infatti, col cambiamento di x in e^t , di a in e^h , l'equazione (5) viene ad essere un caso particolare del tipo di equazioni funzionali

$$(6) \quad \sum_{n=1}^p \gamma_n(t) \psi(t + h_p) = f(t)$$

e di equazioni funzionali differenziali

$$(7) \quad \sum_{n=1}^p \sum_{m=0}^q \gamma_{mn}(t) \psi^{(m)}(t + h_n) = f(t)$$

dove le γ, f sono funzioni date, la ψ è la funzione da determinarsi. E queste, alla lor volta, appartengono alla classe più generale di equazioni della forma

$$(8) \quad \sum \gamma_n(x) \psi(\lambda_n(x)) = f(x),$$

dove le λ_n sono pure funzioni date. Su queste, per quanto degne di interesse, non conosco alcuno studio generale: solo nella citata mia Nota del 1917 è indicato un metodo per collegare la (8) colle equazioni integrali, quando le γ_n si riducano a costanti e sulle $\lambda_n(x)$ si facciano ipotesi convenienti ⁽²⁾.

(1) *Sopra una equazione funzionale* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXIX, pag. 23, an. 1920).

(2) Sulle equazioni del tipo (6) e (7) ved. Pincherle, *Sulla risoluzione dell'equazione* $\sum h_v \varphi(c + \alpha_v) = f(x)$ a coefficienti costanti (Mem. dell'Accad. di Bologna, serie IV, tom. 9°, an. 1888); *Sulla risoluzione della stessa equazione a coefficienti razionali* (ibid.); *Risoluzione di una classe di equazioni funzionali* (Rend. del Circolo mat. di Palermo, tom. 18°, an. 1904), e soprattutto: *Sull'inversione degli integrali definiti* (Mem. della Società italiana delle Scienze, detta dei XL, serie 3ª, tom 15°, an. 1907); signorina O. Polossuchin, *Ueber eine besondere Klasse von differenz. Funktionalgleichungen* (Dissert. Zurich, 1910); Er. Schmidt, *Ueber eine Klasse linear. funkt. Differentialgleichungen* (Math. Ann., tom. 70°, an. 1911).

Fisica. — *La teoria elettronica della conducibilità dei metalli nel campo magnetico* ⁽¹⁾. Nota del Socio O. M. CORBINO ².

La spiegazione qualitativa di ognuno dei fatti fondamentali che caratterizzano la conduzione della elettricità e del calore dei metalli si ottiene, in generale, agevolmente con una qualsiasi delle tante forme assunte dalla teoria elettronica dei metalli. È solo la spiegazione quantitativa simultanea di tutti i fenomeni, con valori comuni delle costanti caratteristiche del metallo, che ha richiesto i perfezionamenti successivi della teoria, con le conseguenti complicazioni.

Una elaborazione ulteriore deve idealmente condurre, sia pure attraverso a uno svolgimento formale più difficile, all'eliminazione di quelle ipotesi che non si assestano bene nel quadro generale della fenomenologia fisica. E in tal senso è da considerare come un vero progresso ogni tentativo di spiegare con la presenza di elettroni di una sola specie, i negativi, quei fatti che sembrano richiedere l'esistenza postulata dal Drude, di due specie di centri mobili: i positivi e i negativi.

Un notevole passo in questa direzione è stato tentato recentemente dal prof. La Rosa ⁽³⁾, il quale, mettendo a confronto le variazioni dell'effetto Peltier e quelle della resistenza elettrica nel bismuto sotto l'azione del campo magnetico, le avrebbe riscontrate corrispondenti alle previsioni della teoria con la ipotesi semplice di elettroni di una sola specie. Le variazioni constatate dell'effetto Peltier denotano un mutamento nella concentrazione degli elettroni; e tale mutamento basterebbe a render conto delle variazioni della resistenza, qualora si tenga anche presente la modificazione della traiettoria degli elettroni fra due urti, non più rettilinea sotto l'azione del campo.

Precisamente la curvatura della traiettoria fra due urti condurrebbe, secondo il La Rosa, ad un aumento della conducibilità; la quale in definitiva diverrebbe minore per la constatata diminuzione della concentrazione elettronica. Interverrebbero cioè, come si vede dalla formola del La Rosa, due cause contrapposte negli effetti; una diminuzione della conducibilità σ , per effetto della diminuzione del numero di elettroni per centimetro cubo, e un aumento per l'aumentata lunghezza del cammino libero, con prevalenza della prima causa, e perciò col risultato finale di una diminuzione di σ .

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Presentata nella seduta del 4 giugno 1920.

⁽³⁾ La Rosa, N. Cimento, vol. XVIII, p. 26, an. 1919.

Se il La Rosa, anzichè ricorrere ad un metodo di verifica quantitativa molto indiretto, e che gli ha occultato la verità, avesse proceduto per la via più semplice del confronto diretto, avrebbe riconosciuto che non esiste affatto l'accordo trovato fra le variazioni della resistenza previste e quelle date dall'esperienza.

Invero, il valore noto dell'effetto Peltier a campo nullo dà la misura di $\log \frac{n_{Cu}}{n_{Bi}}$, dove n_{Cu} e n_{Bi} rappresentano i numeri di elettroni per centimetro cubo nel rame e nel bismuto; e dalle variazioni relative che esso subisce secondo le esperienze dello stesso La Rosa, si possono determinare senz'altro i rapporti $\frac{n_0}{n_H}$ fra i numeri di elettroni a campo nullo e sotto il campo H.

Basta porre nella formola

$$P = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{n_{Cu}}{n_{Bi}}$$

i valori sperimentali conosciuti:

$$P = \frac{77 \times 10^{-6}}{300}, \text{ e } \frac{\alpha}{e} = 4,27 \times 10^{-7}.$$

Si ottiene così, fuori del campo magnetico:

$$\frac{n_{Cu}}{n_{Bi}} = 2,44.$$

Il rapporto $\frac{n_0}{n_H}$ fra i numeri di elettroni nel bismuto a campo zero e sotto il campo H si otterrà osservando che, detto P_H il valore dell'effetto Peltier nel campo H, si ha:

$$P_H : P = \log \frac{n_{Cu}}{n_H} : \log \frac{n_{Cu}}{n_0} = \log \frac{n_{Cu}}{n_H} : 2,44;$$

cioè:

$$\log \frac{n_{Cu}}{n_H} = 2,44 \frac{P_H}{P}.$$

I rapporti $\frac{P_H}{P}$ possono ottenersi dalle esperienze del La Rosa: dedotti così, per i diversi valori di H, i rapporti $\frac{n_{Cu}}{n_H}$, si potrà calcolare il rapporto

$$\frac{n_0}{n_H} = \frac{n_0}{n_{Cu}} : \frac{n_H}{n_{Cu}}.$$

Se si tracciano in un diagramma i valori così ottenuti di $\frac{n_0}{n_H}$ per i diversi valori di H, e i corrispondenti valori di $\frac{\sigma_0}{\sigma_H}$ dedotti dalle stesse espe-

rienze del La Rosa, si trova che le due curve (fig. 1) presentano un andamento completamente diverso. Si riscontra cioè che la resistenza del bismuto cresce nei campi forti molto più rapidamente di quel che non diminuisca n . E poichè il fattore dipendente dalla curvatura della traiettoria dovrebbe intervenire, secondo il La Rosa, attenuando le variazioni di conducibilità dovute alla semplice diminuzione di n , e tale attenuazione dovrebbe anzi

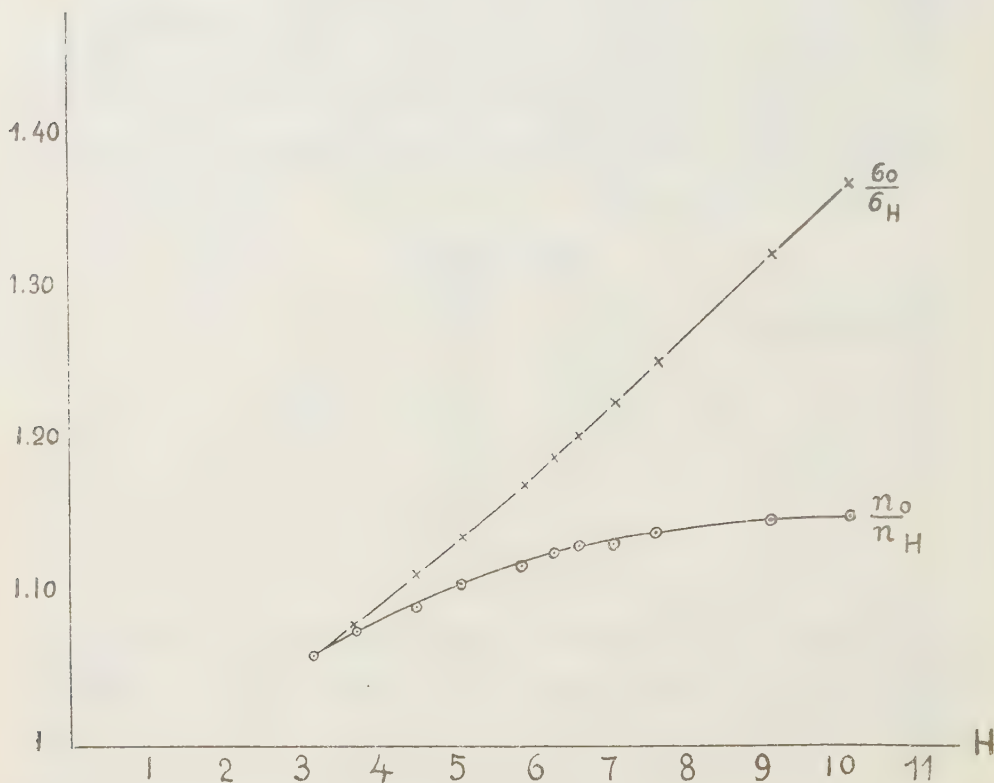


Fig. 1

essere più forte nei campi più intensi, si riconosce che fra le previsioni e l'esperienza si ha una contraddizione che può dirsi di natura qualitativa più che quantitativa.

Non appare pertanto giustificata l'affermazione del La Rosa, che cioè la verifica indiretta da lui eseguita si possa annoverare fra le migliori che la teoria elettronica vanti fino ad oggi.

Che la concentrazione degli elettroni muti col campo non è del resto escluso dalle altre teorie che sono state svolte dal punto di vista del Drude. Così il Trabacchi⁽¹⁾, che ne fece una verifica quantitativa, osservò che, mentre

(¹) Corbino, N. Cimento, vol. XVI, pag. 185, an. 1918; Trabacchi, idem., vol. XVI, pag. 197, an. 1918.

le variazioni col campo della costante di Hall o della resistenza specifica dovrebbero seguire, secondo la teoria, la legge del quadrato in realtà se ne discostano alquanto; ciò significa, egli aggiunge, che la parte principale dei mutamenti di resistenza e delle variazioni del coefficiente di Hall è quella voluta dalla teoria, ma che interviene in più un mutamento delle costanti elettroniche al crescere del campo.

E bisogna notare che le previsioni della teoria dualistica e il confronto con l'esperienza hanno avuto il merito di rilegare quantitativamente le variazioni di resistenza e i mutamenti del coefficiente di Hall, i quali ultimi non sono spiegabili con la teoria monistica. Inoltre i valori delle costanti elettroniche, che così si deducono, spiegano quantitativamente e con grande esattezza le deviazioni della legge di Wiedemann e Franz.

Ho detto che i mutamenti del coefficiente di Hall non sono spiegabili con la teoria che ammette una sola specie di elettroni. Infatti le esperienze del La Rosa sull'effetto Peltier provano che il numero di elettroni decresce col campo; ma la teoria monistica dà al coefficiente R del fenomeno di Hall il valore

$$R = \frac{1}{ne},$$

dove e rappresenta la carica dell'elettrone: ne risulta che, se n diminuisce col campo, R dovrebbe crescere, ciò che è contrario a tutte le esperienze note. Anche in questo si riscontra una contraddizione insanabile.

Di non minore gravità è un'altra contraddizione fra i valori prevedibili e quelli reali del coefficiente di Hall. Se questo, come vuole la teoria monistica, è misurato dall'inverso della carica globale ne degli elettroni liberi, ed è perciò inversamente proporzionale ad n , e se, come risulta dal valore dell'effetto Peltier fra rame e bismuto, il numero degli elettroni nel rame è appena due volte e mezzo quello degli elettroni nel bismuto, si dovrebbe avere nel bismuto un effetto Hall solo due volte e mezza maggiore che nel rame. Invece si sa che il rapporto fra i due coefficienti di Hall è superiore a diecimila.

È appunto nella spiegazione dei fenomeni cui dà luogo il passaggio del calore e della elettricità nei metalli sotto l'azione del campo magnetico che si rivela l'insufficienza della teoria degli elettroni di una sola specie. E in tutto questo campo di fenomeni la teoria dualistica non ha soltanto la funzione di rendere più stretta la corrispondenza numerica fra le previsioni e la realtà (ciò che costituirebbe, in alcuni casi, un merito piuttosto apparente, avendosi a disposizione un maggior numero di costanti); ma serve ad eliminare le contraddizioni categoriche cui dà luogo la teoria monistica. Si deve quindi concludere che, se degli elettroni positivi *liberi* non si è potuta finora dimostrare l'esistenza, essi costituiscono provvisoriamente un elemento indispensabile per render conto del complesso dei fenomeni della conduzione metallica e degli effetti del campo magnetico.

Mineralogia. — *Paternoite: un nuovo minerale del giacimento salifero di Monte Sambuco in territorio di Calascibetta (Sicilia)*. Nota del Corrisp. F. MILLOSEVICH.

In una mia Nota precedente ⁽¹⁾ ho accennato alla presenza nel giacimento salifero di Monte Sambuco in territorio di Calascibetta (Sicilia) di un borato di magnesio contenente cloro di apparenza simile alla *stassfurtite* e promettevo di darne un'analisi completa con uno studio più particolareggiato. Assolvo ora la promessa tanto più volentieri in quanto si tratta di una specie minerale, a mio credere, non ancora conosciuta.

Il minerale si presenta in aggregati cristallini tondeggianti di color bianco candido nei quali una struttura finissimamente granulare saccaroide si rende visibile con una semplice lente d'ingrandimento. Le loro dimensioni variano da quelle di un pisello a quelle di un arancio e si trovano inclusi nel banco astrakanitico, che è attraversato dalla galleria superiore del giacimento suddetto. Il materiale di cui sono costituiti è facilmente friabile e tanto più facilmente dopo esposizione all'aria, in contatto della quale è parzialmente deliquescente.

La polvere osservata al microscopio si risolve in un aggregato di minuti cristallini lamellari a sezione rombica con angolo piano di circa 62°: raramente una troncatura dell'angolo acuto rende esagonale il contorno della sezione. Le lamelle molto sottili hanno tendenza a sovrapporsi le une le altre in sorta di associazioni parallele.

L'estinzione accade parallelamente alle diagonali delle sezioni rombiche: l'indice di rifrazione medio determinato col metodo dell'immersione in liquidi adatti risulta fra 1,47 e 1,48.

Non furono possibili altre determinazioni ottiche atte a stabilire con sicurezza se il sistema cristallino di questo minerale sia il trimetrico o il monoclinico.

Il peso specifico determinato su frammenti dei noccioli cristallini scelti nella loro parte interna più pura risultò 2,11.

Il minerale è parzialmente solubile nell'acqua: la soluzione ha reazione alcalina. Si scioglie rapidamente anche a freddo nell'acqua acidulata con poche gocce di acido cloridrico o di un altro acido energico. Fonde perdendo acqua e un po' di acido borico e si aggrega in una massa compatta alquanto porosa. Saggi appropriati rivelano la presenza di B_2O_3 , Cl, SO_3 , Mg, K, Na, H_2O .

(1) Rendiconti di questa Accademia (serie 5a), 29, 1920, 1° sem., pag. 344.

I primi saggi quantitativi di orientamento mi portarono a riconoscere che cloro e magnesio sono in quantità ben minore che nella cosiddetta stassfurtite e quindi ad escludere questo minerale, come anche per la minor quantità di magnesio dovetti escludere pinnoite e ascharite che hanno condizioni di giacitura analoghe, nonchè heintzite, per la minor quantità di potassio.

Per di più differenze abbastanza notevoli nelle singole determinazioni fatte su materiale proveniente da frammenti diversi mi dimostrarono, quello che del resto anche l'esame microscopico aveva fatto intravedere, che gli aggregati cristallini apparentemente uniformi sono in realtà una miscela di un borato, in grandissima prevalenza, con altri sali.

Per l'analisi completa scelsi uno dei noccioli più grandi e per le varie determinazioni mi preparai il materiale adeguato prendendo e mescolando accuratamente porzioni della sua parte interna di apparenza più pura ed omogenea.

La sostanza che è molto igroscopica seccata fino a 100° perde considerevolmente di peso: mantenuta parecchie ore a questa temperatura conserva peso costante.

Si può dunque ritenere che al disotto di 100° sia eliminata soltanto l'acqua igroscopica e che sia lecito partire, come effettivamente ho fatto, del materiale essiccato a 100° per tutte le ulteriori determinazioni. Anche l'esame microscopico del materiale essiccato in tal modo non rivela cambiamenti nell'assetto cristallino delle piccole lamelle che lo costituiscono.

L'acido borico fu determinato gravimetricamente col metodo di Rosenbladt-Gooch per distillazione del borato di metile e volumetricamente col metodo di Jörgensen modificato secondo consiglia Gooch ⁽¹⁾, sostituendo cioè l'aggiunta di mannite a quella di glicerina durante la titolazione con fenolfaleina. L'acqua fu determinata mescolando la sostanza con ossido di piombo in modo da trattenere l'acido borico che si elimina per decomposizione del borato con riscaldamento.

Prendendo le medie di varie determinazioni il risultato dell'analisi si esprime nel seguente modo:

B ₂ O ₃	66,02
Mg O	10,93
K ₂ O	1,08
Na ₂ O	0,36
Cl	2,35
SO ₃	1,06
H ₂ O	19,16
		<hr/>
		100,96

(1) Gooch F. A., *Representative procedures in quantitative chemical Analysis*. New York-London. 1916, pag. 128.

La somma piuttosto elevata si spiega considerando che tutti i metalli sono calcolati come ossidi, mentre una parte di essi è unita al cloro come cloruri: effettivamente essa si riduce qualora si detragga la quantità di ossigeno corrispondente al cloro trovato, come sarà fatto in seguito.

Per giungere alla conoscenza della esatta composizione del borato di magnesio che costituisce la maggior parte del materiale analizzato bisogna identificare i sali che vi sono commisti e, tenendo conto della presenza di una notevole quantità di cloro e di una minore, ma non trascurabile, quantità di anidride solforica, basta fissare l'attenzione su quei cloruri e solfati, che in condizioni di giacimento analoghe vediamo accompagnare i borati di magnesio; si pensi alle note associazioni di carnallite, di kainite, di silvite con stassfurtite, con pinnoite, con ascharite ecc. Tenendo conto delle quantità rispettive di K e di Cl che risultano dall'analisi, si vengono ad escludere silvite e kainite (quest'ultima si esclude anche per le quantità rispettive di SO_3 e di Cl), mentre resta plausibilissima la presenza di carnallite. La composizione teorica di questo minerale vuole per 2,35 di Cl 0,86 di K (trovato 0,90 di K).

Per il solfato, esclusa la kainite, si è condotti a ritenere che sia bloedite, per il fatto che i noccioli di borato sono racchiusi nella massa di tale minerale, il quale forma ancora una sottile crosta cristallina intorno ai noccioli stessi e per la considerazione che la composizione teorica della bloedite vuole per 1,06 di SO_3 , 0,41 di Na_2O (trovato 0,36 di Na_2O).

Se dunque i dati dell'analisi si distribuiscono in modo da mettere insieme cloro e potassio trovati con le corrispondenti quantità di Mg e di H_2O per costituire la molecola della carnallite e, inoltre, SO_3 e Na_2O trovati con le corrispondenti quantità di MgO e di H_2O per costituire la molecola della bloedite, essi possono rappresentarsi nel seguente modo:

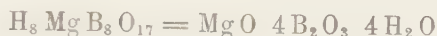
B ₂ O ₃	66,02	
MgO	9,80	
H ₂ O	16,28	
K	0,90	} carnallite
Mg	0,53	
Cl	2,35	
H ₂ O	2,39	
Na ₂ O	0,36	} bloedite
MgO	0,26	
SO ₃	1,06	
H ₂ O	0,49	
		<hr/>	
		100,44	

Se si riducono a 100 i dati corrispondenti al borato di magnesio la sua composizione viene espressa così:

B ₂ O ₃	71,66	1,023	3,9
Mg O	10,67	0,264	1
H ₂ O	17,67	0,981	3,7

100,00

e quindi dalla formola:

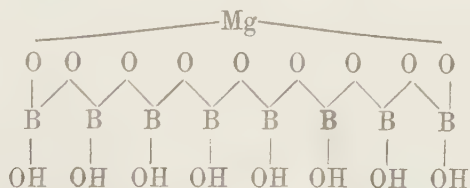


per la quale si calcola la composizione teorica:

B ₂ O ₃	71,4
Mg O	10,3
H ₂ O	18,3

Per ispiegare il non troppo perfetto accordo fra calcolo ed analisi per quanto riguarda il quantitativo d'acqua, bisogna tener mente che appunto la determinazione dell'acqua è il punto debole dell'analisi di un materiale, come quello che è oggetto del mio studio, perchè non è possibile stabilire in modo certo ed assoluto una netta separazione fra acqua igroscopica e acqua di cristallizzazione o di costituzione, dove è presente ad esempio un sale così deliquescente e così poco stabile come la carnallite.

Il nuovo borato di magnesio naturale cui dò il nome di Paternoite in omaggio all'illustre chimico Emanuele Paternò, è dunque un tetraborato monomagnesiaco. La sua costituzione, considerandolo come un poliborato acido, cioè ritenendo l'acqua come parte integrante della molecola, si potrebbe tentare di esprimere nel seguente modo:



Un tetraborato monomagnesiaco con 3 molecole di acqua fu preparato da Laurent ⁽¹⁾, mentre il triborato e l'esaborato corrispondenti furono ottenuti da Rammelsberg ⁽²⁾.

(1) In Moissan, *Chimie minérale*, III, pag. 953. .

(2) Rammelsberg C., *Ueber die chemische Zusammensetzung von Boracits so wie diejenige der Verbindungen der Borsäure mit der Talkerde überhaupt*. Pogg. Ann. 1840. 49, 445.

Biologia vegetale. — *Ricerche sul Melo « senza fiori »*
(*Pyrus apetala Münchh.*). Nota del Corrisp. B. LONGO.

Continuando le mie ricerche sulla partenocarpia, ho potuto avere, coltivare e studiare l'interessante Melo detto « senza fiori ». E veramente, ad una superficiale osservazione, sembra che questa curiosa razza di Melo porti i frutti senza aver portato i fiori. Ma, osservando attentamente, all'epoca della fioritura, si vedono dei piccoli bottoni florali, alcuni dei quali si aprono, altri si aprono solo in parte, altri non si aprono affatto. Però anche quelli che si aprono non danno fiori appariscenti avendo i petali molto piccoli (più piccoli degli stessi sepali) e sepaloidei. Ciò giustifica la denominazione, in realtà inesatta, di « senza fiori » data a questa pianta, giacchè si dà volgarmente il nome di fiore soltanto alle parti più appariscenti (ordinariamente i petali) del fiore stesso.

Analizzando i fiori si osserva che sono pistilliferi e non presentano traccia di stami, anzi si nota con stupore che, al posto occupato dagli stami nei fiori del comune Melo, si trovano diversi pistilli liberi. Di modo che ciascun fiore risulta costituito, oltre che dalle cinque foglie carpellari concresciute che formano il solito ovario infero pentaloculare, anche da diverse altre foglie carpellari situate più in alto e formanti ciascuna un pistillo a sè. Così i carpelli, e conseguentemente le caselle, risultano disposti in due piani: nel piano inferiore i cinque concresciuti, come nei comuni Meli, e nel piano superiore gli altri, liberi, dei quali non c'è riscontro negli altri Meli.

In detti fiori non avviene impollinazione non venendo essi visitati dagli insetti pronubi. Ciò non ostante tanto i fiori che si aprono quanto quelli che restano chiusi danno origine ai frutti che però non contengono semi. Si tratta quindi di una vera partenocarpia nel senso stretto, perchè la pianta porta frutti, privi di semi, senza che sia stata non soltanto fecondata, ma neppure impollinata.

È un fatto strano, degno di nota, che in questa pianta alla soppressione degli stami corrisponda un aumento in numero dei carpelli, di organi cioè che essa non utilizza!

L'esame microscopico rivela che le caselle del piano inferiore contengono ciascuna due ovuli più o meno normali. Quelle del piano superiore o non ne contengono affatto, e questo è il caso più frequente, o ne contengono uno solo o, ancor più raramente, due; ma questi ovuli ordinariamente

abortiscono, e solo in qualche caso arrivano anche a completo e normale sviluppo.

Ho tentato la impollinazione artificiale servendomi naturalmente del polline di altre razze di Melo, e le mele provenienti dai fiori così impollinati hanno portato semi, che ho raccolto con cura e mi propongo di seminare per vedere che piante di Melo verranno fuori. Su ciò riferirò a suo tempo.

Mi sono qui limitato a questi brevi cenni delle mie ricerche, che altrove saranno esposte più ampiamente.

Analisi matematica. — *Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus.* Nota di ARNAUD DENJOY, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

Je demande respectueusement à l'Académie la permission de lui soumettre les considérations suivantes.

Sur un intervalle $a'b'$, soit un ensemble parfait P , d'extrémités a et b , et tel que les semi-contigus $a'a$, bb' bordant P soient au moins égaux à tout contigu quelconque de P , l'un des deux semi-contigus étant au plus égal à $b - a$ ⁽¹⁾.

Nous dirons que P présente le caractère (A) si deux intervalles contigus ou semi-contigus quelconques de P sont séparés par un segment au moins égal en longueur au plus petit de ces deux intervalles.

λ_0 étant un nombre positif donné, soient α_1 un point quelconque de P , et $\beta'_1 = \alpha_1 + \lambda_0$. (On pourrait prendre le signe — devant λ_0 , à la condition de continuer ci-après constamment ainsi).

Si β'_1 n'est pas sur P , mais si β'_1 est à gauche de b , soit β_1 l'extrémité droite de l'intervalle contigu u'_1 contenant β'_1 . (On pourrait prendre pour β_1 l'extrémité gauche de u'_1 , et alors on envisagerait ci-après constamment des extrémités gauches de contigus). Soit α'_1 déterminé par $\alpha'_1 + \lambda_0 = \beta_1$.

Si α'_1 n'est pas sur P , soit α_2 l'extrémité droite de l'intervalle contigu u'_1 contenant α'_1 . Nous construisons $\beta'_2 = \alpha_2 + \lambda_0$; et ainsi de suite.

Les opérations ne s'arrêtent que dans deux cas; ou bien, si un point β'_p est à la droite de b ; ou bien, avant que cette circonstance ne se produise, si nous trouvons un point accentué α'_p ou β'_p appartenant à P . Dans le cas où les opérations ne s'arrêtent pas, il est évident que les suites (α_p, α'_p)

⁽¹⁾ Je distingue l'intervalle ab (ensemble $a < x < b$) du segment ab (ensemble $a \leq x \leq b$). Un intervalle contigu à l'ensemble parfait P est un intervalle sans points communs avec P , mais dont les deux extrémités appartiennent à P . Un intervalle sans point commun avec P , mais dont une extrémité et une seule appartient à P sera dénommé intervalle semi-contigu à P .

et (β_p, β'_p) tendent respectivement vers deux points γ et δ appartenant à P et dont la distance est λ_0 . Un tel couple est donc mis en évidence dans tous les cas, sauf si un point β'_p vient à droite de b . Il est à remarquer que ce couple est, parmi tous ceux qui vérifient les conditions $\delta - \gamma = \lambda_0$, $\alpha_1 \leq \gamma$, celui où γ et δ ont respectivement les plus petites valeurs.

Considérons les deux suites constituées chacune de points distincts (en nombre impair par exemple, la parité étant indifférente):

$$\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha'_n, \alpha_{n+1}, \text{ et } \beta'_1, \beta_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n, \beta_n, \beta'_{n+1}.$$

Deux lettres α, β occupant le même rang dans les deux suites, ont le même indice, l'une est accentuée, l'autre ne l'est pas, et elles désignent deux points dont la distance est λ_0 . Les deux suites forment donc deux figures égales.

Je dis que *chacun des intervalles intermédiaires de la suite*

$$(\alpha_1, \alpha'_1), (\alpha'_1, \alpha_2), \dots, (\alpha'_n, \alpha_{n+1}),$$

surpasse en longueur l'un au moins des deux intervalles qui lui sont adjacents dans la même suite.

Nous montrerons successivement: 1°) que l'intervalle $\alpha_p \alpha'_p$ surpasse l'un au moins des deux intervalles $\alpha'_{p-1} \alpha_p$ et $\alpha'_p \alpha_{p+1}$ si $p = 2, \dots$, ou n ; et 2°) que l'intervalle $\alpha'_p \alpha_{p+1}$ surpasse l'un au moins des deux intervalles $\alpha_p \alpha'_p$ et $\alpha_{p+1} \alpha'_{p+1}$ pour $p = 1, \dots$, ou $(n - 1)$.

Les lettres accentuées désignent des points étrangers à P. Soient respectivement u'_p et u''_p les intervalles contigus à P contenant α'_p et β'_p . u'_p a pour extrémité droite α_{p+1} , comme u''_p a pour extrémité droite β_p . On a donc $u'_p > \alpha'_p \alpha_{p+1}$ et $u''_p > \beta'_p \beta_p$.

1°) L'intervalle u'_{p-1} est séparé de u'_p ($p = 2, \dots, n$) par un segment s'_p dont l'extrémité gauche est α_p et dont l'extrémité droite est intérieure à l'intervalle $\alpha_p \alpha'_p$, puisque α'_p est intérieur à u'_p . On a évidemment

$$u'_{p-1} > \alpha'_{p-1} \alpha_p, \quad u'_p > \alpha'_p \alpha_{p+1}, \quad s'_p < \alpha_p \alpha'_p.$$

Mais, P présentant le caractère (A), s'_p est au moins égal en longueur à l'un des deux intervalles u'_{p-1} et u'_p . Donc, $\alpha_p \alpha'_p$ surpasse l'un au moins des deux intervalles adjacents $\alpha'_{p-1} \alpha_p$ et $\alpha'_p \alpha_{p+1}$.

2°) On démontre exactement de même que, des deux intervalles $\beta'_p \beta_p$ et $\beta'_{p+1} \beta_{p+1}$ contenus respectivement dans u''_p et u''_{p+1} , l'un au moins est surpassé en longueur par $\beta_p \beta'_{p+1}$, qui est supérieur au segment s''_p séparant u''_p de u''_{p+1} . Mais $\beta_p \beta_p = \alpha_p \alpha'_p$, $\beta_p \beta'_{p+1} = \alpha'_p \alpha_{p+1}$, $\beta'_{p+1} \beta_{p+1} = \alpha_{p+1} \alpha'_{p+1}$. La seconde partie de l'énoncé est donc établie.

Il suit de là que *les intervalles séparés par la subdivision*

$$\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha'_n, \alpha_{n+1}$$

vont constamment en décroissant, si le premier surpasse le second. Car alors, le second doit surpasser le troisième (pour surpasser l'un au moins du premier et du troisième), qui doit surpasser le quatrième, et ainsi de suite.

Dans le cas le plus général, la suite d'intervalles considérés peut comprendre un terme maximum, ou deux termes maximums adjacents, et les autres termes décroissent quand on s'éloigne de part et d'autre de ce ou de ces termes maximums (qui peuvent coïncider avec le premier ou avec le dernier intervalle).

Ces préliminaires étant posés, nous pouvons énoncer les propositions suivantes relatives à un ensemble parfait P présentant le caractère (A):

I. Quel que soit le nombre λ au plus égal à $b - a$, P contient deux points dont la distance est λ .

Soit en effet $\alpha_1 = a$.

Le segment $\alpha_1 \alpha'_1$ contient et surpasse le segment s'_1 séparant $a'a$ de u'_1 , lequel contient et surpasse $\alpha'_1 \alpha_2$. Or, par hypothèse $a'u$ et $b'b$ ne sont inférieurs en longueur à aucun contigu de P . Donc, $s'_1 \geq u'_1$ (caractère A), et par suite $\alpha_1 \alpha'_1 > \alpha'_1 \alpha_2$. Donc, tous les intervalles séparés par les suites (α_p, α'_p) et (β'_p, β_p) vont en décroissant.

Je dis que les β' étrangers à P demeurent tous sur ab . En effet, il en est d'abord ainsi de β'_1 , d'après $\beta'_1 - a = \lambda < b - a$. D'autre part, si β'_n est sur ab , l'extrémité droite β_n du contigu contenant β'_n est à gauche de b . Si β_n est à gauche de b , on a $\beta'_n \beta_n > \beta_n \beta'_{n+1}$. Or, $\beta'_n \beta_n < u''_n$. u''_n est séparé de bb' par $\beta_n b$, au moins égal à u''_n (caractère A). d'après $u''_n \leq bb'$. Donc, $\beta_n \beta'_{n+1} < \beta_n b$. Donc, $\beta_n \beta'_{n+1}$ est à gauche de b .

Donc, que les suites (α, α') (β, β') s'arrêtent ou non, elles mettent en évidence un couple (γ, δ) situé sur P et tel que $\delta - \gamma = \lambda$.

Le même raisonnement permet de montrer:

I^{bis}. Si u et v sont deux intervalles contigus ou semi-contigus à P , séparés par le segment $\alpha\beta$ (α et β appartiennent à P , $\alpha < \beta$), et si u et v sont au moins égaux à chacun des intervalles contigus à P compris entre α et β , il existe, quelque soit le nombre λ_1 au plus égal à $\beta - \alpha$, deux points de P situés sur le segment $\alpha\beta$ et dont la distance est égale à λ_1 .

II (conséquence du précédent). Si u et v sont deux intervalles contigus ou semi-contigus à P , séparés par un segment $\alpha\beta$, il existe, quelque soit le nombre λ_2 , au plus égal à u et à v séparément, deux points de P situés sur $\alpha\beta$ et dont la distance est égale à λ_2 .

Soit par exemple u à gauche de v , avec $u \leq v$ (en longueur) et soit v_1 le contigu le plus voisin de u à sa droite, et dont la longueur vaut au moins u . v_1 coïncide avec v ou est compris entre u et v . Le segment $\alpha\beta_1$ séparant u de v_1 vaut au moins u (caractère A), d'après $u \leq v$. Il suffit d'appliquer à $\alpha\beta_1$ la proposition I^{bis}.

III. Si l'intervalle u est contigu à P et si, sur un segment adjacent à u

et de longueur l , P ne possède pas de contigu ni de semi-contigu dont la longueur surpasse u , il existe alors, quelque soit λ_3 vérifiant $u \leq \lambda_3 \leq l + u$, deux points de P situés de part et d'autre de u , et dont la distance est égale à λ_3 .

Soient β et α ($\beta < \alpha$) les extrémités de u . Posons $\alpha = \alpha_1$, $\beta'_1 = \alpha - \lambda_3$ ($u < \lambda_3$), et soit β_1 l'extrémité droite du contigu contenant β'_1 , si β'_1 est étranger à P . Comme dans l'étude préliminaire, les deux subdivisions (α_p, α'_p) , (β_p, β'_p) progresseront vers la droite, mais cette fois, la seconde sera à la gauche de la première (et non pas à sa droite).

La démonstration se compose encore de deux parties, 1°) on a $\alpha\alpha'_1 > \alpha'_1\alpha_2$, si α'_1 n'est pas sur P ; 2°) β'_p et β_p restent à gauche de β , quelque soit p .

En effet: 1°) D'après $\lambda_3 \leq u + l$, le semi-contigu $\beta'_1\beta_1$ est par hypothèse au plus égal à u . Donc, d'après $s'_1 < \alpha\alpha'_1 = \beta'_1\beta_1$, on a $s'_1 < u$. Donc (caractère A) $s'_1 \geq u'_1$. De $\alpha'_1\alpha_2 < u'_1$ résulte $\alpha\alpha'_1 > \alpha'_1\alpha_2$.

Donc, les intervalles des subdivisions (α_p, α'_p) , (β_p, β'_p) vont décroissant en longueur, tant qu'un α'_p ou un β'_p n'est pas sur P .

2°) L'inégalité $\beta'_n < \beta$ se démontre de proche en proche. D'abord, $\beta'_1 < \beta$ résulte de $\alpha - \beta'_1 = \lambda_3 > u = \alpha - \beta$. Si maintenant $\beta'_n < \beta$, on a: en évidence, $\beta'_n\beta_n < u''_n$, puis $u''_n \leq u$, par hypothèse, d'où $\beta_n\beta \geq u''_n$ (caractère A), et enfin $\beta'_n\beta_n < \beta_n\beta$. Or, nous avons établi (1°) $\beta'_n\beta_n > \beta_n\beta'_{n+1}$. Donc $\beta'_n\beta'_{n+1} < \beta_n\beta$. Donc β_{n+1} est à gauche de β . La proposition III résulte de là.

IV (conséquence du précédent). Si u est un intervalle contigu à P , il existe, quelque soit λ_4 vérifiant $u \leq \lambda_4 \leq 3u$, deux points de P situés de part et d'autre de u et dont la distance est λ_4 .

Car, si u est l'intervalle $\beta\alpha$, et si $\alpha_1 = \beta - 2u$, le segment $\alpha_1\beta$ ne peut pas contenir, en vertu du caractère (A), d'intervalle contigu ou semi-contigu dont la longueur surpasse u . La proposition III s'applique donc.

Matematica. — *Spazi che ammettono una traslazione infinitesima lungo le linee di lunghezza nulla.* Nota di O. ONICESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una Nota precedente abbiamo definito come traslazione infinitesima un movimento elementare di uno spazio (di natura metrica qualsiasi) che sposta le direzioni con parallelismo di Levi-Civita, lungo una congruenza di traiettorie.

Crediamo opportuno di riprendere, sotto una forma più semplice, i calcoli di quella Nota, avendo in vista di considerare anche il caso nel quale le traiettorie sono linee di lunghezza nulla dello spazio.

2. Sia

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k$$

l'elemento lineare di una varietà — la forma quadratica essendo qualsiasi — che ammette un gruppo ∞^1 di movimenti. Sia $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_n}$ la forma canonica della corrispondente trasformazione infinitesima, supponendo di aver preso per linee coordinate x_n le traiettorie del movimento.

Le condizioni perchè lo spazio (1) ammetta un tale movimento, sono espresse dalle equazioni di Killing che, come è noto, si riducono in questo caso alla forma

$$(2) \quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_n} = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

I parametri $\xi^{(i)}$ (sistema controvariante) di una direzione generica la quale si trasporti lungo una traiettoria subiscono (trattandosi di un movimento rigido) incrementi nulli:

$$d\xi^i = 0.$$

Lo spostamento per parallelismo richiede invece ⁽¹⁾ gli incrementi

$$\delta \xi^{(i)} = - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} n l \\ i \end{matrix} \right\} \xi^{(l)} \delta x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nell'ipotesi che si tratti di traslazione elementare, i due spostamenti devono coincidere, cioè gli incrementi $\delta \xi^{(i)}$ devono essere nulli al pari degli $d\xi^{(i)}$. Se ne trae

$$(3) \quad \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} n l \\ i \end{matrix} \right\} \xi^{(l)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Queste equazioni (sempre in virtù dell'ipotesi che il movimento abbia carattere traslatorio) devono sussistere qualunque sia la direzione che si trasporta (e lungo qualsiasi traiettoria, il che implica in qualsiasi punto del campo che si consideri). Risulta allora

$$(4) \quad \left\{ \begin{matrix} n l \\ i \end{matrix} \right\} = 0 \quad (i, l = 1, 2, \dots, n).$$

Una prima conseguenza relativa al carattere della congruenza $[n]$ costituita dalle traiettorie si ricava subito ricordando le equazioni differenziali

⁽¹⁾ T. Levi-Civita, *Memoria sul parallelismo*, pag. 7.

delle geodetiche

$$d^2 x_i + \sum_{j,h}^n \left\{ \begin{matrix} j & h \\ i \end{matrix} \right\} dx_j dx_h = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Lungo ogni traiettoria si ha

$$dx_i = 0 \quad (i < n) \quad , \quad d^2 x_n = 0 ,$$

con che le equazioni precedenti rimangono verificate in virtù delle (4). *La congruenza [n] è dunque geodetica.*

Dalle equazioni (4) discende ovviamente

$$\left[\begin{matrix} i & n \\ l \end{matrix} \right] = 0 \quad (i, l = 1, 2, \dots, n)$$

ciò che equivale al sistema

$$A \quad , \quad \frac{\partial a_{ln}}{\partial x_i} = \frac{\partial a_{in}}{\partial x_l} \quad (i, l = 1, 2, \dots, n).$$

Per $l = n$, ricordando le (2), risulta, in particolare,

$$\frac{\partial a_{nn}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

dunque $a_{nn} = \varepsilon \cdot \alpha^2 = A \quad (\varepsilon = \pm 1)$.

Il sistema (A) mostra che la forma differenziale lineare

$$\varepsilon \cdot \alpha^2 \cdot dx_n + 2a_{nn-1} dx_{n-1} + \dots + 2a_{n1} dx_1 = du$$

è un differenziale esatto.

Possiamo valerci di questa circostanza per semplificare la forma (1) dell'elemento lineare, che scriveremo intanto

$$ds^2 = dx_n \cdot du + \sum_{i,k}^{n-1} a_{ik} dx_i dx_k.$$

La trattazione fino a questo punto vale per ogni congruenza [n]. Adesso dobbiamo distinguere due casi:

1°. La congruenza [n] è formata da linee ordinarie ($ds^2 \neq 0$ lungo tali linee, il che implica $\alpha \neq 0$).

Badando alla (6), possiamo scrivere

$$ds^2 = \varepsilon \left(\alpha dx_n + \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} dx_i \right)^2 + d\sigma^2$$

$d\sigma^2$ essendo una forma quadratica nelle $n-1$ variabili x_1, \dots, x_{n-1} .

Se prendiamo allora come nuova variabile x_n l'espressione

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot \alpha} u,$$

l'elemento lineare prende la forma canonica geodetica, già studiata nella Nota precedente.

$$(a) \quad ds^2 = \varepsilon dx_n^2 + d\sigma^2 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

2°. La congruenza $[n]$ è formata da linee di lunghezza nulla. In questo caso, dovendo avere $ds^2 = 0$ lungo una linea n , risulta

$$a_{nn} = \varepsilon \cdot \alpha^2 = 0.$$

Convienne allora prendere la funzione u precedentemente introdotta, per mezzo del suo differenziale, come una nuova variabile. Posto $x_n = y_n$, facciamo una trasformazione delle altre $n - 1$ variabili, assumendo, al posto delle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , $n - 1$ loro combinazioni indipendenti arbitrarie y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , fra le quali figurì u . Porremo, per esempio, $y_{n-1} = u$.

L'elemento lineare si riduce allora alla forma canonica

$$(b) \quad ds^2 = dy_n \cdot dy_{n-1} + d\sigma^2,$$

dove $d\sigma^2$ è una forma quadratica nelle $n - 1$ variabili y_1, y_2, \dots, y_{n-1} .

3. Dalla espressione (a), trovata per l'elemento lineare, risulta notoriamente che le ipersuperficie $x_n = A$ sono geodetiche, cioè contengono interamente la geodetica della varietà passante per due loro punti qualsivogliano.

Tenendo presente questo risultato, si può ancora dimostrare che *una qualsiasi geodetica g , di una superficie $x_n = A$, genera per traslazione una superficie di curvatura gaussiana nulla.*

Basta pensare che *tale superficie contiene due famiglie di geodetiche ortogonali*: una di queste è costituita dalle successive posizioni della g , e l'altra dalle traiettorie.

Nel caso delle linee di lunghezza nulla, dalla espressione (b) dell'elemento lineare risulta ovviamente che le ipersuperficie $y_n = A$ non sono, in generale, geodetiche; sono invece geodetiche le varietà $y_n = c^t \cdot y_{n-1} = c^t$. *La conclusione precedente vale allora per le superficie generate dalle geodetiche di queste varietà.*

Fisiologia. — *Una nuova ipotesi sul significato fisiologico delle protamine e degli istoni rispetto al ricambio nucleare* ⁽¹⁾.

Nota di A. CLEMENTI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Il problema, che si riferisce al meccanismo grazie al quale durante il ricambio nucleare ha luogo nella cellula animale la genesi o la rigenerazione sintetica del costituente più caratteristico del nucleo rappresentato dall'acido nucleinico, costituisce uno dei problemi fondamentali della fisiologia rimasti ancora insoluti.

La grande scarsezza di ricerche non solo sperimentali, ma anche critiche, su questo problema di capitale importanza per tutte le scienze biologiche, mi induce a illustrarlo da un punto di vista nuovo, finora trascurato dagli studiosi, e più propriamente da quello che si riferisce alla possibilità dell'esistenza di rapporti biochimici tra protamine e istoni da una parte e sintesi dell'acido nucleinico dall'altra.

La costituzione chimica dell'acido nucleinico, che fu chiarita dalle classiche ricerche di Kossel, di Levene, di Stendel e di numerosi altri autori, ci permette di affermare che dal punto di vista fisiologico il problema della sintesi dell'acido nucleinico si confonde col problema della sintesi dell'anello purinico e dell'anello pirimidinico.

Dalle ricerche di embriochimica eseguite da Tichomiroff (1885), da Kossel (1886), da Levene (1906), da Lafayette, Mendel e Leawenworth (1908), da Plimmer e Scott (1908), risulta dimostrato, che durante lo sviluppo dell'uovo sia dei vertebrati, sia degli invertebrati, ha luogo un aumento dei costituenti nell'acido nucleinico (basi puriniche e fosforo) e cioè ha luogo la sintesi di nuovo acido nucleinico dal materiale azotato non purinico presente nell'uovo stesso al principio dello sviluppo. Un solo autore, il Masing (1910), espresse un'opinione contraria a questa tesi; ma un'analisi critica delle ricerche condotte da questo autore dimostra come la sua affermazione non sia giustificata dai dati di fatto da lui stesso stabiliti. La capacità di compiere la sintesi dell'acido nucleinico da materiale non purinico risulta dimostrata, anche per l'organismo dei mammiferi nella vita extra-uterina, dalle ricerche di Burian e Schur (1897), e da quelle di Osborne e Mendel (1912).

La possibilità che nell'organismo animale le proteine partecipino alla *sintesi dell'anello purinico o dell'anello pirimidinico* non con i loro prodotti

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Roma.

azotati ultimi di degradazione catabolica (come è il caso della sintesi dell'acido urico nel fegato dei sauropsidi, che rappresenta un fenomeno biologico di sintesi protettiva in rapporto col catabolismo), ma anche più direttamente con *aggruppamenti atomici* preformati in alcune delle loro pietre di costruzione, come ad esempio *nell'arginina* e *nell'istidina*, rappresenta il problema che noi vogliamo qui prendere in speciale considerazione.

La possibilità di rapporti biochimici tra istidina e anello purinico è intuitiva, poichè sia nell'istidina sia nell'anello purinico, è presente il nucleo imidazolico, essendo l'istidina, secondo quanto risulta dalle ricerche di Knoop e Windaus e di Pauli, un acido α -amino- β -imid-azol-propionico.

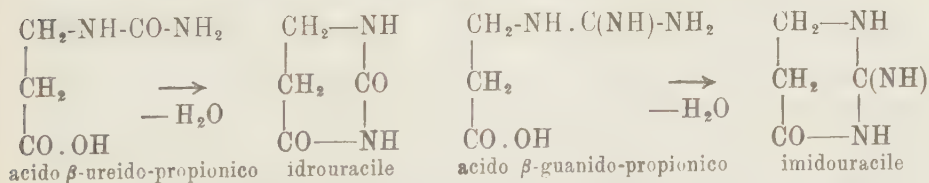
Meno intuitive e più complicate sono le *possibilità logiche di rapporti biochimici tra la molecola dell'arginina e l'anello purinico e pirimidinico* per cui si spiega come esse siano finora sfuggite all'attenzione dei ricercatori.

La prima e più semplice possibilità chimica di siffatti rapporti si può trovare nella presenza del radicale guanidinico nella molecola dell'arginina, la quale, come dimostrarono Schulze e Winterstein, è un acido α -amino- δ -

guanido-valerianico $\text{C} \begin{array}{l} \text{NH}_2 \\ \text{=NH} \\ \text{NH-CH}_2\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{-CH} \end{array} \begin{array}{l} \text{NH}_2 \\ | \\ \text{CO.OH} \end{array}$. Poichè il radicale

ureico fa parte dell'anello purinico, è evidente l'importanza della trasformazione del radicale guanidinico in radicale ureico, che avviene nell'organismo dei vertebrati per opera di un fermento specifico deguanidizzante come risulta dimostrato dalla cosiddetta « *legge dell'arginasi* » da noi messa in evidenza nel 1913-14.

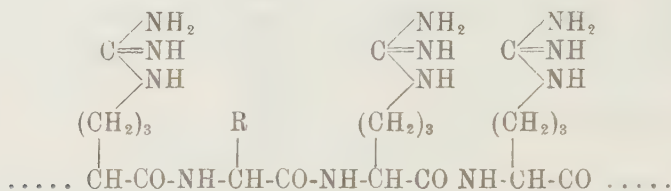
Una seconda possibilità è rappresentata dalla derivazione *dell'anello pirimidinico dalla molecola dell'arginina*: tale possibilità logica è avvalorata da alcuni dati di fatto di carattere sperimentale; infatti, per trattamento con permanganato potassico, Kutscher ottenne dall'arginina l'acido γ -guanido-butyrico, dal quale, per successiva analoga ossidazione, può derivare l'acido β -guanido-propionico; e da questo può derivare l'imido-uracile per un processo simile a quello per cui dall'acido β -ureido-propionico deriva l'idrouracile e dalla creatina si genera nell'organismo la creatinina:



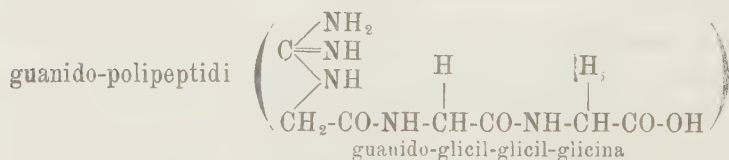
Le ricerche fisiologiche tendenti a dimostrare la genesi dell'anello purinico dall'istidina e dall'arginina nell'organismo animale hanno dato risultati negativi per quanto riguarda la prima (Abderhalden, Einbeck, Schmied), mentre, per quanto riguarda la seconda, ricerche recentissime di Akroid

e Hopkins (1916) hanno portato a importanti risultati positivi; questi autori, alimentando dei ratti con caseina idrolizzata da cui allontanavano l'arginina e l'istidina col metodo di Kossel e Kutscher, osservavano una rapida caduta del peso dei ratti in accrescimento, la quale cessava quando si aggiungevano all'alimento i due diamino-acidi mancanti e constatarono anche una diminuzione della quantità di allantoina eliminata con le urine quando l'arginina e l'istidina mancavano nell'alimento; in base a tali risultati questi due autori ammettono che *l'arginina e l'istidina stanno in rapporto intimo con il ricambio purinico dell'organismo.*

Dalle ricerche di Kossel e della sua scuola risulta, che le protamine differiscono dalle altre proteine per la grande elevatezza del loro contenuto percentuale in arginina rispetto alla percentuale degli altri amino-acidi presenti e propriamente sarebbero presenti, per ogni molecola di un mono-amino-acido, due molecole di arginina secondo il seguente schema:



A favore di tale concezione circa la costituzione delle protamine, starebbe la possibilità, da noi recentemente dimostrata, di ottenere per sintesi i



Risulta anche dalle ricerche di Kossel che gli istoni, insieme colle protamine, rappresentano le proteine più ricche in arginina finora conosciute.

È da rilevare, dal punto di vista biologico, che *proteine così ricche in arginina come gli istoni e le protamine si trovano solo nel nucleo della cellula*, cioè a dire nell'organite cellulare destinato ad operare la sintesi dell'acido nucleinico, e più specialmente (protamine) nel nucleo delle cellule sessuali maschili di animali a sangue freddo, cioè a dire nel nucleo di cellule destinate a compiere una rapida sintesi di nuovo acido nucleinico durante la moltiplicazione cellulare che segue alla fecondazione.

Miescher e Bang trovarono che gli spermatozoi dei pesci contengono nel loro nucleo prima della maturazione gli istoni al posto delle protamine, le quali si sostituiscono ai primi in seguito al processo di maturazione

Anche Abderhalden, nei preparati di protamine dei testicoli di salmone

sacrificati ai primi di ottobre, trovò un contenuto del 40 % di basi esoniche, mentre nei preparati ottenuti più tardi trovò il 60 % di basi esoniche.

Noi crediamo quindi che, in base ai dati di fatto suesposti riferentisi alla sintesi dell'acido nucleinico, alla costituzione chimica delle protamine e degli istoni e al valore nutritivo dell'arginina, sia perfettamente giustificata una nuova ipotesi sul significato fisiologico delle protamine e degli istoni, secondo la quale *le protamine e gli istoni* compiono nel nucleo cellulare non solo una funzione statica in rapporto al loro carattere basico, ma anche *una funzione dinamica in istretto rapporto colla loro costituzione chimica* e, propriamente, *grazie al loro alto contenuto in arginina, la funzione di sostanze di riserva immediata per la genesi delle basi pirimidiniche e delle basi puriniche necessarie alla sintesi di nuovo acido nucleinico durante la moltiplicazione cellulare o alla rigenerazione sintetica dell'acido nucleinico che si degrada durante il normale metabolismo nucleocellulare.*

La nuova ipotesi, che qui formuliamo quale ipotesi di lavoro, orientando in una nuova direzione le indagini sul ricambio materiale del nucleo della cellula e facendo assodare nuovi fatti, potrà contribuire a diradare le tenebre che ancora avvolgono un fenomeno di importanza fondamentale per le discipline biologiche e mediche quale è quello della genesi dell'acido nucleinico nell'organismo animale.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente VOLTERRA presenta alla Classe il Socio straniero MARCHAL che assiste alla seduta, ed al quale, a nome dei Colleghi, dà il benvenuto.

Ringrazia poscia i Soci per l'alta carica alla quale, con la Vicepresidenza dell'Accademia, vollero chiamarlo, e cui si ripromette di dedicare tutte le sue cure per il bene e per il progresso del sodalizio linceo. Ricorda i benemeriti accademici che lo precedettero alla Presidenza, e manda un reverente saluto a S. M. il Re, Presidente onorario dell'Accademia; come pure saluta il Vicepresidente uscente prof. RÖTTI e, in occasione della celebrazione della Vittoria, i due Soci onorari DIAZ e THAON DI REVEL benemeriti della patria.

Il PRESIDENTE fa poscia cenno delle difficili condizioni economiche in cui si trova l'Accademia, che a causa del costo eccessivo della stampa, si vede costretta a limitare le proprie pubblicazioni. Questo stato di cose si è fatto e si va facendo, in Italia e fuori, sempre più grave, in particolar modo per le pubblicazioni di carattere scientifico; e alle angustie dell'ora presente, l'Accademia deve aggiungere riduzioni e rinunce che colpiscono quelle scienze le quali sono fonti del progresso e del benessere umano! È quindi dovere dello Stato, osserva il sen. VOLTERRA, sopperire a questi

bisogni urgenti; una propaganda in questo senso dovrebbe essere fatta presso tutto il pubblico, e la generosità pubblica dovrebbe dare il mezzo, in vista dei vantaggi che ne trae. ai lavori degli scienziati di essere fatti conoscere e largamente diffusi.

Il PRESIDENTE rivolge il pensiero ai numerosi Soci di cui la Classe di scienze fisiche deve lamentare la perdita durante le ferie accademiche; e con commossa parola commemora i senatori RIGHI e CELORIA, i professori CUBONI, BECCARI, RAJNA, GIGLIOLI, di tutti rievocando l'opera scientifica e mettendone in rilievo la importanza. Così pure ricorda la morte dei Soci stranieri Sir NORMAN LOCKYER, GAUTIER, SCHWENDENER e VOIGT.

Comunica che per la morte del Socio CUBONI, ha mandato all'Accademia le condoglianze il Ministro dell'Agricoltura on. MICHELI. Altre parole di rimpianto per la scomparsa del prof. CUBONI aggiunge il Socio GRASSI.

Il PRESIDENTE dà poscia parte dei ringraziamenti inviati per la loro recente elezione. dai Soci: BOTTAZZI, CERULLI, CHIARUGI, LEONARDI-CATTOLICA, DE MARCHI; e dai Corrispondenti LONGO e RAFFAELE.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'accademico Segretario CASTELNUOVO presenta le numerose pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: PINCHERLE, GRASSI, BERLESE, GUIDI C., SILVESTRI, LACROIX, LALLEMAND, e altre importanti, delle quali tutte sarà dato l'elenco nel Bollettino bibliografico dei Rendiconti.

COMUNICAZIONI VARIE

Lo stesso Presidente comunica che. durante le ferie scorse, hanno mandato pieghi suggellati da conservarsi negli Archivi accademici, i signori: BRUNI (un piego), CLEMENS GALLETTI (due pieghi), MENGHI (un piego), PASTORI (tre pieghi), ROMANI (due pieghi).

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 novembre 1920.

- ABETTI G. — Annibale Ricedò 1844-1919
Repr. from the « *Astrophysical Journal* », vol. LI, pp. 65-72). Rome, 1919. 8°.
- ABETTI G. — Commemorazione di Elia
Millosevich (Estr. dalla « *Rivista geografica italiana* », anno XXVII). Firenze, 1920. 8°. pp. 1-4.
- ABETTI G. — Contributi astronomici n. 1.
Esperienze fotografiche con il prismabioiettivo Mez-Secchi (Estr. dalle « *Memorie della Società astronomica italiana* », vol. I). Roma, 1920. 8°, pp. 1-11.
- ABETTI G. — Densità di alcuni sistemi
binari visuali (Estr. dalle « *Memorie della Società degli spettroscopisti italiani* », vol. VIII). Catania, 1919. 4°, pp. 1-8.
- ABETTI G. — Il sistema multiplo ϵ Ursae
Majoris (Estr. dalle « *Memorie della Società degli spettroscopisti italiani* », vol. VIII, pp. 1-12). Catania, 1919. 4°.
- ABETTI G. — Intellectual intercourse between allied and friendly countries
(Repr. from « *Science* », N. S., vol. XLIX). Washington, 1919. 4°, pp. 1-3.
- ABETTI G. — The scientific mobilization in Italy for the war (Repr. from « *Science* », N. S., vol. L). Washington, 1919. 4°, pp. 1-7.
- AGAMENNONE G. — Le segnalazioni sismiche all'Osservatorio di Mineo (Estr. dagli « *Atti dell'Accademia napoletana scientifico-letteraria* » « *S. Pietro in Vincoli* », vol. III). Napoli, 1920. 4°, pp. 1-8.
- AGAMENNONE G. — Sul periodo sismico di
Frascati del 6-7 novembre 1909 (Estr. dal « *Bollettino della Società sismologica italiana* », vol. XXII). Modena, 1919. 8°, pp. 1-16.
- AMODEO F. — Le ricerche di un matematico napoletano del settecento su alcuni teoremi di Archimede e sulle loro estensioni (Estr. dal « *Rend. della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli* », vol. XXVI). Napoli, 1920. 8°.
- AMODEO F. — Tucci, De Angelis, gli altri
istitutori e i geodeti dell'epoca (Estr. dagli « *Atti dell'Accademia pontaniana* », vol. L). Napoli, 1920. 8°, pp. 1-32.
- ANGSTRÖM A. — Ueber die Schätzung der
Bewölkung (Separat-Abdruck aus der « *Meteorologischen Zeitschrift* », Heft 9-10, pp. 257-262). Braunschweig, 1919. 4°.
- AZIMONTI E. — I grani dello Strampelli
nel mezzogiorno. Piacenza, 1920. 8°, pp. 1-16.
- BERLESE A. — Centuria quinta di Acari
nuovi (Estr. dal « *Redia* », vol. XIV, pp. 143-195). Firenze, 1920. 8°.
- BOCCARDI J. — Recherches faites à l'Observatoire de Pino Torinese sur une variation diurne de la latitude en 1919-20. Turin, 1920. 8°, pp. 1-30.
- CAUDA A. — Metodo pratico per svelare
negli Schizomiceti l'attitudine a fissare l'azoto libero (Estr. da le « *Stazioni sperimentali agrarie italiane* », vol. LIII, pp. 79-80). Modena, 1920. 8°.
- CLERICI E. — In occasione del centenario
dell'opera di Giovanni Battista Brocchi: « Dello stato fisico del suolo di Roma » (Estr. dal « *Bollettino della Società geologica italiana* », vol. XXXVIII, pp. LXXXIII-XCIII). Roma, 1920. 8°.
- CROSTHWAITE P. M. — Deterioration of
structures in sea-water. First report of the committee of the Institution of civil Engineers. London, 1920. 8°, pp. 1-x, 1-301.
- D'ERASMO G. — Su alcuni ittioliti miocenici della provincia di Siracusa (Estr.

- dal « Rend. della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli », vol. XXVI. Napoli, 1920, 8°, pp. 1-15.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Applicazione della geologia XXVIII. Ancora sul calcare e le viti americane (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIII, pp. 97-100). Modena, 1920. 8°.
- DELGROSSO. M. — Sulla bismutosferite di Brossa (Estr. dagli « Atti della Società dei naturalisti e matematici di Modena », vol. II, 1919-1920, pp. 21-23). Modena, 1920. 8°.
- DEL LUNGO C. — Sopra l'originalità dei « parafulmini perfezionati » del sistema Borghini di Arezzo. Arezzo, 1916. 12°, pp. 1-16.
- FAVARO A. — Benedetto Castelli nella storia della scienza (Estr. dalla « Rivista di Meteorologia pratica ». S. I. e s. d. fol.
- GRASSI B. — Seconda relazione della lotta antimalarica a Fiumicino (Roma). Roma, 1920. 8°, pp. I-VII, 1-314.
- GRIDELLI E. — Nota sul *Remus sericeus* Holme e *R. flum* Kiesw. della costa adriatica (Estr. dal « Redia », vol. XIV, pp. 61-64). Firenze, 1920. 8°.
- GRIFFINI A. — Studi sui Lucanidi VII. Intorno al *Metopodontus cinnamomeus* (Guér) (Estr. dal « Redia », vol. XIV, pp. 47-59). Firenze, 1920. 8°.
- GRIFFINI A. — Studi sui Lucanidi VIII. Sul *Prosopocoelus serricornis* (Latr.) (Estr. dal « Redia », vol. XIV, pp. 65-75). Firenze, 1920. 8°.
- GUARDUCCI F. — Sopra la determinazione di un ellissoide locale (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna », tomo VI). Bologna, 1920. 4°, pp. 1-6.
- GUARDUCCI F. — Sulla determinazione speditiva della direzione del meridiano svincolata dall'uso del cronometro (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », tomo V, 1917-18). Bologna, 1919. 4°, pp. 1-13.
- GUIDI C. — Sul calcolo statico delle dighe a gravità (Estr. dal « Giornale dell'Associazione nazionale degli Ingegneri italiani », anno I). Milano, 1920. 8°, pp. 1-9.
- HUYGHENS. C. — *Traité de la lumière*. Paris, 1920. 12°, pp. I-X, 1-155.
- INGHIRAMI G. — *Table des nombres premiers et de la décomposition des nombres de 1 à 100.000, revue et corrigée par le dr. Prompt*. Paris, 1919. 8°, pp. 1-35.
- ISSEL A. — *Bioliti e pisoliti* (Estr. dal « Bollettino del R. Comitato geologico d'Italia », vol. XLVI). Roma, 1918. 8°, pp. 297-340.
- ISSEL R. — *Biologia marina*. Milano, 1918. 12°, pp. I-XX, 1-607, 1-53.
- LACROIX A. — *Les industries minerales non métallifères à Madagascar*. Paris, 1920. 8°, pp. 1-63.
- LALLEMAND CH. — *Les nouvelles unités légales de mesures industrielles* (Extr. de l'« Annuaire du Bureau des longitudes pour l'an 1920 »). Paris, 1920. 12°, pp. 1-64).
- LAVOISIER A. L. — *Mémoires sur la respiration et la transpiration des animaux*. Paris, 1920. 12°, pp. I-VIII, 1-67.
- LEBON E. — *Table de caractéristiques de base 30 030 donnant en un seul coup d'œil les facteurs premiers des nombres premiers avec 30.030 et inférieurs à 901.800.900*. Paris, 1920. 4°, pp. I-XX, 1-56.
- LEONE S. — La lotta contro il tracoma nella provincia di Siracusa, XV relazione 1919-20. Profilassi visiva (III relazione). Siracusa, 1920. 4°, pp. 1-16, 1-9.
- LONGO B. — Sopra un pino del Monte Pisano (Estr. dagli « Annali di botanica », vol. XV, pp. 1-3). S. I. e s. d., 8°.
- LORIA G. — *Newton* (Profili n. 52). Roma, 1920. 12°, pp. 1-69.
- MRAZEK J. — *Die Windverhältnisse in Prag nach den Pilotierungen in der Zeit vom November 1916 bis November 1917*. Prag, 1920. 4°, pp. 1-14.
- NORTHROP J. I. — *A Naturalist in the*

- Bahamas. New-York, 1919. 8°, pp. i-xv, 1-281.
- Onoranze al Sen. Enrico d'Ovidio. XVII Novembre 1918. Campobasso, 1920. 8°, pp. 1-69.
- ORSTED H. C. — Naturvidenskabelige Skrifter. vol. I-III. Kobenhavn. 1920. 8°, pp. I-CLXVI, 1-344, 1-593, I-CLXVI, 1-420.
- PANETTI M. — Il Laboratorio di aerodinamica del R. Politecnico di Torino (Estr. dal « Giornale dell'Associazione nazionale degli Ingegneri italiani », anno I). Milano, 1920. 4°, pp. 1-10.
- PASSERINI N. — Sul potere insetticida delle diverse parti della pianta e dei capolini a differente grado di sviluppo del *Pyrethrum Cinerariaefolium* Trev. (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXVII). S. l., 1920. 8°, pp. 1-6.
- PEYRONEL B. — Alcuni casi di rapporti micorizici tra Boletinee ed essenze arboree (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIII, pp. 24-31). Modena, 1920. 8°.
- PINCHERLE S. — Lezioni di calcolo infinitesimale. Bologna, 1920. 8°, pp. i-vi, 1-785.
- PORFIRIO C. — Soluzione del problema più trascendentale opportuno e vantaggioso universalmente. Buenos Aires, 1920. 12°, pp. 1-25.
- PREY A. — Ueber die Laplacésche Theorie der Planetenbildung. Prag, 1920. 4°, pp. 1-15.
- RIVERA V. — Fattori biologici di rendimento agrario (Estr. dalla « Rivista di biologia », vol. II). Roma, 1920. 8°, pp. 1-22.
- ROLF B. — Tables psychométriques portatives. Stockholm, 1919. 8°, pp. 1-30.
- RONCHETTI V. — Dita ippocratiche e particolare alterazione della formula ematologica in un caso di degenerazione amiloide a sede prevalentemente epatica (Estr. dagli « Atti della Società lombarda di scienze mediche e biologiche », vol. VIII). Milano, 1919. 8°, pp. 1-11.
- RONCHETTI V. — Encefalite epidemica (Estr. dagli « Atti della Società lombarda di scienze mediche e biologiche », vol. IX). Milano, 1920. 8° pp. 1-33.
- RONCHETTI V. — Forme cliniche diverse della encefalite epidemica (Estr. dagli « Atti della Società lombarda di scienze mediche e biologiche », vol. IX). Milano, 1920, 8°, pp. 1-8.
- Saggi gleucometrici ed acidimetrici sui mosti italiani della vendemmia 1919 (Ministero per l'Agricoltura). Roma, 1920. 8°, pp. 1-62.
- SANTAELLA J. — La industria petrolera en Mexico. Mexico, 1919. 4°, pp. 1-28.
- SCHOR C. — Nuova formulazione del principio d'inerzia e conseguente ricostruzione della dinamica. Capodistria, 1920. 8°, pp. 1-16.
- SEE T. J. J. — New theory of the aether (Repr. from « Astronomische Nachrichten », n. 5044, 5048, pp. 52-190). Kiel, 1920. 4°.
- SILVESTRI F. — La mosca della Brionia *Gonyglossum Wiedemanni* Meig. (Diptera: Trypanecidae). (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici, vol. XIV). Portici, 1920. 8°, pp. 205-215.
- SPALLANZANI L. — Observations et expériences faites sur les animalcules des infusions. Vol. I-II. Paris, 1920. 12°, pp. i-viii, 1-105, 1-122.
- TRAVERSO G. B. — Pier Andrea Saccardo (Estr. dalla « Rivista di Biologia », vol. II, pp. 1-6). Roma, 1920. 8°.
- TREVISANI D. — La trisezione dell'angolo. Monopoli, 1920. 8° p., pp. 1-11.
- VANNINI T. — Saggio di una trattazione della geometria del triangolo mediante il calcolo geometrico. Bologna, 1919. 8°. pp. 1-79.
- ZACCAGNA D. — Note illustrative della carta geologica delle Alpi Apuane. Roma, 1920. 8°, pp. 1-110.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

~~~~~

*Seduta del 21 novembre 1920.*

F. D'OVIDIO, Presidente.

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Zoologia. — *Osservazioni sulla vita degli anofeli.* Nota I del Socio B. GRASSI.

#### DURATA DELLA VITA.

Già nei miei « Studi di uno zoologo sulla malaria » ho stabilito che le femmine degli anofeli alati (*A. claviger*) d'inverno possono protrarre la loro vita per parecchi mesi (4, 5, 6): precisamente, d'inverno restano soltanto le femmine fecondate, nate a tardo autunno, destinate a morire al più tardi per la fine d'aprile (osservazioni fatte nell'Agro romano). Avevo notato inoltre che anche d'estate la vita degli anofeli può protrarsi per parecchie settimane, se si nutrono con cibi vegetali e si tengono in ambiente non troppo caldo, e che, alla temperatura costante di 15°, un pasto di sangue basta loro per 10 e più giorni, mentre nei mesi caldi basta soltanto per circa due giorni. Ma io non ero arrivato a formarmi un concetto della durata della vita degli anofeli nei mesi più caldi e soltanto avevo osservato: « che la vita degli anofeli d'estate deve essere certamente di solito molto breve, altrimenti il loro numero dovrebbe in molti luoghi crescere enormemente in settembre, ciò che in realtà non si verifica ».

L'anno scorso ritornavo sull'argomento e il mio collaboratore Sella dimostrava che nei mesi caldi maturazione e deposizione delle uova sono portate a termine in circa 2-3-4 giorni, cioè dopo un sol pasto di sangue, la

cui digestione dura appunto questo tempo. Egli inoltre confermava che, diminuendo la temperatura, la digestione avviene molto più lentamente, che in principio di primavera e ad autunno avanzato occorre più di un pasto per la maturazione delle uova, e che d'inverno la vita di questi insetti si può protrarre da 5 o 6 mesi, dal novembre, cioè, all'aprile.

Sella aggiunge: « L'intervallo tra il termine della digestione e la deposizione nelle gabbie può essere un giorno o due o anche molto di più ».

« Dalle osservazioni sulla condizione delle uova degli anofeli che al tramonto escono dalle abitazioni e sulle ore di deposizione, siamo invece propensi a ritenere che in natura la deposizione avvenga la notte del giorno in cui è ultimata la digestione ».

« *La durata della vita media degli anofeli in estate è ancora da determinare, così come il numero delle deposizioni che possono compiere* ».

« Nelle gabbie anche tenute in ambiente semioscuro sopra bacini di acqua e circondati di tela cerata per accrescere l'umidità dell'aria, la mortalità è grandissima e vivono poco, *al massimo una quindicina di giorni* ai quali si dovrebbero aggiungere quelli di vita precedente alla cattura; certamente in libertà vivono più a lungo, ma forse non più di un mese ».

Non ho parlato fin qui che delle femmine: i maschi non si nutrono, tutt'al più assorbono acqua o liquidi zuccherini e la loro vita è molto breve, come dimostra anche la loro scomparsa al principio dell'inverno, appena cessa lo sviluppo di nuovi anofeli (per tutto il periodo dell'ibernamento non si trovano che femmine feconde: Grassi, Sella).

Dalle notizie sopra riferite si deduce che se gli anofeli d'estate, dopochè hanno succhiato sangue, maturano le uova in 3-4 giorni, ammesso che ne vivano quindici, dovrebbero deporle nel frattempo almeno 3-4 volte.

Che l'anofele possa deporre le uova più di una volta, io stesso l'avevo riconosciuto e anche il Sella venne a uguale conclusione. In molti esperimenti però, fatti in gabbie, da lui e dal tecnico Neri, non si riuscì che ad ottenere una seconda maturazione (ma non la deposizione) e due sole volte, una in aprile e l'altra in novembre. La maggior parte, sia in laboratorio, sia nel porcile, non svilupparono minimamente le uova, anche insistendo con più nutrizione successive; ciò che Sella attribuì alle condizioni anormali create dalla cattività.

Ci stupiva perciò grandemente l'asserzione dell'americano Groesbeeck Mitchell, il quale aveva ottenuto in laboratorio ben 6 deposizioni successive con 1569 uova, da una specie affine alla nostra, *A. punctipennis*. Il papà dell'entomologia americana, Howard, ci assicurava però in una sua visita fattaci nell'estate scorso che questa notizia non merita fede.

Restava dunque oscuro ancora questo punto della biologia degli anofeli. Per mancanza di aiuti non ho potuto quest'anno approfondirlo come avrei voluto, ma però ho raccolto una serie di fatti molto interessanti e dimostrativi.

Gli esperimenti (eseguiti, sotto la mia guida, dal tecnico Neri Francesco, esperto e coscienzioso, come sappiamo bene io e i miei collaboratori) sono stati fatti tutti, eccetto il 7° e l'11°, alle Idrovore di Maccarese. Quivi non esiste che un piccol numero di abitazioni ben protette meccanicamente, dove pochissimi anofeli arrivano a insinuarsi: essi si rifugiano perciò nei porcili, nelle stalle, nei gallinai, ripari che sono in piccol numero e vicini, ma separati dalle abitazioni. Alcuni di questi locali si prestano benissimo per la cattura completa (stalla della mucca e stalla del cavallo del sig. Parisinotto); gli altri locali sono meno adatti, ma se ne può raccogliere sempre la maggior parte. Per formarmi un sicuro concetto della durata della vita degli alati in natura, pensai di fare in questi locali una cattura metodica degli anofeli alati, ricorrendo alla coloritura artificiale con un colore alcoolico di anilina, coloritura resistente per molti giorni e di nessun danno, se accortamente fatta, per gli anofeli, come mi risulta da controlli opportuni. Si noti che nei dintorni non si faceva la pulitura dei canali, nè si ricorreva alla petrolizzazione, perciò lo sviluppo degli anofeli era sempre abbondante. Si tenga infine presente che manca qualunque abitazione per un raggio di oltre 5 chilometri tutt'all'intorno alle Idrovore, eccetto alcune casette alla spiaggia del mare, a breve distanza, ma disabitate quasi sempre durante i nostri esperimenti, nelle quali non rinvenimmo mai anofeli.

Passo ad esporre i singoli esperimenti.

N. B. — *In nessun esperimento si usò il colore che era stato adottato per l'esperimento precedente: non ci accadde mai di catturare un anofele del colore usato nell'esperimento precedente.*

1° Esperimento. — L'8-V si colorirono in verde 73 anofeli presi in 3 porcili e si liberarono rispettivamente nei porcili stessi.

Il 17-V se ne sono presi in questi rispettivamente 148, 207, 15 e negli altri locali suddetti altri 210. La cattura era stata incompleta. Nessuno era colorito.

2° Esperimento. — Il 18-V se ne sono presi 638 dei quali 288 nei porcili. Questi vennero coloriti in rosso e rimessi nei rispettivi porcili. Non si fece più alcuna cattura per sei giorni.

Il 24-V si catturarono con grande cura nei vari locali: in tutto 509 dei quali 260 nella stalla della mucca; 10 erano coloriti, 2 di essi nella stalla della mucca, gli altri nei vari porcili. (Dei coloriti 5 erano senza uova e pieni di sangue e 5 col sangue mezzo digerito e le uova circa a metà sviluppo).

Il 25-V presi 468, di cui 222 nella stalla della mucca (alcuni nelle abitazioni); 2 coloriti, 1 nella stalla della mucca e 1 in un porcile (1 con sangue senza uova, l'altro mezzo mezzo come sopra).

Il 26-V presi 429, di cui 101 nella stalla della mucca (alcuni nelle abitazioni); 2 coloriti, di cui 1 nella stalla della mucca e 1 in un porcile (sangue e uova come sopra).

Il 27-V presi 296 (cattura non del tutto completa) di cui 107 nella stalla della mucca; colorito nessuno.

Il 28-V presi 551, di cui 220 nella stalla della mucca e 90 nella stalla vicina con un cavallo; solo di questi ultimi 2 coloriti (vuoti).

Il 29-V presi 529, di cui 205 nella stalla della mucca; nessuno colorito.

Il 30-V presi 261 (cattura incompleta) di cui 80 in un porcile; *uno solo* di questi ultimi colorito (pieno di sangue).

Il 31-V presi 411 nei porcili, nessuno colorito.

L'1-VI presi 579, dei quali 38 in una stalla con un cavallo e 103 in un porcile: soltanto tra questi ultimi 1 colorito.

Il 2-VI presi 375; coloriti 0.

Anche dopo il 2-VI non se ne prese più alcuno colorito.

Riassumendo: dei 288 coloriti, cominciando la cattura 6 giorni dopo la colorazione, se ne ricuperarono soltanto 18, di cui nei locali dove erano stati messi 12 tra 2609 e in altri locali 6 tra 1424, entro il periodo il 14 giorni (circa il 6 %).

3° *Esperimento*. — 1-VI Presi nella stalla della mucca, nella quale si era sospesa la cattura dal giorno 30-V circa 600, coloriti in verde e rimessi in libertà nella stalla stessa.

2-VI Presi da per tutto, eccetto nella stalla della mucca, 375; coloriti 0.

3-VI Presi da per tutto, eccetto nella stalla della mucca, 359; coloriti 0.

4-VI Presi 447 come sopra; coloriti 5 in due porcili (2 pieni di sangue, 2 con uova mature, 1 con sangue mezzo digerito).

5-VI Presi 330 come sopra, di cui coloriti 5 (1 vuoto, 1 pieno di sangue, 3 mezzo mezzo).

6-VI Presi come sopra 389; coloriti 0.

7-VI Presi come sopra 391; colorito 1 (pieno di sangue); presi nella stalla della mucca 511, di cui 15 coloriti (10 mezzo mezzo, 4 pieni di sangue, 1 con uova mature).

8-VI Presi come sopra 713; coloriti 1 (mezzo mezzo); presi nella stalla della mucca 284, di cui 3 coloriti (2 mezzo mezzo, 1 pieno di sangue).

|                                             |       |      |                  |
|---------------------------------------------|-------|------|------------------|
| 9-VI Presi come sopra 363; colorito 1       | 12-VI | Idem | 233; coloriti 0. |
| (mezzo mezzo) nella stalla della mucca 272; | 13-VI | Idem | 598; coloriti 0. |
| coloriti 0.                                 | 14-VI | Idem | 967; coloriti 0. |

|                                          |       |      |                   |
|------------------------------------------|-------|------|-------------------|
| 10-VI Presi dappertutto 404; coloriti 0. | 15-VI | Idem | 1656; coloriti 0. |
|------------------------------------------|-------|------|-------------------|

|       |      |                  |       |      |                  |
|-------|------|------------------|-------|------|------------------|
| 11-VI | Idem | 497; coloriti 0. | 16-VI | Idem | 609; coloriti 0. |
|-------|------|------------------|-------|------|------------------|

Riassumendo, dei 600 coloriti se ne ricuperarono 31 (circa il 5 %), di cui 13 fra 3367 fuori del locale in cui erano stati catturati e rimessi in libertà, in 8 giorni, a cominciare dal giorno dopo che furono coloriti (11, di questi 13, prima che si cominciasse la cattura nella stalla) e 18 tra 1067 nel locale in cui furono messi, a cominciare da 6 giorni dopo la colorazione.

4° *Esperimento*. — 17-VI Presi 694, di cui 130 nella stalla della mucca; questi furono coloriti in bleu e liberati nella stalla stessa.

18-VI Presi 764 da per tutto, tranne nella stalla della mucca (quivi per saggio presi una ventina e trovati coloriti quasi tutti).

19-VI Presi 429 come sopra; coloriti 1 (pieno di sangue).

20-VI " 499 " " " 2

21-VI " 624 " " " 0. Nella stalla della mucca 272; colorito 1.

22-VI Presi 368 nei varî ambienti, eccetto la stalla della mucca e 180 in questa; coloriti 0.

23-VI Presi come sopra rispettivamente 384 e 140; coloriti 0.

24-VI Presi come sopra rispettivamente 450 e 128; coloriti 0.

25-VI Presi nei varî ambienti, eccetto la stalla della mucca, 362; coloriti 0.

26-VI Presi come sopra 415; coloriti 0.



Riassumendo, dei 130 coloriti, tralasciando l'osservazione del 1° giorno che non può essere qui presa in considerazione, se ne recuperarono 4 (circa 3 %), di cui 1 colorito tra 272 presi nella stalla il 4° giorno dalla colorazione e 3 coloriti tra 2316 presi in altri locali nei 4 giorni successivi alla colorazione.

5° *Esperimento*. — 26-VI Presi 226 nella stalla della mucca; coloriti in rosso e liberati nella stalla stessa.

27-VI Presi da per tutto, eccetto nella stalla della mucca 568; coloriti 0.

28-VI Presi come sopra 618; coloriti 0.

29-VI Presi come sopra 596; coloriti 1.

Presi nella stalla della mucca 862; coloriti in rosso 20 (10 pieni di sangue e 10 mezzo mezzo).

30-VI Presi nei vari ambienti eccetto la stalla della mucca 400; coloriti 1 (mezzo mezzo). Nella stalla della mucca 420; coloriti 2 (pieni di sangue).

1-VII Presi nei vari ambienti, eccetto nella stalla della mucca 414; coloriti 0; nella stalla della mucca 220; coloriti 0.

2-VII Presi come sopra rispettivamente 480 e 227; coloriti 0.

3-VII Presi in tutto 623; coloriti 0.

8-VII Presi in tutto 507; coloriti 0.

5-VII " " " 683; " 0.

9-VII " " " 751; " 0.

6-VII " " " 417; " 0.

10-VII " " " 645; " 0.

Riassumendo, dei 226 coloriti se ne recuperarono 24 (circa 10 %), di cui nella stalla dove erano stati presi, coloriti e liberati 22 su 1282, a cominciare dal 4° giorno dopo la colorazione, e 2 fuori su 2182, a cominciare dal giorno successivo a quello della colorazione.

6° *Esperimento*. — Si sospende la cattura per due giorni.

Il 13-VII se ne catturano 877 nei vari locali; si coloriscono in verde e si liberano negli stessi ambienti dove erano stati presi.

Il 14-VII se ne raccolgono saggi nei vari ambienti e se ne trova coloriti circa il 50 %.

Il 23-VII si ricomincia la cattura e se ne prendono nei vari ambienti 1022, di cui 2 coloriti (pieni di uova).

Il 24-VII 670; coloriti 0.

Il 1-VIII 550; coloriti 0.

" 25-VII 623; " 1 (mezzo mezzo).

" 2-VIII 846; " 0.

" 26-VII 569; " 1 (mezzo mezzo).

" 3-VIII 753; " 0.

" 27-VII 623; " 2 (1 mezzo mezzo e 1 vuoto).

" 4-VIII 542; " 0.

" 28-VII 427; " 0 (giornata burrascosa).

" 5-VIII 466; " 0.

" 29-VII 430; " 0.

" 6-VIII 642; " 0.

" 30-VII 445; " 0.

" 7-VIII 512; " 0.

" 31-VII 541; " 0.

" 8-VIII 366; " 0.

" 9-VIII 429; " 0.

Riassumendo, degli 877 coloriti in verde se ne recuperarono 6 (più del  $\frac{1}{2}$  %) a cominciare dal 10° giorno dopo la colorazione fino al 14° giorno tra 3507.

7° *Esperimento*. — A Ponte Galera il giorno 30-VI si raccolgono 350 anofeli, che si colorano in rosso e si lasciano liberi al tramonto alla ferrovia.

Il 14-VII non se ne possono raccogliere più di 429; coloriti 0.

Il 15-VII non se ne possono raccogliere più di 86; coloriti 0.

8° *Esperimento*. — A Maccaresè-Macchine Idrovore, come i primi 6 e i successivi 9° e 10°.

11-VIII Si raccolgono nei vari ambienti 1056 ♀ e 188 ♂ che si colorano in rosso e si lasciano liberi nei rispettivi ambienti. Si sospende la cattura fino al 18-VIII.

|                                          |                                         |
|------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 18-VIII presi 1529; coloriti in rosso 14 | 23-VIII presi 1163; coloriti in rosso 0 |
| 19-VIII " 1128; " " " 3                  | 24-VIII " 660; " " " 0                  |
| 20-VIII " 1362; " " " 5                  | 25-VIII " 642; " " " 0                  |
| 21-VIII " 1576; " " " 3                  | 26-VIII " 423; " " " 0                  |
| 22-VIII " 708; " " " 2                   |                                         |

Riassunto, tra 1244 coloriti ne sono stati dunque recuperati 27 (circa il 2 %) tra 6303, a cominciare dal 7° giorno dopo la colorazione fin all'11°.

9° *Esperimento*. — Il 28-VIII se ne raccolgono 1700 nei vari ambienti e si colorano in verde e si lasciano liberi nei rispettivi ambienti.

Si ricomincia la raccolta il 3-IX.

|                                       |                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 3-IX Presi 3065; coloriti in verde 24 | 16-IX Presi 847; coloriti in verde 0 |
| 4-IX " 1575; " " 13                   | 17-IX " 1407; " " 0                  |
| 5-IX " 897; " " 5                     | 18-IX " 1539; " " 0                  |
| 6-IX " 1097; " " 4                    | 19-IX " 862; " " 0                   |
| 7-IX " 1245; " " 1                    | 20-IX " 729; " " 0                   |
| 8-IX " 1195; " " 1                    | 21-IX " 1112; " " 0                  |
| 9-IX " 1273; " " 0                    | 22-IX " 1037; " " 0                  |
| 10-IX " 1681; " " 0                   | 23-IX " 1198; " " 0                  |
| 11-IX " 930; " " 0                    | 24-IX " 1357; " " 0                  |
| 12-IX " 943; " " 0                    | 25-IX " 1432; " " 0                  |
| 13-IX " 1074; " " 0                   | 26-IX " 1051; " " 0                  |
| 14-IX " 1176; " " 0                   | 27-IX " 1844; " " 0                  |
| 15-IX " 1573; " " 0                   |                                      |

Riassumendo, su 1700 anofeli coloriti ne sono stati recuperati 48 (circa il 2,5 %) a cominciare dal 6° giorno dopo la colorazione fino all'11°, tra 9074.

10° *Esperimento*. — Il 27-IX si raccolgono nella stalla della mucca 232 anofeli, si coloriscono in rosso e si rilasciano nella stalla medesima.

28-IX Se ne raccolgono nei vari ambienti, eccetto nella detta stalla, 2120, di cui coloriti 1 nella stalla del cavallo attigua a questa.

29-IX Come sopra 1544, di cui 1 colorito nella stalla di un cavallo lontana circa 50 metri da quella della mucca.

30-IX Come sopra, 1129 di cui 1 colorito in un porcile.

1-X Se ne raccolgono 614 nei vari locali, eccetto la stalla della mucca e quella attigua del cavallo; 2 coloriti; 140 nella stalla del cavallo attigua a quella della mucca, di cui 1 colorito, e 380 nella stalla della mucca, di cui 5 coloriti.

2-X Nei vari ambienti, come sopra, 845 di cui 2 coloriti; 138 nella stalla del cavallo vicino alla mucca, coloriti 0, e 192 nella stalla della mucca, coloriti 0.

3-X In tutto 1028; coloriti 0.

4-X " " 496; " 0.

5-X " " 876; " 0.

Riassumendo, su 232 anofeli coloriti nella stalla della mucca se ne recuperarono 13, circa 6 %, di cui 8 fuori della stalla della mucca su 6530 dal giorno successivo alla colorazione fino al 5° giorno, e 5 nella stalla della mucca su 380, il 5° giorno, primo giorno della cattura in questa.

11° *Esperimento*. — Alla stalla del procoio nuovo di Maccarese il 6-VII presi 1500 e coloriti in rosso.

Il 22-VII Presi 516 e nessuno colorito.

12° *Esperimento*. — Si colorano in verde 586 anofeli presi nei suddetti locali di Maccarese-Macchine Idrovore, l'8-X e si lasciano in libertà in aperta campagna, a 1 chilometro di distanza, al tramonto; tempo abbastanza favorevole al volo degli anofeli. Condizioni poco differenti permangono durante tutto l'esperimento.

Il 9-X se ne prendono nei soliti locali 742, di cui 55 coloriti in vari stadi di digestione e di sviluppo delle uova (ciò si ripete anche in tutte le altre catture).

Il 10-X 749, di cui 10 coloriti.

L'11-X 665, di cui 3 coloriti.

Nei giorni successivi non se ne pigliano più di coloriti (in verde).

In tutto su 586, se ne ripresero 68.

13° *Esperimento*. — 14-X Come sopra se ne coloriscono in rosso 627, che si lasciano liberi al tramonto. Vi è molto bestiame in vicinanza al punto dove si lasciano liberi. Durante la notte piove; nei giorni successivi tempo variabile.

Catture nei vari ambienti di Maccarese-Idrovore.

15-X 569, di cui coloriti 11.

20-X 500, di cui coloriti 0.

16-X 425, " " " 9.

21-X 298, " " " 0.

17-X 406, " " " 6.

Sospesa la cattura.

18-X 429, " " " 5.

26-X 249, " " " 0.

19-X 467, " " " 2.

27-X 266, " " " 0.

In tutto su 627 coloriti se ne sono ripresi solo 33. In questo, come nel precedente esperimento, i coloriti si trovarono irregolarmente sparsi nei vari ambienti.

14° *Esperimento*. — Il 28-X coloriti in rosso 515 e liberati al Canale delle acque alte, interponendo così circa 1 chilometro di macchia (macchia tra il detto canale e le Idrovore di Maccarese).

29-X catturati a Maccarese-Idrovore 170 e coloriti 0.

30-X " " " " 141 " " 2.

31-X " " " " 87 " " 1.

1-XI " " " " 74 " " 0.

Riassumendo, attraverso la macchia, arrivarono a porcili e stalle delle Idrovore su 515, soli 3.

*Matematica. — Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie. I: Idee direttive e loro prime conseguenze.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI.

È noto che la teoria invariante delle forme binarie può caratterizzarsi, secondo le suggestive vedute del programma Kleiniano, mediante un gruppo continuo  $\infty^3$  di trasformazioni proiettive dello  $S_n$ , che nel caso d'una sola forma d'ordine  $n$ , ha come (unica) curva unita una  $C^n$  razionale normale <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Il caso di più forme binarie, conduce a tutti i tipi di gruppi continui  $\infty^3$  non integrabili di trasformazioni proiettive dello  $S_n$ . Cfr. la Memoria di Fano, *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sé* [Memorie della R. Accad. di Torino (2) XLVI (1896), pp. 187-218], su cui dovremo ritornare diffusamente nella terza di queste Note.

Questa interpretazione è stata additata, ed anche usata per fini particolari da diversi autori (<sup>1</sup>); ma non sembra che finora si sia cercato di valersene come mezzo diretto per affrontare i problemi più generali della teoria, ed impostarvi una trattazione sistematica che procedesse indipendentemente dagli indirizzi classici.

Mi è sembrato che qualora un metodo d'indagine ispirato alla predetta interpretazione mostrasse di rispondere agilmente allo scopo, la teoria ne acquisterebbe in qualche punto semplicità e chiarezza, e forse potrebbe guadagnare qualche nuovo contributo. Ed effettivamente, come mi propongo di mostrare in questo saggio ed in altri successivi, estratti da una ricerca di maggior mole a cui sto attendendo, l'uso di alcune semplici idee direttive, sussidiate da elementari considerazioni di geometria iperspaziale, consente di dar veste nuova ad alcuni risultati classici, conducendo agevolmente nel cuore della teoria, e rivelando la sua potenzialità ad adattarsi anche a fini più ardui.

Chiedo mi sia consentito di omettere per brevità qualche calcolo materiale e qualche procedimento di inessenziale importanza.

1. Sia

$$(1) \quad f(x_1 x_2) \equiv a_x^n \equiv \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i x_1^{n-i} x_2^i \equiv x_2^n \bar{f}(x), \quad \left(x = \frac{x_1}{x_2}\right),$$

una forma binaria d'ordine  $n$ . Interpretando le  $x_1, x_2$  come coordinate omogenee di punto d'una retta  $r$ , la  $f=0$  rappresenta un gruppo  $G_n$  di  $n$  punti; se invece si considerano i coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_n$  come coordinate omogenee di punto in un  $S_n$ , ad ogni forma  $f$  rimane associato un punto  $F$ , che si può considerare come *immagine* di  $F$  o del  $G_n$  relativo.

In particolare ai gruppi  $G_n$  costituiti dai punti  $x=\lambda$  di  $r$  contati ciascuno  $n$  volte, corrispondono in  $S_n$  i punti d'una  $C^n$  razionale normale, le cui equazioni parametriche sono

$$(2) \quad \varrho a_i = (-1)^i \lambda^i, \quad \text{oppure} \quad \sigma a_i = (-1)^i x_1^i x_2^{n-i}, \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Nel seguito avremo bisogno di fissare su  $r$ , e quindi su  $C^n$ , un punto speciale; sceglieremo il punto improprio  $I(x=\infty; x_1=1, x_2=0)$  di  $r$ , il cui omologo su  $C^n(a_0=a_1=\dots=a_{n-1}=0, a_n=1)$  verrà indicato con  $U$ .

2. Se si trasforma  $f$  mediante una sostituzione lineare

$$(3) \quad x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \quad x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2,$$

(cioè, seguendo l'uso classico, se nella  $f$  al posto delle variabili si pongono

(<sup>1</sup>) Cfr. Lie (Scheffers), *Vorlesungen über continuerliche Gruppen* [Leipzig, Teubner, 1893], Cap. 23. Vedi anche la Memoria citata di Fano e il lavoro di Brusotti, *Sulla curva razionale normale dello spazio a quattro dimensioni* [Annali di Mat. (3), IX (1904), pp. 311-352].



le forme lineari dei secondi membri) se ne deduce una nuova forma dello stesso ordine  $f'$ , che eguagliata a zero rappresenta su  $r$  il gruppo  $G'_n$  trasformato di  $G_n$  mediante la proiettività  $\pi$  rappresentata dalla sostituzione lineare inversa della (3). Poichè i coefficienti  $a'_i$  di  $f'$  sono forme lineari nelle  $a_i$ , così alla proiettività  $\pi$  di  $r$  resta associata una proiettività  $\Pi$  di  $S_n$ , che muta il punto  $F$  immagine di  $f_n$  nel punto  $F'$  immagine di  $G'_n$ ; e quindi trasforma in se stessa la  $C^n$ .

Insomma, come del resto è ben noto, al gruppo  $\gamma$  delle  $\infty^3$  proiettività di  $r$ , si viene in tal modo ad associare il gruppo  $\Gamma$  delle  $\infty^3$  proiettività di  $S_n$  che mutano in sè la  $C^n$ . In particolare al sottogruppo  $\omega$  delle similitudini di  $r$  risponde un sottogruppo  $\infty^2, \Omega$ , di  $\Gamma$ , costituito da tutte le proiettività di  $\Gamma$  che lasciano fisso  $U$ , e che brevemente denomineremo *gruppo delle similitudini di  $C^n$* .

3. Sia ora

$$(4) \quad \Phi(x_1 x_2) \equiv \sum_{i=0}^m \varphi_i(a_0 a_1 \dots a_n) x_1^{m-i} x_2^i \equiv x_2^m \bar{\Phi}(x),$$

una *forma invariantiva* di grado  $l$  nei coefficienti di  $f$ , e d'ordine  $m$  nelle variabili, cioè un *covariante* se  $m > 0$ , un *invariante* se  $m = 0$ . Fissate le  $a_i$ , la  $\Phi = 0$  rappresenta su  $r$  un  $G_m$  covariante proiettivo del  $G_n$  ( $f = 0$ ); se invece si fissano le  $x_1, x_2$  e quindi un punto  $P$  di  $C^n$ , la  $\Phi = 0$  rappresenta una ipersuperficie  $\mathcal{A}_P$  di  $S_n$  variabile con  $P$  in un sistema  $\Sigma, \infty^1$ , d'indice  $m$ .

Se  $m = 0$  tutte le  $\mathcal{A}_P$  coincidono in un'unica ipersuperficie  $\mathcal{A}$  invariante per le trasformazioni di  $\Gamma$ . Questa interpretazione degli invarianti è ben nota, come lo sono le  $\mathcal{A}$  corrispondenti agli invarianti più semplici. Così la  $V_{n-1}$  degli  $S_{n-2}$  osculatori di  $C^n$  corrisponde al *discriminante* di  $f$ , la *quadrica di Clifford* al noto invariante quadratico delle forme d'ordine pari, ecc. In generale ogni  $V_{n-1}$  che sia definita da date relazioni proiettive con  $C^n$ , ha una equazione nelle  $a_i$  che si ottiene eguagliando a zero un invariante di  $f$  <sup>(1)</sup>.

4. Ritorniamo ora al caso generale. Ognuna delle  $\mathcal{A}_P$  è evidentemente mutata in sè dalle  $\infty^2$  trasformazioni di  $\Gamma$  che lasciano fisso  $P$ ; in particolare la  $\mathcal{A}_U$  è dunque invariante per il gruppo delle similitudini di  $C^n$ .

Poichè l'equazione di  $\mathcal{A}_U$  si ottiene eguagliando a zero il *primo coefficiente*  $\varphi_0$  di  $\Phi$ , così la forma  $\varphi_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$  che d'ora in poi indicheremo con  $\varphi$ , cioè colla lettera minuscola corrispondente al simbolo del covariante, è invariante per le trasformazioni di  $\Omega$ , cioè, secondo la denominazione classica, è un *seminvariante* di  $f$ .

(1) Per  $n = 4$  cfr. le Memorie citate di Fano e Brusotti.

Viceversa, dato un seminvariante  $\varphi$ , cioè una  $\mathcal{A}_v$  invariante per le trasformazioni di  $\Omega$ , applicando a  $\mathcal{A}_v$  le trasformazioni di  $\Gamma$ , se ne deduce un sistema  $\Sigma$  di  $\infty^1$  ipersuperficie  $\mathcal{A}_p$  ciascuna delle quali è mutata in sé dalle  $\infty^2$  trasformazioni di  $\Gamma$  che lasciano fisso il punto P di  $C^n$ ; e quindi un covariante di  $f$ .

Ne segue il noto teorema classico: *Ogni covariante d'una forma binaria è individuato dal suo primo coefficiente o termine principale  $\varphi$  (source, Leitglied, leading term).*

La condizione imposta a  $\varphi = 0$ , cioè a  $\mathcal{A}_v$ , d'essere invariante per le trasformazioni di  $\Omega$ , si trasforma facilmente in condizioni formali espressive. Basta applicare a  $\varphi = 0$  le trasformazioni infinitesime di  $\Omega$ ; e si vede allora che  $\varphi$  è caratterizzato dall'essere funzione isobarica delle  $a_i$  soddisfacente all'equazione differenziale caratteristica

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n i a_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0.$$

Analisi matematica. — *Sur les ensembles parfaits présentant le caractère (A)*. Nota di ARNAUD DENJOY, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

Les définitions et résultats contenus dans ma précédente Note <sup>(1)</sup>, permettent d'établir le théorème suivant:

V. Si P possède la caractère (A), il existe, quels que soient: 1°) M sur P; 2°) la longueur  $4l \leq 4(b-a)$  d'un segment AB de milieu M, il existe deux points de P appartenant au segment AB, et dont la distance est  $l$ .

Soient respectivement  $u$  et  $v$  les plus grands intervalles contigus à P ayant des points, le premier à l'intérieur de AM, le second à l'intérieur de MB. Soit, par exemple,  $u$ , ou  $a_1\alpha$ , le plus petit des deux (ou l'un des deux, s'ils sont égaux). Si  $u \geq l$ , le théorème à démontrer résulte de la proposition II. Supposons donc  $u < l$ .

Soit  $v_1$  l'intervalle contigu situé sur le segment MB, et le plus près possible de  $u$ , et au moins égal à  $u$  en longueur.  $v_1$  peut coïncider avec  $v$ . Si le segment  $\alpha\beta_1$ , séparant  $u$  de  $v$ , vaut au moins  $l$ , la proposition V résulte du théorème I<sup>bis</sup>. Supposons cette distance inférieure à  $l$ . Alors, puisque  $\beta_1$  est en M ou à sa droite,  $\alpha$  est à droite du milieu  $A_1$  de AM, et, d'après  $a_1\alpha < l$ ,  $a_1$  est intérieur au segment AM. Le segment  $Aa_1$

(1) V. questi Rendiconti, pag. 291.

ne contient pas de contigu ni de semi-contigu supérieur à  $u$ . D'ailleurs  $u < l < A\alpha_1$ . Donc il existe (proposition III) deux points  $\gamma, \delta$  de  $P$ , contenant entre eux  $u$  et dont la distance est  $l$ .  $\gamma$  est à gauche de  $\alpha$ , donc de  $M$ . Donc  $\delta$  est à gauche de  $B_1$ , milieu de  $MB$ .  $\delta$  est à droite de  $\alpha_1$ , donc de  $A_1$ . Donc  $\gamma$  est à droite de  $A$ . Donc  $\gamma$  et  $\delta$  appartiennent au segment  $AB$ .

Le théorème V est démontré dans tous les cas.

Donnons un exemple général d'ensemble parfait  $P$  auquel s'appliquent les considérations précédentes.

Supposons que  $P$  satisfasse à cette condition, que si  $M$  et  $M'$  sont deux quelconques de ses points, il existe sur  $P$ , d'un côté ou de l'autre de  $M$ , un point  $M''$ , tel que  $\text{dist. } MM'' < \text{dist. } MM' \leq 2 \text{ dist. } MM''$ . [Le coefficient 2 pourrait être remplacé par la racine réelle (et positive) de l'équation  $t^3 - t^2 - t - 3 = 0$ ].

Je dis que  $P$  possède le caractère (A).

Sinon, il existerait deux intervalles contigus,  $u$  ou  $\alpha_1\alpha$ ,  $v$  ou  $\beta b_1$ , tels que  $\alpha\beta$  fût inférieur à  $u$  et à  $v$ . Supposons par exemple  $0 < \beta - \alpha < u \leq v$ . On montre immédiatement, en plaçant  $M'$  en  $\alpha_1$  ou en  $b_1$ , et  $M$  sur le segment  $\alpha\beta$ , que le segment ayant même milieu que  $\alpha\beta$ , et égal à son tiers, est (entièrement) intérieur à un contigu  $a_2b_2$  de  $P$ . Mais alors, il est visible que, si l'on place  $M$  en  $\alpha$  et  $M'$  en  $b_2$ ,  $M''$  n'existe pas.

Les méthodes employées dans ma précédente note permettent de démontrer le théorème suivant:

Supposons que: 1°)  $P$  et  $P'$  sont deux ensembles parfaits présentant le caractère (A); 2°)  $u$  et  $v$  sont deux intervalles contigus ou semi-contigus à  $P$ , séparés par le segment  $\alpha\beta$ , et non surpassés en longueur par aucun des contigus à  $P$  situés sur  $\alpha\beta$ ; 3°)  $u', v', \alpha'\beta'$  ont des définitions et des propriétés analogues relatives à  $P'$ ; 4°) au cas où  $\beta' - \alpha' \neq \beta - \alpha$  et si par exemple  $\beta' - \alpha' > \beta - \alpha$ , l'un (le plus grand, s'ils sont inégaux) des deux intervalles  $u'$  et  $v'$  est au moins égal à tout contigu de  $P$  situé sur  $\alpha\beta$ ;

sous ces conditions suffisantes, si  $x$  et  $y$  désignent respectivement les abscisses d'un point quelconque de  $P$  situé sur  $\alpha\beta$ , et d'un point quelconque de  $P'$  situé sur  $\alpha'\beta'$ , l'ensemble des nombres  $y - x$  forme un segment continu.

APPLICATION. — Supposons que: 1°)  $P$  présente le caractère (A); 2°) si  $u$  et  $v$  sont deux contigus ou semi-contigus de  $P$  séparés par  $\alpha\beta$  et tels que tous les contigus compris entre  $u$  et  $v$  sont au plus égaux, d'une part à  $v$ , d'autre part à  $\left| \frac{p}{q} \right| u$ , si  $|p| \leq |q|$ ;

sous ces conditions suffisantes,  $x$  et  $y$  désignant les abscisses de deux points quelconques de  $P$  situés sur  $\alpha\beta$ , et  $p$  et  $q$  deux nombres indépendants de  $x$  et de  $y$ , l'ensemble des nombres  $px + qy$  est un segment continu.

L'une des configurations les plus intéressantes présentant le caractère (A) est celle de l'ensemble parfait classique de Cantor, obtenu en extrayant d'un segment *ab* l'intervalle occupant le tiers médian de *ab*, en opérant ensuite de même sur chacun des deux segments restants, et en continuant indéfiniment ainsi. Les démonstrations peuvent en ce cas s'appuyer sur l'expression des points de  $P_0$  dans le système numérique de base 3.

Mineralogia. — *Nuova giacitura di minerali presso Roma.*  
Nota dell'ing. ENRICO CLERICI, presentata dal Corrisp. F. MILLO-SEVICH.

Le escavazioni per le cave di ghiaia, ora abbandonate, nella valle ad est del monte della Farnesina e lungo la strada d'allacciamento della via Flaminia con la via Cassia mostrano un grosso strato di calcare terroso, talvolta potente 3 a 4 m., che spicca, per il suo bianco colore, fra le soprastanti sabbie marnoso-argillose grigie o giallastre con vestigia di molluschi limnici e le sottostanti sabbie cenerognole con le quali termina superiormente il giacimento di ghiaia, rinomato per i resti di mammiferi della nota fauna quaternaria detta di Ponte Molle. Nella collinetta a sinistra del fosso la Crescenza, presso il Sepolcro dei Nasoni, il calcare giace su materiale tufaceo marnoso con molluschi limnici, diatomee e potamospongie.

Per solito tale calcare si sgretola facilmente, fra le dita, in polvere sabbiosa, arida al tatto. Il colore è generalmente bianco, con puntini bruno-nerastri, ferruginosi e manganesiferi <sup>(1)</sup>. In acido cloridrico diluito fa viva effervescenza, ma non vi si scioglie completamente. L'inaspettato contenuto del residuo, in tutti i saggi, ne richiedeva il dosamento. Tre campioni medi di 50 grammi ciascuno, mi hanno dato:

- |                                                         |         |
|---------------------------------------------------------|---------|
| 1. Farnesina, correzione strada sotto la ferrovia . . . | 9,78 %  |
| 2. Valle ad est del Monte della Farnesina . . .         | 13,62 % |
| 3. Collinetta presso il Sepolcro dei Nasoni . . .       | 15,13 % |

Nel residuo può distinguersi una parte d'aspetto sabbioso, che si depone rapidamente nell'acqua di lavatura; ed altra parte, molto tenue, quasi gelatinosa, di lentissima deposizione. Lavato e disseccato, il residuo presentasi come massa bianca sfarinabile fra le dita, cui aderisce. Quello proveniente da calcare giallognolo è più o meno colorato da sequiossido di ferro.

(<sup>1</sup>) Isolati dalla roccia e fusi con soda e nitro danno massa verde (Mn): immessi, sul portaoggetti, in una goccia di acido iodidrico questo assume intensa colorazione giallo-rossastra e, tirando a secco su fiammella, si hanno minutissimi cristalli e raggruppamenti dendriformi rossi, deliquescentissimi in liquido che col tempo si scolora (Fe).



Al microscopio si ravvisano subito due componenti, in quantità all'incirca uguale. L'indice di rifrazione, valutato col metodo dell'immersione, e poi la separazione mediante il mio liquido al formiato-malonato di tallio ne hanno permesso, senz'altro, la determinazione. L'uno è baritina, l'altro fluorite.

La baritina si presenta in cristalli o in raggruppamenti di più cristalli mal conformati, biancastri, torbidi, con indice prossimo a quello della bromonaftalina ed estinzione retta, che ricristallizzano dall'acido solforico concentrato e caldo. Fusa con soda e ben lavata, la sua soluzione cloridrica colora in verde la fiamma, anche quando fu separata per semplice levigazione.

La fluorite a primo aspetto sembra in frammenti informi, incolori, ialini, isotropi, d'indice minore di quello del cloruro di etilene e prossimo all'essenza di ruta. Con acido solforico si ha sviluppo di acido fluoridrico e produzione di cristalli di gesso. Alla fluorite attribuisco la totalità, o quasi, della parte finissima del residuo, il cui comportamento non differisce da quello del fluoruro di calcio che, per confronto, ho appositamente preparato per doppio scambio.

Con più diligente osservazione al microscopio e opportuna illuminazione, ho potuto assicurarmi che molti dei creduti frammenti sono cristalli deformi e incompleti e gruppi di cristalli in associazione parallela e cristallitica o dendritica, di abito ottaedrico. Ho anche veduto ottaedri completi e nitidi. Mancano quelle bizzarre produzioni microialitiformi che constatai nella fluorite degli inclusi contenuti nelle pozzolane romane. Numerosi vuoti, lasciati verosimilmente da lunghi cristalli bacillari, l'attraversano in tutti i sensi.

Stritolata la roccia fra le dita, ne risultano innumerevoli piastrine a contorno esagonale, con spigoli più o meno arrotondati, isolate o variamente raggruppate, otticamente uniassi con croce negativa in luce polarizzata convergente. Bollite con soluzione di nitrato di cobalto si comportano come la calcite; in bromo-formio galleggiano fino a 75° C. Sono gremite di lunghi prismi sottili, o loro impronta, come nella fluorite, adagiati in tutti i sensi, che ricordano i cristalli bacillari ottenibili da una soluzione di solfato di calcio, ma la constatazione diretta non mi è stata possibile.

Alcune piastrine sono molto grandi, a contorno floreale, formate dalla unione di più lamelle; lavate con acqua acidulata, si lasciano meglio attraversare dalla luce e dànno più nitida la figura di polarizzazione, mutevole, con svariate apparenze, anche con la sola traslazione. In luce polarizzata parallela con interposta lamina di gesso, il campo è scompartito a zone e triangoli di diverso colore per ripetute geminazioni. Oltre le inclusioni allungate, altre se ne intravedono che possono essere isolate distruggendo le piastrine con qualche goccia d'acido e sono di baritina e di fluorite.

Le notizie che si hanno sulla esistenza di questi minerali nel Lazio

sono molte scarse, se si prescinde dalla Tolfa ove la fluorite è associata ai minerali metalliferi dei filoni e la baritina accompagna talvolta l'allumite.

Lavinio de' Medici Spada trovò due volte la baritina « nelle cavità delle lave di Capo di Bove in frequenti cristallucci aggruppati d'incerta forma, ora biancastri, ora volgenti al verde mare » che riconobbe in seguito ad appositi saggi <sup>(1)</sup>.

Un pezzo di leucitite con baritina cristallizzata fu raccolto ad Acquacetosa sulla via Laurentina e donato al Museo mineralogico dell'Università di Roma dall'ing. Arnaldo Corsi.

Io la rinvenni in cristalli microscopici disseminati nel calcare liasico di Casale S. Angelo presso Tivoli (« Boll. Soc. Geol. It. », 26, 1907, p. 461).

Il Petrini cita, senza altra indicazione, lo « spato fluore informe di colore celeste » fra i minerali che si rinvengono nelle lave di Capo di Bove <sup>(2)</sup>.

Il Morichini, analizzando lo smalto di un dente molare fossile di elefante trovato nelle vicinanze di Roma, vi rinvenne anche il fluoruro di calcio, e così per primo dimostrò la presenza del fluoro nelle sostanze di origine animale (« Mem. di mat. e fisica d. Soc. It. d. Scienze », Modena, X, 1803, parte 1<sup>a</sup>, pag. 166; XII, 1805, parte 2<sup>a</sup>, pag. 73).

Arcangelo Scacchi, che aveva scoperto la fluorite nei tufi della Campania, la trovò anche in campioni provenienti dalla pozzolana delle cave alle Tre Fontane ed a S. Sebastiano (Rend. Accad. sc. fis. e mat., Napoli, I, 1887, pag. 19).

Io potei constatarla in molte altre località pozzolanifere, ove gli inclusi la contengono allo stato microialitiforme, e ne ho riferito brevemente alla Società Geologica Italiana nelle adunanze del 1918 e 1919.

Emerge pertanto da queste notizie che la giacitura dei detti minerali è affatto diversa da quella ora descritta. Qui trattasi di una roccia formata per deposizione chimica nelle acque di un bacino del tutto isolato, o al riparo da sensibile immissione di torbide che vi avrebbero portato abbondanti minerali provenienti dal dilavamento di rocce vulcaniche, come di fatti è avvenuto nelle rocce sottostanti e soprastanti <sup>(3)</sup>, ed è implicitamente da escludere che la baritina e la fluorite siano di trasporto. Si formò prima la selenite e poi la fluorite e la baritina cui la calcite, avvolgente e più abbondante, faceva ostacolo alla regolare conformazione dei cristalli.

<sup>(1)</sup> *Sopra alcune specie minerali non in prima osservate nello Stato pontificio.* Raccolta di lettere, ecc. del Palomba, anno 1<sup>o</sup>, Roma, 1845, pag. 116.

<sup>(2)</sup> *Gabinetto mineralogico del Collegio Nazareno*, tomo 2<sup>o</sup>, pag. 320, Roma, 1792.

<sup>(3)</sup> Nella valle ad est della Farnesina, al piano di posa, e al Sepolcro dei Nasoni il calcare contiene anche rari cristalli e cristalliti di augite verdognola appartenenti a scorie vulcaniche disgregate, i cui residui si colorano fortemente con blu metilene e con safranina.

Come vi sono attualmente sorgenti di acque minerali che contengono fluoruri, forse più frequentemente di quanto si creda, e tracce di composti di bario, oltre al solfato ed al bicarbonato di calcio, così penso che il supposto bacino fosse alimentato da una di tali sorgenti, sia pure un po' più ricca di sostanze fluorifere e baritifere, e che quei minerali si siano formati in condizioni di temperatura non dissimili da quelle ordinarie.

Chimica. — *Alcune trasformazioni del triossimetilene*. Nota del dott. ANGELO CONTARDI, presentata dal Socio KÖRNER.

In Note precedenti mi ero occupato della origine e della sintesi dell'*inosite* e della *fitina* nelle piante (<sup>1</sup>).

I risultati delle mie ricerche concludevano che la *fitina* era un sale di calcio e di magnesio dell'etere esafosforico dell'inosite, ed era da escludersi che essa fosse, come riteneva il Posternak (<sup>2</sup>), il sale degli stessi metalli e coll'acido anidro ossimetilendifosforico.

L'acido fosforico, o meglio i fosfati acidi, provenienti dal terreno, potevano, per altro, durante la fotosintesi clorofilliana, determinare la polimerizzazione della formaldeide ad inosite e la contemporanea esterificazione a *fitina*.

Già ricerche eseguite sopra alcune piante avevano messo in forte dubbio tale possibilità.

È noto infatti che il Maquenne dalle foglie del noce otteneva, per semplice estrazione con acqua, notevoli quantità di inosite (<sup>3</sup>), dai frutti della stessa pianta, prima della maturanza ed anche a maturazione completa io ottenni piccole quantità di inosite ma non ebbi *fitina*. Nei semi di *camerops exelsa* esiste inosite, ma non *fitina*; così anche nella *musa ensete* (foglie e fusto), sia nei primi periodi della vegetazione, sia alla fine della vita della pianta, si riscontra inosite e non *fitina*.

Ciò proverebbe adunque che l'inosite trae la sua origine dalla sintesi clorofilliana direttamente, senza che sia necessario il passaggio attraverso all'etere fosforico.

Io ho voluto ad ogni modo studiare quale fosse l'azione dell'acido fosforico concentrato sopra l'aldeide formica secca e gassosa (<sup>4</sup>), e dimostrai a suo

(<sup>1</sup>) A. Contardi, Rendiconti R. Accademia Lincei, vol. XVIII, pag. 64; vol. XIX, pag. 25; Gazz. Chim. Ital., vol. XLII, parte I, pag. 408; Natura, vol. I (1910).

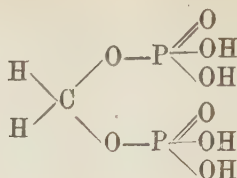
(<sup>2</sup>) Posternak, Revue gen. de Bot., tom. XII (1900).

(<sup>3</sup>) Maquenne, Bul. Soc. Chim. (47), 1887, pag. 290.

(<sup>4</sup>) A. Contardi, Rendiconti della Società Chim. Ital. (1912), fasc. XIII.



tempo che si forma l'acido metilendifosforico:



A tale acido si giunge anche assai facilmente riscaldando in tubo chiuso l'acido fosforico puro colla quantità calcolata di triossimetilene ad una temperatura di 140°-145°.

I sali dell'acido metilendifosforico non possiedono più le proprietà anti-fermentative caratteristiche dell'aldeide formica, ed il sale di potassio, ad esempio, può sostituire il fosfato dello stesso metallo nei liquidi nutritivi ordinariamente impiegati per le colture dei fermenti alcoolici. Inoltre i sali dei metalli alcalino-terrosi, riscaldati a 400° svolgono aldeide formica quantitativamente e lasciano come residuo il pirofosfato del metallo.

Tali fosfati organici potrebbero quindi, qualora realmente si formassero nelle piante, essere scambiati coi fosfati acidi.

Non potendo giungere per questa via a composti che abbiano colla fitina qualche rapporto tentai un nuovo mezzo di polimerizzazione dell'aldeide formica e cioè riscaldai il triossimetilene nel vuoto alla temperatura di 140°-145° sottoponendo i vapori dell'aldeide formica secchi alla scarica oscura. La scarica elettrica oscura non ha azione sull'aldeide, ma invece il prolungato riscaldamento ad una temperatura così elevata trasforma la formaldeide in metilalio, formiato metilico, acido formico, anidride carbonica, acqua e, per il 51 % del triossimetilene impiegato, si ottiene il *metilenitano* del Butlerow, che, come si sa, è una miscela di anidridi di zuccheri.

Da ciò risulta che per ottenere dalla formaldeide sostanze del tipo degli zuccheri non è necessaria la presenza dell'acqua in grandi masse, come aveva ammesso il Loew<sup>(1)</sup>, ma l'aldeide formica stessa, secca e gassosa, sotto pressione ed a caldo, si polimerizza dando sostanze zuccherine a sei atomi di carbonio. Questi esosi all'atto della loro sintesi perdono una molecola d'acqua pro molecola dello zucchero, generando anidridi interne. Anche in questo caso adunque l'aldeide formica non si polimerizza ad inosite.

Dalle ricerche del Bartoli<sup>(2)</sup>, da quelle del Rénard<sup>(3)</sup>, del Löb<sup>(4)</sup>, del Löb e Pulvermacher<sup>(5)</sup>, risulta che l'ossidazione elettrolitica degli alcoli

(1) Loew, Journal für praktische Chemie (33), pag. 325 (1886); (34), pag. 51 (1886).

(2) Bartoli e Papadopoli, Gazz. Chim. Ital., vol. XIII (1883), pag. 342.

(3) Rénard, Ann. (5), 17, pag. 313.

(4) Löb, Centr. Blatt., 1909, pag. 1807 (I).

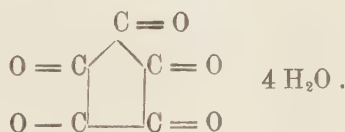
(5) Löb e Pulvermacher, Centr. Blatt., 1909, pag. 1925 (I).



polivalenti a catena aperta e di alcuni zuccheri conduce in generale da prima all'aldeide contenente un atomo di carbonio in meno mentre si genera sempre formaldeide, essa alla sua volta in molti casi dà luogo al triossimetilene ed al *metilenitano*.

Io ho voluto provare se con questo mezzo di ossidazione l'inosite o la fitina generassero formaldeide o suoi derivati.

L'inosite sottoposta ad ossidazione elettrolitica in soluzione solforica al 20 % con una densità di corrente di 7,5 ampèr per dm<sup>2</sup>, mantenendo l'anodo di platino ad una temperatura di 25°, dà, come prodotti di ossidazione, ossido e biossido di carbonio, poco acido ossalico ed una discreta quantità di acido leuconico:



Non si forma affatto aldeide formica.

La fitina, ossidata elettroliticamente in mezzo acido per acido solforico, dà, accanto ad ossido e biossido di carbonio, acido ossalico ed acido leuconico.

Perciò anche in questo riguardo l'inosite si scosta dagli altri alcoli polivalenti a catena aperta.

Ripetei l'ossidazione dell'inosite con acido nitrico che, come è noto, fu già da tempo fatta dal Maquenne (loc. cit.), e pur seguendo le prescrizioni da lui date in proposito, giunsi a risultati molto diversi da quelli ottenuti dal sopradetto autore.

Il Maquenne dall'ossidazione dell'inosite con acido nitrico ottiene l'acido ossalico, il tetraossichinone, l'acido rodizonico, il trichinoile e l'acido croconico; io non ebbi invece che piccole quantità di acido ossalico, il prodotto principale è acido leuconico. Del resto ciò era facilmente prevedibile date le condizioni in cui si opera e l'instabilità del tetraossichinone, dell'acido rodizonico, del trichinoile dell'acido croconico, che, a caldo, in presenza di acido nitrico, diventano tutti acido leuconico, come già dimostrarono il Nietski ed il Benkiser<sup>(1)</sup>.

Il mezzo più facile ed economico oggi per preparare acido leuconico è precisamente quello di ossidare l'inosite con acido nitrico concentrato a bagno maria e, dopo evaporato l'acido, estrarre il prodotto bianco risultante con alcool assoluto, onde togliere l'acido ossalico, indi lavare il residuo con etere ed essicare la massa rimanente nel vuoto.

La fitina e l'acido inosit-esafosforico naturale od artificiale per ossidazione con acido nitrico forniscono acido leuconico ed ossalico. La separa-

(<sup>1</sup>) Nietzki e Benkiser, Ber., 19 (1886), pag. 293.

zione del primo di questi acidi, come anche nel caso dell'ossidazione elettrolitica, riesca, specialmente per la fitina, assai difficile ed a ogni modo non quantitativa per la contemporanea presenza dell'acido fosforico, del calcio e del magnesio.

L'acido leuconico dà infatti sali con questi due metalli alterabili coll'ebullizione e trasformabili in sali dell'acido croconico ed idroleuconico, i quali sono solubili negli stessi solventi dei fosfati.

Nell'organismo animale la fitina e l'inosite che vengono introdotte quotidianamente cogli alimenti forse possono subire una ossidazione analoga a quella sopra esposta, ad ogni modo tutto lascia credere che essa sia diversa da quella degli zuccheri e degli alcoli polivalenti.

A noi è finora ignota la funzione della inosite nell'organismo, ma siccome essa entra come costituente costante nell'organismo stesso, così deve avere un ufficio importante nelle funzioni vitali: io ho in corso altre esperienze rivolte allo scopo di migliorare la conoscenza chimica di questa sostanza specialmente in quanto riguarda la vita degli animali e delle piante.

**Patologia vegetale.** — *La forma ascofora della Rhacodiella castaneae, agente del nerume delle castagne* <sup>(1)</sup>. Nota del dott. B. PEYRONEL, presentata dal Socio R. PIROTTA.

In un precedente lavoro <sup>(2)</sup> ho stabilito, fra l'altro, l'esatta morfologia e la sistematica della *Rhacodiella castaneae* (Bain.) Peyronel, forma conidica del fungo che produce la grave e diffusa alterazione delle castagne nota sotto il nome di « nerume » o « marciume nero ». Ho dimostrato che questo fungillo non ha che vedere col *Rhacodium cellare* — al quale, però, si avvicina moltissimo pei caratteri morfologici del suo micelio — e che esso è invece da identificarsi colla *Harziella castaneae* Bainier. Il genere *Harziella* appartenendo, però, alla famiglia delle Mucedinaceae, cioè degli Ifomicetialiini, mentre l'agente del nerume delle castagne è caratterizzato dalla produzione d'un abbondantissimo micelio fuligineo, ho creduto necessario creare per quest'ultimo il genere *Rhacodiella*, anche perchè mancano in esso i conidiofori bene evoluti propri del gen. *Harziella* e perchè — fatto sfuggito al Bainier — i conidi hanno origine endogena, si formano, cioè, nell'interno d'un conidiogeno, e solo in un primo tempo essi sono aggregati in glomeruli, mentre più tardi sono distintamente catenulati.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

<sup>(2)</sup> B. Peyronel, *Sul nerume o marciume nero delle castagne*, in Le Stazioni sperimentali agrarie italiane, vol. LII, 1919, da pag. 21 a pag. 41.

Un fatto di primaria importanza, che non era stato ancora osservato, e sul quale credo opportuno d'insistere, fu da me posto in chiaro nel lavoro sopra citato, ed è la trasformazione in masse sclerotiche sia dei cotiledoni delle castagne, sia dei sustrati solidi di coltura, allorchè il fungo si sviluppa in ambiente poco umido. « Tutto il seme può così venir trasformato in un vero sclerozio, conservante perfettamente la forma primitiva, ma in cui i tessuti dei cotiledoni e dell'embrione sono stati divorati dal fungo » (loc. cit., pag. 24). « Più di rado si formano alla superficie dei cotiledoni, sotto lo spermoderma, sclerozi simili per aspetto e per struttura, benchè generalmente più piccoli, a quelli della *Botrytis cinerea* e che rendono la superficie esterna della castagna più o meno bernoccoluta. Tali sclerozi si sviluppano talora anche nella camera intercotiledonare o ancora alla superficie della buccia della castagna » (loc. cit., pag. 25).

A completare le nostre conoscenze sul ciclo di sviluppo del fungo, restava ora da scoprire la sua forma superiore o perfetta, ascofora o, eventualmente, basidiofora. A questo scopo tesero i miei sforzi in questi ultimi anni e furono ora finalmente coronati da successo. Fin dall'epoca delle mie prime ricerche (1916-17) avevo fatto delle colture del fungo sopra svariati sustrati solidi e liquidi, entro recipienti piuttosto grandi, sottoponendole poi a svariate condizioni d'ambiente. Nell'autunno 1918 da una vecchia coltura istituita nel dicembre 1916 ottenni numerosi abbozzi della forma perfetta sotto forma di cordoni cilindrici, nero-fuliginei, grossi 0,5-1 mm., tortuosi, scorrenti tra il sustrato parzialmente disseccato, sclerotizzato, annerito, e la parete del recipiente, oppure innalzantisi dalla superficie del sustrato stesso.

Questi abbozzi, a dire il vero, facevano pensare più ad una *Xylaria* o ad una *Tiphula* che non alla forma che dovevo più tardi ottenere. Il sustrato sembrandomi eccessivamente asciutto e stentando gli abbozzi anzidetti a svilupparsi ulteriormente, introdussi nella coltura un po' d'acqua sterilizzata, ma disgraziatamente durante l'operazione penetrò anche qualche germe di *Penicillium* che, sviluppandosi sul fungo già indebolito, mandò a male ogni cosa. Rinnovate nel novembre dello scorso anno le colture, da una di queste, su agar di pane, ottenni finalmente nello scorso ottobre la forma ascofora del fungo: si tratta d'un Discomicete della famiglia delle Pezizacee, e più precisamente del genere *Sclerotinia*.

Gli apoteci, o corpi fruttiferi, sorgono numerosi, a gruppi, dalla superficie del sustrato ricoperta del denso feltro fuligineo formato dal micelio afflosciato; alcuni erompono tra la parete vitrea del recipiente e il sustrato alquanto contratto. Essi si presentano dapprima sotto forma di bastoncini tortuosi, fuligineo-neri, attenuati e più chiari all'apice, i quali presentano uno spiccato fototropismo positivo e s'incurvano tutti verso la parete del recipiente più illuminata. Ad un certo punto l'apice dei bastoncini comincia ad ingrossarsi a clava facendosi sempre più pallido, poi si apre a coppa



mettendo a nudo la superficie imeniale o disco, ed il tutto assume la forma d'una tuba o tromba romana, ossia d'un imbuto attenuantesi gradatamente in un lungo gambo; poi il disco s'allarga sempre più, facendosi più svasato, patelliforme, e in ultimo il suo margine finisce per ondularsi ed incresparsi assai elegantemente. La superficie del disco è liscia, di color cuoio chiaro o di cero sporco, la superficie esterna dell'eccipolo è appena più scura e dapprima leggermente pubescente, poi pruinoso; lo stipite flessuoso è superiormente fuligineo scuro, inferiormente quasi nero, lievissimamente puberulo, alla fine solcato-striato. La consistenza del fungo è carnoso-ceracea, alquanto maggiore nello stipite. Questo è lungo dai 4 ai 6 cm. e più, e grosso alla base 0,5-1 mm., mentre nella parte superiore s'ingrossa gradatamente fino a raggiungere anche i 3 mm. circa. Il disco dell'apotecio raggiunge facilmente il diametro di 8 mm. Gli aschi sono cilindraceo-clavati, troncati all'apice, ove presentano un poro che diventa bleu sotto l'azione della soluzione iodo-potassica; misurano 120-180, in media 150  $\mu$  di lunghezza per 6-7,5  $\mu$  di grossezza. Gli sporidi, in numero di otto, sono disposti obliquamente in una sola fila nella parte superiore dell'asco: essi sono ellittici od oblungo-ovati, ialini, e misurano 10-13  $\times$  4,5-6. Le parafisi, numerose, sono alquanto più lunghe degli aschi, settate, filiformi, gradatamente ingrossate verso l'apice, ove raggiungono il diametro di 3-3,5  $\mu$ . L'eccipolo ha struttura lassamente pseudoparenchimatrica, a cellule rotondegianti, e possiede un margine frangiato, formato da filamenti simili alle parafisi. Lo stipite ha struttura prosenchimatrica.

Pei caratteri sopra elencati, il fungillo viene facilmente classificato per una autentica *Sclerotinia*. Nessuna specie di questo genere nè degli affini (*Ciboria*, *Helotium*, *Phyalea*, ecc.) è indicata nella *Sylloge fungorum* di Saccardo per le castagne, ed in quanto alle poche viventi sui ricci, esse sono affatto diverse.

Mi sarebbe perciò facile, s'io volessi seguire l'andazzo purtroppo dominante fra i passati e moderni micologi, istituire una specie nuova, una *Sclerotinia castaneae*. Ma convinto che delle 80,000 specie circa di funghi finora descritte, due terzi, a metter poco, sono specie artificiali, sembrami più opportuno identificare, almeno provvisoriamente, il nostro fungillo colla *Sclerotinia pseudotuberosa* Rehm, benchè questa sembri scostarsene per alcuni caratteri morfologici, specialmente della forma conidica, oltrechè per la matrice, sviluppandosi sulle ghiande cadute a terra, i cui cotiledoni essa trasforma in corpi duri, neri, dai quali nell'anno successivo sviluppa i suoi apoteci. Questa *Sclerotinia* fu osservata dapprima nella Germania, in Franconia e più tardi nella Marca di Brandeburgo, nonchè in Francia e nell'America del nord. Essa, secondo il Rehm<sup>(1)</sup>, per la sua capacità di distruggere i semi di quercia, sarebbe di una grande importanza forestale.

(<sup>1</sup>) Rehm, *Dscomyc*, pag. 809.



Ritengo che le differenze morfologiche, per le quali la *Sclerotinia* delle ghiande sembra scostarsi da quella delle castagne, siano da ascrivere ad una imperfetta conoscenza della prima, oltrechè all'estremo polimorfismo della specie, soprattutto nei suoi organi vegetativi. Comunque, spero di potere, mediante un accurato esame degli esemplari autoptici del Rehm, verificare la validità o meno di questo mio modo di vedere.

I risultati di tale indagine saranno, come spero, esposti in altro lavoro unitamente a quelli di ulteriori ricerche, già iniziate, sulla biologia e morfologia di questo interessante Eumicete.

**Chimica fisiologica.** — *Sui rapporti tra l'attività peptidolitica dell'erepsina intestinale e la costituzione chimica del substrato* <sup>(1)</sup>. Nota di A. CLEMENTI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

La scoperta dei polipeptidi e dei metodi per prepararli per sintesi ha aperto la via allo studio dell'intimo meccanismo d'azione dei fermenti proteolitici, poichè permette di analizzare l'azione che questi possono esercitare su di un substrato, che a differenza delle proteine o dei peptoni, ha una costituzione chimica perfettamente nota e a cui si possono apportare modificazioni esattamente definite. Le poche notizie che possediamo circa l'azione dei fermenti proteolitici sui polipeptidi la cui molecola abbia subito modificazioni strutturali, si riferiscono fondamentalmente alla tripsina [Fischer e Abderhalden (1905) e Bergell (1904)]; circa l'azione della erepsina intestinale su corpi la cui molecola possiede solo alcune delle caratteristiche strutturali dei polipeptidi, le nostre conoscenze sono assai deficienti; dalle nostre precedenti ricerche risulta, che la molecola della glicilglicina non è idrolizzata dalla erepsina intestinale quando il suo gruppo aminico libero sia trasformato in gruppo guanidinico. La mancanza di altre notizie sull'argomento mi ha indotto a studiare l'attitudine della erepsina intestinale a idrolizzare alcuni corpi, che presentano dal punto di vista del problema qui enunciato uno speciale interesse mancando nella loro molecola il gruppo aminico libero ed essendo presente il legame a mo' di ammidi  $\text{CO NH}$  caratteristico dei polipeptidi: i corpi che ho sottoposti alla analisi sono: la *colilglicina*, la *benzoilglicina*, la *bromisocapronilglicina*, la *glicilanidride*; il procedimento che ho adoperato differisce dai metodi adoperati in ricerche analoghe da altri autori; ho applicato il metodo della titolazione alla formaldeide di Schiff-Sorensen, che io per primo ho introdotto nello studio dell'azione dei fermenti peptolitici sui polipeptidi di sintesi, i cui vantaggi dal punto di vista quantitativo rispetto ai metodi di eterificazione e di estrazione usati preceden-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Roma.

temente ho rilevato in altri lavori. L'erepsina adoperata era ricavata dalla mucosa intestinale di cane (tranne nelle esperienze sulla iocolilglicina in cui fu impiegata mucosa intestinale di maiale) seguendo le indicazioni date dal Cohnheim.

Circa l'azione dei fermenti proteolitici sulla colilglicina e sulla taurilglicina esistono pochissime notizie; Abderhalden e Koerker in proposito affermarono, che il problema della capacità della erepsina intestinale di scindere l'acido glicocolico e l'acido taurocolico rispettivamente in glicocola o taurina e acido colalico è ancora insoluto. Nell'applicare il metodo della titolazione al formolo nelle mie ricerche mi sono fondato sul concetto che, la colilglicina reagisce come un corpo neutrale alla titolazione al formolo, mentre quando venga idrolizzata e venga messa in libertà la glicocola dovrà necessariamente comportarsi come un acido monobasico <sup>(1)</sup>.

Circa la scissione idrolitica dell'acido ippurico per azione di fermenti si hanno notizie contraddittorie. Schmiedeberg (1881) ammise l'esistenza di un fermento, che chiamò istozima, capace di idrolizzare l'acido ippurico; essa fu confermata da alcuni e negata da altri; secondo Nencki (1882) la tripsina pancreatica può scindere l'acido ippurico, mentre Gulewitsch (1889) negò questa tesi e Cohnheim negò che l'erepsina intestinale è capace di idrolizzare l'acido ippurico. Nessuna notizia esiste circa l'azione della erepsina sulla bromisocapronilglicina.

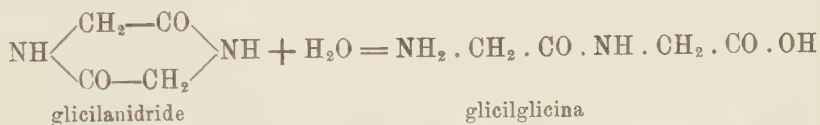
Alcuni dei dati assodati nelle nostre indagini sono visibile nella seguente tabella:

|                                             | QUANTITÀ<br>della sostanza<br>sottoposta<br>all'azione<br>dell'erepsina | DURATA<br>dell'azione<br>dell'erepsina | QUANTITÀ<br>di NaOH 1/10 n<br>adoperata<br>per la titolazione<br>al formolo |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
|                                             | mgr.                                                                    | giorni                                 |                                                                             |
| Colilglicina . . . . .                      | 232                                                                     | 20                                     | 0,2                                                                         |
| Id. . . . .                                 | 232                                                                     | 20                                     | 0,1                                                                         |
| Iocolilglicina . . . . .                    | 232                                                                     | 20                                     | 0,2                                                                         |
| Benzoilglicina . . . . .                    | 179                                                                     | 4                                      | 0,1                                                                         |
| Id. . . . .                                 | 358                                                                     | 4                                      | 0,2                                                                         |
| Ippurato di calcio + 1 cmc. NaOH 1/10 n . . | 219                                                                     | 2                                      | 0,1                                                                         |
| Ippurato di calcio + 2 cmc. NaOH 1/10 n . . | 219                                                                     | 2                                      | 0,1                                                                         |
| Ippurato di calcio . . . . .                | 219                                                                     | 5                                      | 0,3                                                                         |
| Bromisocapronilglicina . . . . .            | 116                                                                     | 2                                      | 0,3                                                                         |
| Id. . . . .                                 | 116                                                                     | 5                                      | 0,0                                                                         |
| Id. . . . .                                 | 116                                                                     | 6                                      | 0,1                                                                         |

(1) In base al principio suesposto ho elaborato un nuovo metodo di dosaggio degli acidi biliari nella bile (precipitazione dei proteici e titolazione al formolo dopo prolungata ebollizione con alcali); su questo nuovo metodo riferirò particolarmente in altro luogo.

In base alle mie esperienze credo di potere affermare che, nè la benzoil-glicina, la quale normalmente non è presente nel tubo intestinale, nè la colilglicina, che normalmente con la bile si versa dal fegato nell'intestino, subiscono un'azione idrolizzante da parte della erepsina intestinale e che la bromisocapronilglicina, a differenza della leucilglicina è resistente all'azione idrolizzante dell'erepsina intestinale.

Circa l'azione dei fermenti proteolitici sulla glicilanidride non esiste fin'ora alcuna ricerca. Curtius e Fischer dimostrarono che per azione di acidi minerali o di alcali a temperatura ordinaria e a determinate concentrazioni può avvenire l'apertura dell'anello della glicilanidride, secondo la seguente equazione:



Io ho ricercato se l'erepsina intestinale può esercitare un'analogia azione sulla glicilanidride. Nelle nostre esperienze abbiamo rilevato, che soluzioni acquose di glicilanidride dopo uno o due giorni di permanenza in termostato a 37° in presenza di toluolo e senza aggiunta di idrato di sodio presentavano una piccola quantità di azoto aminico titolabile al formolo e che in presenza dell'erepsina intestinale la quantità di azoto aminico titolabile subiva un lieve aumento, che però non superava il raddoppiamento: crediamo quindi di dovere riferire tale lieve aumento di azoto aminico in seguito alla aggiunta di erepsina intestinale alla scissione della glicilglicina formatasi precedentemente piuttosto che alla formazione di nuova quantità di glicilglicina e a ritenere, che l'erepsina non è atta a determinare l'apertura (per lo meno rapida) dell'anello dichetopiperazinico della glicilanidride.

Questi risultati posti in relazione con il comportamento che presenta la guanidoglicilglicina rispetto all'erepsina, da noi illustrato in precedenti ricerche, contribuiscono a dimostrare, che la soppressione o l'assenza o la parziale sostituzione del gruppo aminico libero della molecola dei polipeptidi o di corpi affini può determinare una speciale resistenza da parte del legame CO-NH, presente nella loro molecola, a subire l'azione idrolizzante dell'erepsina; la conoscenza dell'azione dell'erepsina estesa al massimo numero possibile di derivati di polipeptidi permetterà di stabilire, se tale resistenza rappresenti un carattere speciale dei derivati di alcuni polipeptidi o se invece sia una caratteristica generale dei derivati di tutti i polipeptidi nel loro comportamento rispetto all'erepsina.

L'importanza del problema, che scaturisce dalle nostre ricerche, si comprenderà facilmente, quando si pensi ai rapporti che esso può avere col fenomeno della resistenza delle proteine genuine all'azione idrolizzante dell'erepsina intestinale.

Anatomia patologica. — *Sul potere battericida della mucosa intestinale*. Nota riassuntiva del dottor UGO SOLI, presentata dal Socio B. GRASSI.

La notevole variazione quantitativa del contenuto batterico delle diverse porzioni del tubo digerente — stomaco, tenue, crasso, retto — è un fatto ormai altrettanto assodato quanto discusso nelle diverse cause che lo producono.

Infatti, per ciò che riguarda la spiegazione della relativa povertà della flora batterica dello stomaco, possiamo ritenere ormai come assodato che il succo gastrico è dotato di un notevole potere antibatterico; ma all'azione di quale sostanza — oltre l'acido cloridrico libero — ciò sia dovuto, non si sa con precisione.

Analogamente, per spiegare la diversità del contenuto microbico dei vari segmenti dell'intestino e in maniera particolare la straordinaria scarsità di germi del digiuno — ove si può, con una certa frequenza, trovare anche una sterilità assoluta — si sono tentate diverse spiegazioni, invocando fattori di natura meccanica (peristalsi intestinale), chimica (azione dei diversi succhi versati nell'intestino) e biologica.

Fra questi ultimi fu invocato in maniera particolare anche un vero e proprio *potere battericida della mucosa intestinale*, legato ad un'azione vitale dell'epitelio della mucosa stessa.

Schütz, introducendo una emulsione di vibroni di Metsch. nel duodeno di un cane, dopo tre ore vide che questi non erano più dimostrabili con la comune ricerca culturale, ma solo in seguito ad arricchimento con acqua peptonata.

Rolly e Liebermeister studiarono a fondo il problema, allo scopo di stabilire da quale fattore dipendesse il potere battericida od ostacolante lo sviluppo batterico che si esplica nel tenue. In seguito a numerose ricerche vennero alla conclusione che la mucosa intestinale normale ha una certa importanza nella distruzione dei batteri. Un tale concetto fu complessivamente accettato da Moro e ribadito, con ulteriori ricerche, successivamente da Schütz.

Per contro, Medowikow nega un tale potere battericida alla mucosa intestinale, riservandolo solo al chimo. Anche Wollman si schiera nettamente contro il concetto dell'esistenza di un potere ostacolante lo sviluppo batterico nella mucosa dell'intestino.



Complessivamente si può ritenere che questo problema sia ancora ben lungi dall'essere chiarito e che perciò siano giustificate nuove ricerche.

Le esperienze che istituii furono in massima parte eseguite sui conigli e solo in piccolo numero su cavie; come germi furono saggiati il prodigioso, il piocianeo, il coli, i germi ospiti normali dell'intestino e le spore del carbonchio.

La tecnica usata per il maggior numero delle esperienze fu la seguente.

Ad un coniglio, appena ucciso con puntura lombare, si apriva l'addome, e sollevato un tratto di intestino tenue, lungo 15-20 cm., si cercava di vuotarlo del suo contenuto, spremendolo delicatamente con due dita: si chiudevà poi fra due lacci e si asportava rapidamente. Entro l'ansa si iniettavano 1-2 cmc. di una emulsione batterica piuttosto diluita, che si cercava di rimescolare nell'interno del tratto di intestino il meglio possibile. Ciò fatto, si sollevava con una pinza l'ansa — afferrandola verso la porzione mediana — in maniera che il contenuto si raccogliesse alle due estremità. Una delle due metà (*ansa in esperienza*) si lasciava per un tempo diverso in una camera umida posta entro un termostato a 37° e l'altra si adoperava subito per le ricerche (*ansa controllo*), prelevando subito da essa, con pipette graduate sterilizzate, determinate quantità dell'emulsione introdotti, per farne piastre in agar. Lo stesso procedimento si seguiva per l'altra metà tenuta in termostato. Avvenuto lo sviluppo completo, si contavano le colonie sviluppatesi dalla stessa quantità di emulsione batterica dell'ansa controllo e dell'ansa in esperimento.

Le esperienze furono divise nei cinque seguenti gruppi:

In una *prima serie* si usò il prodigioso, che si fece stare in contatto con la mucosa per la durata di un'ora e mezzo, e si ripeté, con piccole modificazioni, in sei conigli diversi: si ebbe costantemente una diminuzione di germi nell'ansa in esperienza in confronto con quella controllo, nelle porzioni riportate nella tabella riassuntiva annessa.

Nella *seconda serie* si utilizzò l'appendice del coniglio, che è molto lunga, con i germi ivi contenuti: si ebbero risultati del tutto corrispondenti a quelli della serie precedente.

In una *terza serie* come germe si usò sempre il coli; però si saggiarono diversi tratti dell'intestino: duodeno, digiuno ed ultima parte dell'ileo. I risultati furono sempre costanti, nel senso di diminuzione di germi nell'ansa in esperienza, come risulta dalle cifre della tabella.

Nella *quarta serie* anzichè forme vegetative si usarono le spore del carbonchio, con risultati completamente uguali ed ancora più nettamente dimostrativi dei casi precedenti.

Finalmente in una *quinta serie* si ricorse alla cavia, procedendo nella seguente maniera. Aperto l'addome, sotto narcosi profonda, si solleva un tratto di tenue che si chiude ai due estremi con due lacci, avendo cura di

lasciarvi un poco di contenuto (ansa controllo); accanto a quest'ansa, così legata e quindi isolata dalla canalizzazione intestinale, se ne isola una seconda (ansa in esperienza), alla quale però si legano i vasi sanguigni corrispondenti, decorrenti nel mesenterio, per produrre un'ischemia e quindi una grave lesione della mucosa. Dopo 20 ore che si erano rimesse le anse nell'addome e si era ricucito a strati, si prelevano le due anse e si fanno i soliti insemnamenti in agar semplice e in agar per anaerobiosi. I risultati furono dei più dimostrativi di tutte le serie di esperienze, perchè nell'agar semplice di fronte a circa 2000 colonie dell'ansa in esperienza, si ebbe sterilità assoluta nell'ansa controllo; risultati corrispondenti si ebbero nelle culture in anaerobiosi. In questa esperienza poi è degno di nota il fatto che dal materiale prelevato dall'ansa controllo non si sviluppò, sia nell'agar semplice sia nella gelatina, nessuna colonia, *mentre il preparato batterioscopico dimostrò una flora svariaticissima*: questo dimostra che, se non tutti, per lo meno buona parte dei germi presenti era morta e questo fatto non si può attribuire che all'azione della mucosa. La controprova di questa interpretazione è data dal comportamento dei germi nell'ansa in esperienza: qui per le lesioni gravi della mucosa, dovute alla necrosi ischemica, si ha un pullulare rigogliosissimo di germi, compresi gli anaerobi.

TABELLA RIASSUNTIVA DEI RISULTATI DELLE ESPERIENZE.

|    | GERME USATO     | ORE<br>di soggiorno<br>dei germi<br>in contatto<br>con la mucosa<br>intestinale | RAPPORTO<br>fra i germi<br>sviluppatisi<br>dall'ansa controllo<br>e in esperienza |
|----|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | prodigioso      | 1,30                                                                            | 100:70                                                                            |
| 2  | "               | "                                                                               | " : 30                                                                            |
| 3  | "               | "                                                                               | " : 30                                                                            |
| 4  | piociano        | "                                                                               | " : 40                                                                            |
| 5  | "               | "                                                                               | " : 30                                                                            |
| 6  | bact. coli      | "                                                                               | " : 20                                                                            |
| 7  | germi appendice | 2                                                                               | " : 50                                                                            |
| 8  | "               | 4                                                                               | " : 40                                                                            |
| 9  | bact. coli      | (duodeno) 5                                                                     | " : 80<br>" : 30                                                                  |
| 10 | "               | (digiuno) "                                                                     | " : 2<br>" : 4                                                                    |
| 11 | "               | (ileo) "                                                                        | " : 60<br>" : 30                                                                  |
| 12 | spore carb.     | 1                                                                               | ∞:13                                                                              |

I risultati di queste esperienze stanno a dimostrare in maniera chiara che da parte dell'intestino viene esercitato un evidente potere battericida o inibitore sullo sviluppo dei germi introdottivi o ivi esistenti.

Quest'azione battericida e quindi protettiva esercitata dalla mucosa dell'intestino, presenta una certa analogia con quella che la medesima mucosa estrinseca contro molte tossine batteriche e contro alcuni veleni. Per ragioni di analogia si potrebbe perciò pensare, anche per il potere battericida della mucosa intestinale, *che si tratti di un'azione biologica specifica dell'epitelio di rivestimento della mucosa stessa, che si esplica sui germi con i quali viene in contatto.*

#### CONCLUSIONI.

1°) Per i microrganismi che sono stati oggetto di esperienza, la mucosa intestinale è dotata di un vero e proprio potere battericida, dovuto ad una azione biologica specifica dell'epitelio di rivestimento della mucosa stessa.

2°) Quando, con un'ischemia completa, si produce una profonda lesione della mucosa stessa (necrosi ischemica), questo potere battericida va completamente perduto.

3°) Tale potere pare possa variare di intensità nei vari tratti del tubo digerente: dalle mie ricerche nel coniglio sembrerebbe più energico nel digiuno.

4°) Quest'azione, oltre che sulle forme vegetative, si esplicherebbe anche con altrettanta intensità, sulle spore (sp. del carbonchio).

5°) Nel meccanismo complesso con il quale viene ostacolato, entro determinati limiti, lo sviluppo della flora intestinale, si devono prendere in considerazione fattori di natura diversa: fra questi principalissimo il potere battericida della mucosa stessa per alcuni batteri.

#### INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE.

Medowikow, Arch. f. Kinderheilk, 1910.

Moro, Arch. f. Kinderheilk, 1906.

Rolly e Liebermeister, Deutsch. Arch. f. Klin. Med., 1905.

Schütz, Arch. f. Verdauungskr., 1901.

Schütz, Verhandlungen des XXVI Kongr. f. inn. Med., 1909.

Wollman, Ann. Institut. Pasteur, 1910.

## PERSONALE ACCADEMICO

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, l'Accademia procedette durante le ferie alla elezione di Soci e di Corrispondenti. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Furono eletti Soci Nazionali:

Nella Categoria II, per l'*Astronomia, Geodesia e Geofisica e applicazioni*: CERULLI VINCENZO, DE MARCHI LUIGI, LEONARDI-CATTOLICA PASQUALE.

Nella Categoria V, per le *Scienze biologiche e applicazioni*: BOTTAZZI FILIPPO, BECCARI ODOARDO, CHIARUGI GIULIO.

Furono inoltre eletti Soci Corrispondenti:

Nella Categoria V, per le *Scienze biologiche e applicazioni*: GAGLIO GAETANO, LONGO BIAGIO, RAFFAELE FEDERICO.

L'esito delle votazioni venne proclamato dal Presidente, con Circolare del 2 agosto 1920. Le nomine dei Soci Nazionali furono sottoposte all'approvazione Sovrana.

G. C.

---



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 5 dicembre 1920.*

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

### MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *L'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère e la teoria elettronica dei metalli.* Nota I del Socio O. M. CORBINO.

L'esperienza di Oersted e la teoria delle azioni elettromagnetiche data da Ampère rendono conto del più semplice tra i motori elettrici: la ruota di Barlow. E cioè in un campo ad esso normale un disco percorso da una corrente radiale condotta da due elettrodi striscianti al centro e alla periferia, gira con coppia costante nel suo piano. Se esistesse l'analogo termico dell'effetto Oersted, si dovrebbe poter constatare la tendenza a rotare di un disco percorso da un flusso radiale di calore e sottoposto a un campo magnetico normale a esso disco.

Forma oggetto della presente Nota la ricerca di un tale effetto, sia in relazione a quel che lascia prevedere la teoria elettronica della conducibilità dei metalli, sia dal punto di vista dell'esperienza.

Un ragionamento di tipo intuitivo farebbe prevedere l'esistenza di una coppia cospicua nelle condizioni sopra indicate del disco, qualora si scelga un metallo di speciale natura. Risulta invero da alcune mie precedenti ricerche che un disco di bismuto percorso da un flusso radiale di calore, e sottoposto all'azione di un campo magnetico normale diventa sede di correnti elettriche circolari che trasformano il disco in una particolare lamina magnetica. Queste correnti circolari, secondo la teoria elettronica, deriverebbero dall'azione deviatrix esercitata dal campo sugli elettroni in movimento; precisamente esse

corrispondono, come senso, a un flusso circolare di elettroni che movendosi per effetto del gradiente di temperatura dal centro alla periferia sarebbero trascinati circolarmente dal campo.

Sotto l'azione di questo flusso di elettroni deviato circolarmente e degli urti che essi imprimono alle molecole del metallo, questo dovrebbe essere trascinato nel senso del moto circolare degli elettroni. Una tale azione di trascinamento per l'urto degli elettroni contro il metallo non si manifesta nelle correnti elettriche ordinarie, poichè in tal caso si esercitano forze contrapposte sugli elettroni mobili negativi e sui centri positivi; e poichè le forze dipendono dalle cariche elettriche dei centri, esse si compenseranno nell'insieme del metallo, tanto se i centri positivi sono fissi, quanto se sono in tutto o in parte mobili secondo le idee del Drude.

Nel caso invece delle correnti circolari create nel bismuto dal flusso di calore e dal campo, la forza deviatrice del campo si eserciterà solo sui centri mobili; e perciò se questi sono soltanto gli elettroni negativi, ne risulterà un'azione di trascinamento non compensata dalla forza che non si esercita più sui centri positivi.

Un esame più approfondito della questione conferma e precisa le previsioni anzidette.

Se si accetta il punto di vista del Drude, la conduzione del calore sarebbe dovuta a un doppio processo. Lo scambio degli elettroni positivi e negativi fra le parti calde e le fredde, darebbe luogo a un passaggio di calore secondo il meccanismo noto per la teoria cinetica della conduzione di calore negli aeriformi. Ma in conseguenza della variazione di concentrazione ionica con la temperatura, si avrebbe in più una vera migrazione di ioni positivi e negativi dal centro alla periferia, ciò che è compatibile con la condizione di isolamento del disco, poichè basta che attraverso a una circonferenza tracciata nel disco passino in egual numero, dal centro verso la periferia, ioni positivi e negativi. Al flusso termico corrisponderebbero perciò due vere correnti elettriche di ioni positivi e negativi entrambe centrifughe, che si compensano agli effetti del trasporto di cariche nel senso radiale; ma che sotto l'azione del campo magnetico danno origine a due flussi circolari in senso geometrico opposto, i quali si sommano nelle azioni magnetiche esterne. Può così aversi una corrente elettrica circolare nel disco, pur mancando una vera corrente elettrica (trasporto costante di una quantità di elettricità) nel senso radiale. Ma la corrente circolare risulta da due flussi circolari in senso opposto di ioni positivi e negativi; le azioni meccaniche degli urti sulle molecole da parte degli ioni delle due specie saranno quindi di senso opposto; è facile dimostrare che esse si compensano esattamente.

Invero le due correnti circolari sono date <sup>(1)</sup>, per gli ioni positivi e negativi, da

$$(1) \quad I_{1c} = -Hev_1 I_{1r} \quad , \quad I_{2c} = Hev_2 I_{2r}$$

<sup>(1)</sup> Corbino. Rend. Lincei, vol. XX, ser. V, pag. 572.

dove  $H$  è il campo,  $v_1$  e  $v_2$  le mobilità degli ioni positivi e negativi e  $I_{1r}$  e  $I_{2r}$  sono le due correnti radiali legate dalla condizione

$$I_{1r} + I_{2r} = 0$$

essendo il disco isolato.

Indicando con  $X_1$  e  $X_2$  i due campi elettrici che sarebbero capaci di determinare nel senso circolare le correnti  $I_{1c}$  e  $I_{2c}$  agendo sulle singole specie di ioni, e con  $N_1$  e  $N_2$  le concentrazioni degli ioni positivi e negativi, sarà

$$I_{1c} = N_1 e v_1 X_1 \quad ; \quad I_{2c} = N_2 e v_2 X_2 .$$

Ma si ha dalle (1)

$$\frac{I_{2c}}{I_{1c}} = \frac{v_1}{v_2} .$$

E perciò sarà

$$N_1 X_1 = N_2 X_2 .$$

Risulta pertanto che le forze globali agenti sugli ioni dei due segni sono eguali, e che saranno eguali le rispettive azioni di trascinamento sul metallo, come con le correnti elettriche ordinarie.

Si conclude che la teoria di Drude prevede un'azione meccanica nulla sul disco percorso da un flusso termico radiale e disposto in un campo magnetico. Ma si riconosce che tale risultato è inseparabilmente connesso con la ipotesi della esistenza di due specie di ioni *mobili*, negativi e positivi, che si compensano nella rispettiva azione di trascinamento.

Qualunque teoria che ammetta una sola specie di centri mobili, e che sia capace di prevedere la formazione di quella corrente circolare rivelata dall'esperienza in modo incontestabile, deve invece necessariamente condurre alla esistenza della forza di trascinamento.

In verità le teorie monistiche oggi esistenti, come quella di Lorentz, non spiegano la formazione di tali correnti circolari.

Se si considera, ad esempio, un settore sottile del disco percorso da un flusso di calore radiale, e si adotta la teoria di Lorentz della propagazione del calore, si ha con le notazioni da lui adottate che il numero di elettroni che viaggia lungo il settore è dato da

$$(2) \quad \int \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda = 0$$

essendo il disco isolato. Passano cioè attraverso una sezione circolare del settore un egual numero di elettroni nei due sensi. La velocità media degli ioni che passano nel senso del flusso termico è però maggiore di quella degli ioni che passano in senso opposto; potrebbe quindi credersi che attraverso ai lati del settore si abbia per effetto del campo un flusso ineguale nel senso

circolare e quindi una corrente circolare. Ciò non è, come si dimostra facilmente. Invero fra due urti l'elettrone è sottoposto a un'accelerazione  $\frac{d\eta}{dt}$  nel senso circolare, data da

$$\frac{d\eta}{dt} = H \frac{e}{m} \xi.$$

Se  $T$  è l'intervallo fra due urti, si avrà una variazione  $\Delta\eta$  della velocità normale primitiva  $\eta$  data da

$$\Delta\eta = \int_0^T H \frac{e}{m} \xi dt = H \frac{e}{m} T \xi.$$

Ma il numero di elettroni che traversano un lato del settore nel senso circolare sarà

$$\int \left( \eta + \frac{\Delta\eta}{2} \right) f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda = \int \eta f d\lambda + \int \frac{\Delta\eta}{2} f d\lambda.$$

Il primo integrale è nullo, come in assenza del campo. Il secondo è dato da

$$H \frac{e}{m} \frac{T}{2} \int \xi f d\lambda$$

ed è anch'esso nullo per la condizione (2). Dunque la teoria di Lorentz non spiega le correnti circolari da me messe in evidenza con quel singolare effetto termomagnetico sopra citato.

Ma poichè non è da escludere che la teoria monistica possa, in una forma diversa da quella del Lorentz, render conto della esistenza di quell'effetto termo-magnetico, resta in ogni caso accertato che, qualunque sia la forma di tale teoria, se essa prevede l'esistenza di correnti circolari dovute a soli elettroni negativi, deve risulterne l'azione trascinatrice sul metallo, poichè il campo non può agire in alcun modo sui centri positivi supposti immobili, e manca perciò l'azione compensatrice prevista dalla teoria dualistica.

Riassumendo, le teorie elettroniche assumono rispetto al ricercato effetto analogo del fenomeno di Oersted-Ampère la seguente posizione:

1°) La teoria di Lorentz (monistica) non spiega le correnti circolari nel disco, e perciò deve senz'altro ritenersi contraddetta dall'esperienza.

2°) Qualunque teoria di altra forma, ma che ammetta elettroni mobili di una sola specie, se è capace di spiegare le esistenti correnti circolari, prevede un'azione di trascinamento sul metallo, e quindi dovrebbe esistere l'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère.

3°) La teoria dualistica quale fu formulata dal Drude spiega le correnti circolari, nella misura relativa pei vari metalli che risulta confermata



dall'esperienza; ma esclude l'esistenza di un'azione di trascinamento sul metallo.

Da quanto precede si deduce quale importanza spetti al risultato che fornirà l'esperienza circa l'esistenza o meno del ricercato effetto termo-mecanico sotto l'azione del campo.

In una seconda Nota sarà riferito sulle esperienze da me eseguite a tale scopo.

## Zoologia. — *Osservazioni sulla vita degli Anofeli.* Nota II del Socio B. GRASSI.

### I. — CONCLUSIONI SULLA DURATA DELLA VITA.

Come risulta dai dati riferiti nella Nota I. la maggior parte degli anofeli coloriti scompare pochi giorni dopo la colorazione e soltanto eccezionalmente una minimissima percentuale si cattura ancora dopo 12-14 giorni. A questo fatto, a mio avviso, non si può dare che una sola spiegazione ed è che *sono pochissimi gli anofeli che arrivano a sopravvivere 12-14 giorni*. Mi fu obiettato che un'altra spiegazione era possibile, vale a dire, che gli anofeli colorati andassero man mano disperdendosi per la macchia. Questa obiezione è del tutto infondata, perchè, se avvenisse in un senso, ossia dall'abitato verso la macchia, dovrebbe avvenire anche in senso opposto e ci sarebbe perciò occorso di trovare, almeno, un anofele colorito dopo il 14° giorno. Ammettiamo pure che nelle macchie vi sia una quantità di anofeli 5-6 volte maggiore che nelle case e che gli anofeli dopo aver deposte le uova possano pigliare qualunque direzione: noi avremmo dovuto trovar nei porcili e nelle stalle dopo 6-8 giorni una percentuale di coloriti molto superiore a quella che abbiamo in realtà riscontrata, se almeno una forte proporzione di essi sopravvivesse.

Se si tengono presenti le cifre delle catture sopra riferite, nonchè quelle, ormai triennali, delle catture giornaliere a Porto e a Fiumicino, risulta evidente che se gli anofeli sopravvivevano in quantità dopo 2-3 o più ovificazioni, ossia per 10-15 giorni, il loro numero dovrebbe crescere smisuratamente, quando si sospende la cattura per un po' di giorni, invece ciò non accade che limitatamente, vale a dire il numero può diventare triplo o quadruplo, ma non cresce di più (qui non si parla del periodo d'ibernamento).

È a questo punto utile di richiamare che, quando in un ambiente si raccolgono nello stesso giorno parecchi anofeli infetti, si trovano molto più frequenti gli individui con gli amfionti giovani, mentre quelli con gli amfionti medî sono in minor quantità e quelli cogli amfionti maturi ancora più scarsi. Così per es. l'anno scorso, a Maccarese, nell'ambiente dove alloggiavano i prigionieri, fra 167 anofeli presi lo stesso giorno (II-IX), 15 erano infetti:

9 con amfionti che misuravano da 20 a 22  $\mu$ , 3 con parassiti che misuravano 36  $\mu$ , 3 con parassiti maturi o quasi; si noti che si trascurarono gli stadî più giovani non facilmente visibili a piccolo ingrandimento, col quale appunto si faceva l'esame. Anche nel dormitorio dei prigionieri di Porto, l'anno precedente, avevo avuto occasione di riscontrare molto più abbondanti gli anofeli ospitanti stadî giovani.

Queste osservazioni concordano con tutte le altre sopra riferite e concorrono così a dimostrare quanto sia breve la vita degli anofeli alati.

Del resto la cosa non mi sorprende, poichè io me ne ero già quasi persuaso, quando restò stabilito che la maturazione delle uova nei mesi caldi avviene in soli 2-3-4 giorni. Che un anofele possa avere la fortuna di far le uova 3-4 volte in 15 giorni, mi sembrava poco probabile, date tutte le migrazioni che deve fare per ulteriormente pascersi e deporre le uova.

Queste osservazioni sulla breve vita degli anofeli alati, sono di grandissima portata pratica: di 100 anofeli che pungono un malarico in condizioni opportune, forse uno solo arriverà a sopravvivere 13-15 giorni, ossia il tempo necessario perchè gli sporozoiti arrivino nelle ghiandole salivari<sup>(1)</sup>.

Abbiamo così fatto un passo innanzi per spiegarci come nei luoghi d'anofelismo senza malaria, l'endemia malarica non riappaia, nonostante l'arrivo di qualche malarico e come la recrudescenza della malaria sia stata insignificante al ritorno dei soldati.

Evidentemente almeno di regola un gruppo di malati che non si curano dovrebbe essere necessario per la riviviscenza di questa infezione. Anche per coloro, a cui la cifra di 1-2 % di anofeli infetti nei luoghi gravemente malarici sembrava troppo piccola rispetto al numero dei malarici, sarà interessante la dimostrazione che la maggior parte degli anofeli muore prima che gli sporozoiti arrivino alle ghiandole salivari.

Roubaud (*Annales de Pasteur*, aprile, 1920) riferisce un esperimento fatto con un migliaio di anofeli catturati in una stalla, artificialmente coloriti e lasciati liberi, come nei miei esperimenti sopra riferiti, nel medesimo locale: dopo 10 giorni non riusciva a catturarvene nessuno. Egli ne induce che la fauna anofelina di un dato luogo, per quanto possa essere intensamente densa, viene ad essere completamente rinnovata nel termine di pochi

(<sup>1</sup>) Si tengano presenti le temperature dei mesi estivi a Fiumicino: così per es. in un casotto di legno molto esposto al sole, la media temperatura è stata di c. 24° in agosto, dal 10 al 30 settembre di c. 20°; di poco meno di c. 23° in un porcile ben riparato dal 10 al 20 settembre. I parassiti malarici compiono il loro ciclo in 8 giorni a temperatura costante da 28° a 30°. Nei mesi di luglio e agosto a Roma, in una camera rivolta a ponente e che si teneva chiusa la notte, lo sviluppo richiese 12-13 giorni; nella prima metà di settembre invece richiese 14 giorni (Grassi). Recentemente Roubaud ottenne lo sviluppo delle forme terzanarie e semilunari, in ambienti con temperatura variabile da 15° a 25°, rispett. in 15-20 giorni; invece a 25° in stufa, rispett. in 11-12 e almeno 14 giorni.

giorni. In tre differenti locali abbastanza vasti e chiusi con garza, egli ha liberati dei lotti di una ventina di anofeli: essi potevano nutrirsi su vari animali (cani, galline, vitelli) e disponevano anche di acqua. Ebbene solo uno o due individui al più si trovarono vivi dopo 10 giorni. A parte la spiegazione, che il Roubaud vorrebbe trovare nella necessità assoluta che avrebbero gli anofeli di volare all'aperto, i fatti da lui osservati coincidono perfettamente con quelli da me esposti più sopra.

Griffitts (*Public Health Bulletin* n. 101, october 1919, Stati Uniti d'America) ha sperimentato cogli *A. quadrimaculatus*, affini ai nostri *claviger*. Egli li coloriva e poi li lasciava liberi per vedere a che distanza andavano, ma non arrivò a prenderne più nessuno 10 giorni dopo la liberazione. Anche questo fatto, a parte l'interpretazione, collima con quelli da me riferiti.

## II. — TENDENZA DEGLI ANOFELI

### A RITORNARE NEL LUOGO DOVE HANNO PUNTO UNA PRIMA VOLTA?

Ritengo che spetti a Gosio il merito di aver notato la possibilità della localizzazione della malaria in certe abitazioni, in determinate famiglie. Questa localizzazione, che qualcuno, se ben ricordo, ha definito come piccola epidemia familiare, consiste nell'ammalarsi di febbri di parecchi individui abitanti una certa casa, mentre quelli delle case vicine rimangono immuni. « In singole località riuscì anche di rintracciare la sorgente primitiva d'infezione, cioè, qualche vecchio recidivo che aveva, verosimilmente, fornito alle zanzare il materiale necessario per le altre nuove infezioni, più tardi sviluppatesi intorno » (Gosio, 1900, *Il Policlinico*).

Il Falcioni (*Il Policlinico*, 1913), scriveva: « Troviamo delle vie nelle quali la limitazione dei focolai appare così netta a determinate abitazioni, verificandosi spesso che coloro i quali dimorano in alcune ammalano con frequenza di febbri, mentre poco lungi, coloro che dimorano in altre non le contraggono mai, che la importanza della casa come ambiente che si presta a meraviglia per farvi annidare e conservare le infezioni, non può apparire più manifesta ».

Anche nella pubblicazione *Sulla reviviscenza della malaria in territorio del comune di Vezzano Ligure* (Igiene moderna, 1920), Piras riporta fatti dello stesso genere. I casi da lui studiati si verificarono in gran parte in persone abitanti o in case, ove se n'erano verificati altri, o in case attigue; solo pochi si ebbero in case ubicate a qualche centinaio di metri di distanza da esse. La sorgente d'infezione era, almeno in certi casi, evidente, cioè, rappresentata da un soldato o da un operaio venuto a casa malarico.

Aggiungasi che anche in Inghilterra e in India si è osservato il fenomeno delle « case malariche ».



Anch'io avevo avuto occasione di verificare casi simili, ma inclinavo a ritenerli casuali perchè la spiegazione data da Gosio non era conforme ai rilievi da me fatti sui costumi degli anofeli. Infatti Gosio scrive:

« Supponiamo ora, che, colle prime punture, la zanzara abbia succhiato i parassiti malarici, lungo il periodo di sosta digestiva se la temperatura fu conveniente, detti parassiti possono essere giunti al loro completo sviluppo e la zanzara li potrà inoculare colle punture susseguenti, quando si ridesta in lei la voracità, al tempo della deposizione delle uova »

Io avevo già notato fin dal 1901 il fatto che gli anofeli non hanno l'abitudine di stabilirsi nello stesso luogo dove hanno punto e scrivevo allora: « Questi fatti dimostrano che gli anofeli d'estate, se ne hanno opportunità, sogliono, nel termine di 24-48 ore, abbandonare il luogo dove si sono ricoverati dopo di aver punto. Qualche volta vi si fermano di più, non però molto a lungo, come dimostra la circostanza che nelle camere dei malarici sono in genere più frequenti d'estate gli anofeli coi parassiti ancora ai primi stadi di sviluppo, che quelli coi parassiti negli stadi più avanzati ». Nella prima Relazione sull'esperimento di lotta antimalarica a Fiumicino io ripeteva: « Gli anofeli non hanno l'abitudine di stabilirsi là dove hanno punto, ma mutano di posto molto di frequente, quando la stagione non è troppo fredda ». In appoggio di questa conclusione riportavo tre serie di fatti che qui non è il caso di ripetere.

Il Sella s'è fissato più a lungo su questo punto e ha confermato che d'estate gli anofeli sostano poco nelle abitazioni (2-3-4 giorni) e poi escono. Questo esodo è provocato dalla necessità di deporre le uova. L'anofele *di regola* non si allontana durante la digestione (Sella).

Come spiegare allora le epidemie famigliari?

A Maccarese-Tenuta l'anno scorso l'11 settembre, quando ancora le uova maturavano con un sol pasto, mi occorre un caso, a questo riguardo, molto significativo. Esso viene riportato dal Sella nella parte della Relazione da lui redatta. L'esame di 167 anofeli catturati nel dormitorio senza protezione dei prigionieri (in numero di 80 quasi tutti malarici) mi diede 15 intestini con amfionti; osservati invece 105 anofeli di una stalla situata nelle vicinanze del dormitorio, non ne trovai alcuno infetto, nonostante che le aperture (porte e finestre) in tutt'e due gli ambienti fossero press'a poco nella stessa direzione.

A questi 15 intestini infetti ho già accennato più sopra, mettendo in rilievo che erano in differenti stadi di sviluppo e di maturazione, il che significa che una parte degli anofeli portatori di questi parassiti dovevano essere entrati e usciti ripetutamente dal dormitorio.

Sfortunatamente il Sella era assente ed io mi trovavo così stanco che mi mancarono le forze di ripetere l'osservazione per parecchi giorni di seguito; ciò che ho osservato però basta per farci ritenere che gli anofeli possano tornare di preferenza negli ambienti dove prima hanno punto.



Questa tendenza si rileva pure fino a un certo limite degli esperimenti 3°, 5° e 10° sopra riferiti a proposito della durata della vita degli anofeli. La conferma anche il fatto che è molto più difficile di incontrare anofeli infetti nei porcili che nelle case.

Del resto simili istinti si manifestano tra gli insetti e fuori degli insetti: ricordo che formiche, termiti e api tornano alle loro case e che quei molluschi che si trovano fissati agli scogli e prendono il nome di patelle, sono molto attaccati al loro domicilio: se ne allontanano in cerca del cibo per far ritorno al punto preciso d'onde sono partiti.

Ne vengono di conseguenza le seguenti deduzioni pratiche:

1°) È molto più utile la raccolta degli anofeli nelle case che nei porcili, soprattutto in quelle dove si sono verificati casi di malaria;

2°) Anche il non estendersi della malaria nelle località con anofeli senza malaria trova in parte la spiegazione nell'istinto in discorso: infatti nella casa dove c'è già un malarico, i casi nuovi che si verificano, vengono facilmente riconosciuti come tali e perciò non restano a lungo senza cura.

Affinchè non nascano equivoci, prima di abbandonare questo argomento insisto nell'asserire che la tendenza a ritornare è limitata e ha un valore relativo. Si tengano a questo riguardo presenti le cifre riportate negli esperimenti cogli anofeli coloriti (nell'apprezzamento di queste cifre si tenga conto delle giornate in cui venne fatta la cattura) <sup>(1)</sup>.

\* \* \*

I fatti da me esposti, sia a proposito della durata della vita degli anofeli, sia a proposito della loro tendenza a ritornare nel luogo dove hanno punto, dimostrano quanto sia saggio il giudizio di Johannsen che le questioni biologiche (veramente egli parla della dottrina della ereditarietà) devono essere trattate colla matematica, ma non come matematica, vale a dire che per ricavare col calcolo la spiegazione di un fenomeno biologico, prima bisogna conoscerne tutti i fattori ed il loro valore.

Infatti i calcoli di Ross e anche di Sella (il quale ultimo però prudentemente fa delle riserve), non tenendo conto dei fattori suddetti, vengono a conclusioni evidentemente discutibili e inconsistenti. Ross ricava col calcolo quale valore debba avere il rapporto tra il numero delle zanzare e la popolazione perchè la malaria si conservi stazionaria, cresca o decresca e viene alla conclusione che non si ha incremento di malaria quando il numero di zanzare per abitante sia inferiore a 40 circa!!

(1) Lo sviluppo di vari casi di febbri contemporaneo in due o più membri di una famiglia non ostante la scarsezza grandissima degli anofeli infetti trova la sua spiegazione nella circostanza che gli anofeli spesse volte vengono scacciati quando hanno cominciato a pungere e perciò passano da un individuo all'altro e possono così infettarne più di uno.

Sella d'altra parte ritiene che, perchè si abbia miglioramento, il rapporto tra gli anofeli che pungono la popolazione e quelli presenti (egli valuta, ciò che non ha fatto Ross, anche l'influenza degli animali domestici sul regime malarico), deve decrescere in ragione minore della radice quadrata del rapporto che misura l'aumento del totale anofelico.

Tutti questi calcoli dovrebbero subire grandi modificazioni se si tenesse conto, come si dovrebbe, sia della durata della vita degli anofeli, che, nei mesi più caldi, in un grandissimo numero di casi, è insufficiente per la maturazione dei parassiti malarici e che può essere molto modificata da variazioni atmosferiche ecc., sia dell'istinto degli anofeli di tornare nei luoghi dove hanno punto una prima volta.

Evidentemente si può fare una simile critica al Gorgas (citato da Piras), il quale è venuto alla conclusione che, qualora le stegomie si riducano a 10 per metro quadrato, vi è la probabilità che, se esistono malati di febbre gialla, essi non siano punti e quindi non vi siano più stegomie infette, e avvenga la cessazione brusca dell'epidemia.

Matematica. — *Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie*. II: *Teorema di Bruno. Covarianti conici*. Nota di ANNI-BALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI.

5. Nella precedente Nota abbiamo provato, per via geometrica, che ogni covariante  $\Phi$  d'una forma binaria  $f$  d'ordine  $n$ , è individuato dal suo termine principale  $\varphi$ . Vediamo ora come dall'espressione di  $\varphi$  possa dedursi formalmente quella di  $\Phi$ .

Poichè  $\Phi$  è il primo membro dell'equazione di  $\mathcal{A}_r$  nei cui coefficienti si lascino in evidenza le  $x_1, x_2$  (o la  $x$  se si tratta di  $\overline{\Phi}$ ), così se si trasforma  $\varphi = 0$  mediante una qualunque fra le proiettività  $\tau$  di  $\Gamma$  che mutano  $U$  nel generico punto  $P$  di  $C^n$  (corrispondente al punto  $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2$  di  $r$ ), il primo membro dell'equazione trasformata (nelle variabili  $\xi_1, \xi_2$ ) deve, a meno d'un fattore che si riconosce facilmente essere una potenza di  $\xi_2$ , identificarsi col covariante  $\Phi$ . Anzi, se nelle forme lineari che debbono sostituirsi alle  $u_i$  per effettuare su  $\varphi$  la trasformazione indicata (cioè nei secondi membri della sostituzione che rappresenta  $\tau^{-1}$ ) si mette in evidenza la  $x = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ , si ottiene senz'altro la  $\overline{\Phi}$  a meno d'un fattore costante, che può ridursi eguale ad 1, scegliendo opportunamente il fattore di proporzionalità della trasformazione.

Per ottenere lo scopo, basta, ad esempio, partirsi dalla sostituzione

$$(6) \quad x'_1 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2, \quad x'_2 = \xi_2 x_1,$$

e operare con essa sulla  $f$ ; i coefficienti della  $f'$  trasformata, che, a meno d'un comune fattore posson ridursi alle espressioni

$$(7) \quad \frac{(n-i)!}{n!} \frac{d^i \bar{f}(x)}{dx^i} \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

danno allora le forme lineari cercate, conducendo così al teorema di Bruno <sup>(1)</sup>:  
*L'espressione d'un covariante  $\Phi$  (nella variabile non omogenea  $x$ ) si deduce da quella del suo termine principale  $\varphi$  sostituendo in questa al posto delle  $a_i$  le forme lineari (7).*

La portata notevole di questo teorema nello studio delle relazioni tra forme invariantive, verrà messa in luce in una successiva Nota.

6. Diremo *rango* d'un covariante (od invariante)  $\Phi$  il numero delle intersezioni variabili di  $\mathcal{A}_P$  con una retta generica uscente da  $P$ , cioè il grado del relativo termine principale  $\varphi$  rispetto al coefficiente  $a_n$  di  $f$ .

È ovvio che se  $r$  è il rango di  $\Phi$ , il punto  $P$  è  $(n-r)$ -plo per  $\mathcal{A}_P$ ; sicchè, se  $r=0$ ,  $\mathcal{A}_P$  sarà un cono. Diremo in tal caso che  $\Phi$  è un *covariante conico*. Il covariante conico più semplice è evidentemente la forma stessa, e i coni relativi sono gl'iperpiani osculatori a  $C^n$ .

Se  $\Phi$  è un covariante conico, e si proietta la  $C^n$  da  $P$  su di un  $S_{n-1}$ , le generatrici del cono  $\mathcal{A}_P$  segano ivi una ipersuperficie che indicheremo con  $\mathcal{A}'_{P'}$ ,  $P'$  essendo la proiezione di  $P$  sulla  $C^{n-1}$  proiezione di  $C^n$ ; ed è facile vedere che  $\mathcal{A}'_{P'}$  è invariante per le proiettività di  $C^{n-1}$  in sè che lascian fisso  $P'$ . Invero queste si ottengono per sezione, dal gruppo  $\infty^2$  subordinato entro la stella di centro  $P'$  dalle proiettività di  $\Gamma$  che lascian fisso  $P$ .

Sicchè  $\mathcal{A}'_{P'}$  individuerà un covariante (od invariante)  $\Phi'$  per le forme d'ordine  $n-1$ ; e viceversa, dato un tal covariante, se ne deduce un covariante conico  $\Phi$  delle forme d'ordine  $n$ , invertendo l'operazione predetta.

Il covariante  $\Phi$  si dirà *proiezione* di  $\Phi'$ ; se  $l, m$  sono rispettivamente il grado e l'ordine di  $\Phi'$ , una semplice analisi numerativa prova che i caratteri analoghi di  $\Phi$  sono  $l, l+m$ .

Se anche  $\Phi'$  e le sue successive proiezioni  $\Phi'', \Phi''', \dots, \Phi^{(h-1)}$  sono covarianti conici, ma non lo è  $\Phi^{(h)}$  ( $h \leq n$ ), il covariante  $\Phi$  si dirà *h-conico*; le  $\mathcal{A}_P$  relative son coni aventi per vertice lo  $S_{h-1}$  osculatore a  $C^n$  in  $P$ .

Così ad esempio proiettando dagli  $S_{n-2i+1}$  osculatori a  $C^n$  le quadriche di Clifford (invarianti quadratici) delle  $C^{2i}$  proiezioni ( $2i \leq n-1$ ), si hanno tutti i covarianti quadratici della forma  $f$ . In particolare, se  $i=1$ , si

(1) Faà di Bruno, *Sur un théorème général dans la théorie des covariants* [C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris, XC (1880), pp. 1203-1205]. Per citazioni più dettagliate vedi il rapporto di F. Meyer, *Sullo stato presente della teoria degl'invarianti* (trad. italiana di G. Vivanti) [Giornale di Mat., 1893-98], vol. XXXIV (1896), pag. 339.

ha l'hessiano i cui coni si ottengono proiettando dagli  $S_{n-3}$  osculatori le coniche proiezioni di  $C^n$ , cioè la  $C^n$  stessa.

L'interpretazione formale dell'operazione di proiezione consiste in ciò: se  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  è il termine principale d'un covariante  $\Phi'$  delle forme d'ordine  $n-1$ , la stessa  $\varphi$  è anche il termine principale del covariante  $\Phi$  che se ne deduce per proiezione. In particolare, per qualunque  $n$ , il termine principale dell'hessiano è il 1° membro dell'equazione di  $C^2$ , cioè  $a_0 a_2 - a_1^2$ .

Nella notazione simbolica di Clebsch il simbolo di  $\Phi$  si ottiene da quello di  $\Phi'$  moltiplicando questo simbolicamente per  $a_x, b_x, c_x, \dots$ , essendo  $a, b, c, \dots$ , tutte le lettere contenute nel simbolo di partenza <sup>(1)</sup>.

Matematica. — *I teoremi di unicità per le equazioni differenziali del 3° ordine paraboliche lineari*. Nota I del dott. E. DEL VECCHIO, presentata dal Corrisp. GUIDO FUBINI.

Ci proponiamo di dare sommariamente, in due Note, i teoremi di unicità per un'equazione differenziale del 3° ordine, lineare, a caratteristiche triple, cioè riducibile al tipo:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + d \frac{\partial z}{\partial x} + e \frac{\partial z}{\partial y} + fz + g = 0;$$

$a, b, c \dots$  sono funzioni di  $x$  e  $y$ ; nei casi in cui delle derivate in  $y$  vi si contenga o la sola  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  o la sola  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  o la sola  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , i quali appunto presentano caratteri diversi tra loro <sup>(2)</sup>. Ci limitiamo per ora ai due ultimi casi, perchè forse il primo è, in certo senso, riducibile all'equazione del calore <sup>(3)</sup>.

*Teoremi di unicità per:*

$$(I) \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + e \frac{\partial z}{\partial y} + a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + d \frac{\partial z}{\partial x} + fz + g = 0.$$

<sup>(1)</sup> Cfr. Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* [Leipzig, Teubner 1872] Cap. VI, pag. 254.

<sup>(2)</sup> Nell'Arkiv för Matematik.... le Note del Block: *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples* (2° Note, 1911, Band 7, n. 21, pag. 19....; 3° Note, 1912, Band 8, n. 23, pag. 18....) e la Nota dell'a.: *Sur deux problèmes d'intégration pour les équations paraboliques*:  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ; 1916, Band 11, n. 11.

<sup>(3)</sup> Block, Note 3° cit., pag. 39.



Ponendo:  $\xi = \xi(x)$ ,  $\eta = \eta(y)$ , la (I) si trasforma in un'equazione dello stesso tipo (1):

$$(I_1) \quad \frac{\partial^3 z}{\partial \xi^3} + p \frac{\partial z}{\partial \eta} + q \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + r \frac{\partial z}{\partial \xi} + sz + t = 0,$$

ove:

$$p = \frac{e \frac{d\eta}{dy}}{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^3}; \quad q = \frac{3 \frac{d^2 \xi}{dx^2} + a \frac{d\xi}{dx}}{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2}; \quad r = \frac{\frac{d^3 \xi}{dx^3} + a \frac{d^2 \xi}{dx^2} + d \frac{d\xi}{dx}}{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^3};$$

$$s = \frac{f}{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^3}; \quad t = \frac{g}{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^3};$$

Noi consideriamo un campo C, il cui contorno c, tutto al finito, abbia generalmente tangente; sia incontrato in un numero finito di punti dalle parallele agli assi x ed y; sia percorso in un determinato verso (verso + delle tangenti). Il verso + delle normali sia quello che coinciderebbe con +y, se le corrispondenti tangenti + coincidessero con +x. Il campo trasformato C' sia dello stesso tipo. Allora, se  $z(\xi, \eta)$  è tale che:

h)  $z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$  sono finite e continue in C';

k)  $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^3}, \frac{\partial z}{\partial \eta}$  sono integrabili in C'; e di più si ha:

$$\int \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^3} d\xi = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \varphi(\eta); \quad \int \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta = z + \chi(\xi)$$

(1) Nel modo più generale: (1)  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(y)$ , con: (2)  $\frac{\partial \xi}{\partial x} \neq 0$ ,  $\frac{d\eta}{dy} \neq 0$ , muta la (I) in un'equazione dello stesso tipo. Poniamo:  $\xi = \xi(x)$  per semplificare. Se la (1) rendesse uguali od opposti i coefficienti di  $\frac{\partial^3 z}{\partial \xi^3}$  e  $\frac{\partial z}{\partial \eta}$  nella equazione trasformata, e vi annullasse il termine  $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ , il teorema di unicità si ricaverebbe facilmente ponendo:  $z(\xi, \eta) = e_i^{h\eta} Z(\xi, \eta)$ , ove  $e_i$  è la base dei logaritmi naturali, e h una costante da fissarsi convenientemente. Però dall'esame dei coefficienti dell'equazione trasformata e della (2) risulta che la prima semplificazione è possibile solo quando il coefficiente  $e(x, y)$  è a segno costante in C ed inoltre è, per esempio, integrabile in x. L'altra semplificazione non è in generale possibile quando lo è la 1<sup>a</sup>, ma da sola è sempre fattibile, purchè il coefficiente  $a(x, y)$  soddisfi a condizioni di integrabilità. Non faremo però tale riduzione, che parrebbe semplificativa, perchè essa richiederebbe  $\xi$  funzione di x e y, complicando così il nostro procedimento.

con l'integrazioni per parti si ricava:

$$(3) \quad \begin{aligned} \iint_{C'} z \frac{\partial^3 z}{\partial \xi^3} d\xi d\eta &= \iint_{C'} \left[ z \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\eta; \\ \iint_{C'} p z \frac{\partial z}{\partial \eta} d\xi d\eta &= -\frac{1}{2} \iint_{C'} p z^2 d\xi - \frac{1}{2} \iint_{C'} \frac{\partial p}{\partial \eta} z^2 d\xi d\eta; \dots \end{aligned}$$

e analoghe relazioni per  $\iint_{C'} q z \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} d\xi d\eta$ ,  $\iint_{C'} r z \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi d\eta$ , quando  $p, q, r$  rispondono a talune condizioni, certo soddisfatte per le ipotesi che faremo sui coefficienti di (I). Ciò posto, supponiamo che: **a)** i contorni  $c$  e  $c'$  di  $C$  e  $C'$  abbiano un punto di ordinata massima e uno di ordinata minima, dai quali sieno divisi in due archi  $s_0, s_1; s'_0, s'_1$ : su  $s_0, s'_0$  sia  $dy$  o  $d\eta$  negativo; su  $s_1, s'_1$   $dy$  o  $d\eta$  positivo, percorrendo  $c$  e  $c'$  nel verso prefissato; e consideriamo due soluzioni  $z_1, z_2$  della (I<sub>1</sub>) in  $C'$ , che assumono su  $c'$  gli stessi valori dati ad arbitrio, e tali che le loro  $\frac{\partial}{\partial \xi}$  assumono su  $s'_0$  o  $s'_1$  gli stessi valori dati ad arbitrio.

Supponiamo che i valori per le  $\frac{\partial}{\partial \xi}$  sieno dati su  $s'_0$ ; l'altro caso si riduce a questo facilmente.

La funzione  $v = z_1 - z_2$  è in  $C'$  soluzione della (I<sub>1</sub>) senza termine noto; si annulla su  $c'$  e ha nulla su  $s'_0$  la  $\frac{\partial}{\partial \xi}$ . Per tale comportamento dalle (3) ricaviamo:

$$(4) \quad \begin{aligned} \iint_{C'} v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} + p \frac{\partial v}{\partial \eta} + q \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + r \frac{\partial v}{\partial \xi} + s v \right) d\xi d\eta &= -\frac{1}{2} \int_{s'_1} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 d\eta - \\ &- \iint_{C'} q \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\eta + \frac{1}{2} \iint_{C'} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} - \frac{\partial r}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \eta} + s \right) v^2 d\xi d\eta = 0. \end{aligned}$$

Il 1° termine a 2° membro della (4) è non positivo. Il 2° termine sarà tale se: in  $C$ ,  $q > 0$ ; cioè se: in  $C$ ,  $3 \frac{d^2 \xi}{dx^2} + a' \frac{d\xi}{dx} > 0$ . Questo si verifica quando  $\xi$  è soluzione di:  $3 \frac{d^2 \xi}{dx^2} + m \frac{d\xi}{dx} = F(x)$ , ove  $m$  è il minimo in  $C$  di  $a(x, y)$ , supposta finita e continua, e  $F(x)$  è una funzione positiva in  $C$ , integrabile ...:  $(\alpha) \xi = \int \left\{ e_i^{-\frac{mx}{3}} \left[ \frac{1}{3} \int F(x) e_i^{\frac{mx}{3}} dx + H \right] \right\} dx + K$  <sup>(1)</sup>; e quando inoltre è:  $\frac{d\xi}{dx} > 0$ , il che si soddisfa prendendo positiva la costante  $H$  e per limite inferiore dell' $\int$  tra  $[ ]$  la minima  $x$  dei punti di  $C$ .

(1)  $e_i$  è la base dei logaritmi naturali.

Nel 3° integrando a 2° membro di (4) i primi due termini e l'ultimo tra ( ) sono funzioni note di  $x$  e  $y$ , come risulta dal calcolo delle loro espressioni. Pertanto l'integrando, e quindi l'integrale relativo, è non positivo, se in  $C$  è:  $\psi(x, y) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ e \frac{d\eta}{dy} \right] < 0$ , ove  $\psi$  è nota; cioè se:

$$(5) \quad e \frac{d^2 \eta}{dy^2} + \left[ \frac{\partial e}{\partial y} - \psi \right] \frac{d\eta}{dy} > 0, \quad \text{supponendo} \quad \frac{d\eta}{dy} > 0.$$

Il procedimento seguito è legittimo se  $e(x, y)$ ,  $a(x, y)$ ,  $d(x, y)$ ,  $f(x, y)$  sono finite e continue in  $C$  insieme con:  $\frac{\partial e}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial a}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial d}{\partial x}$ . Supponiamo inoltre che  $e(x, y)$  sia a segno costante in  $C$ .  $\psi(x, y)$  risulta finita in  $C$ .

Se  $e(x, y)$  è positivo in  $C$ , ne consegue:  $e(x, y) \geq m^2 > 0$ . Siccome poi: in  $C$ ,  $\frac{\partial e}{\partial y} - \psi > -M^2$ , abbiamo che  $\eta$  soddisfa alla (5), se risolve:

$m^2 \frac{d^2 \eta}{dy^2} - M^2 \frac{d\eta}{dy} = N^2$ , e ha positivi  $\frac{d\eta}{dy}$ ,  $\frac{d^2 \eta}{dy^2}$ . Ciò si verifica facendo:

( $\beta$ )  $\eta = -\frac{N^2}{M^2} y + \frac{H_1 m^2}{M^2} e^{\frac{M^2}{m^2} y} + K_1$  e prendendo la costante  $H_1 > 0$  e abbastanza grande.

Analogamente se  $e(x, y)$  è negativa in  $C$  si può soddisfare la (5), rendendo così  $\leq 0$  il 3° integrando a 2° membro di (4).

Adunque possiamo avere rispettivamente non negativo, non negativo, non positivo i tre integrandi a 2° membro di (4); e i due ultimi tali in tutto  $C'$ . Allora i tre integrali rispettivi dovranno annullarsi separatamente; siccome poi il 3° integrando è continuo in  $C'$ , dovrà essere: in  $C'$ ,  $v = 0$ , cioè:  $z_1 = z_2$ ; e quindi in  $C$  coincideranno le corrispondenti soluzioni della (I).

Osserviamo che, siccome le funzioni ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) sono a derivata di segno costante, se  $C$  e  $c$  sono del tipo indicato, tali saranno  $C'$  e  $c'$ ; e per la natura di ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) i coefficienti e le soluzioni di (I<sub>1</sub>) godranno le proprietà di continuità.... dei corrispondenti coefficienti e soluzioni di (I). Possiamo pertanto enunciare il seguente teorema di unicità:

Se il campo  $C$  è limitato da una curva  $c$ , che si trovi tutta al finito, abbia generalmente tangente, sia incontrata in un numero finito di punti dalle parallele agli assi  $x$  e  $y$ , e soddisfi alla condizione a), non possono esistere in esso due distinte soluzioni dell'equazione (I), le quali soddisfino alle condizioni b), c), assumano sul contorno  $c$  gli stessi valori arbitrariamente assegnati, e sieno tali che le loro derivate prime in  $x$  assumano su  $s_0$  o  $s_1$  gli stessi valori pure arbitrariamente assegnati, se i coefficienti della (I),  $e(x, y)$ ,  $a(x, y)$ ,  $d(x, y)$ ,  $f(x, y)$  sono finite e continue in  $C$  insieme con le derivate rispettive:  $\frac{\partial e}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial a}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial d}{\partial x}$ ; e di più  $e(x, y)$  è a segno costante in  $C$ .

*Analisi matematica. — Les rapports des ensembles parfaits présentant le caractère (A) et des fonctions admettant une dérivée seconde généralisée.* Nota di ARNAUD DENJOY, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

Je renvoie à mes précédentes Notes <sup>(1)</sup> pour la définition et l'étude du caractère (A).

Soit  $F(\theta)$  une fonction continue. Posons,  $u$  étant un nombre non nul,

$$\frac{F(\theta + u) - F(\theta)}{u} = Q(\theta, u) = Q(\theta + u, -u),$$

$$\frac{F(\theta + u) + F(\theta - u) - 2F(\theta)}{u^2} = \frac{Q(\theta, u) - Q(\theta, -u)}{u} = R(\theta, u).$$

On dit que  $F$  admet au point  $\theta$  une dérivée seconde généralisée égale à  $f(\theta)$ , si  $R(\theta, u)$  tend vers  $f(\theta)$  quand  $u$  tend vers 0,  $\theta$  étant indépendant de  $u$ . Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

VI. Si l'ensemble parfait  $P$  présente le caractère (A), et si, quels que soient  $\theta$  sur  $P$  et  $|u|$  positif et borné indépendamment de  $\theta$ ,  $|R(\theta, u)|$  demeure borné:

- 1°  $F(\theta)$  possède une dérivée  $\Phi(\theta)$  en tout point  $\theta$  de  $P$ ;
- 2°  $\Phi(\theta)$  est continue sur  $P$  et les nombres dérivés de  $\Phi(\theta)$  spéciaux à  $P$  sont bornés;

3° Si, en outre,  $F(\theta)$  admet la dérivée seconde généralisée  $f(\theta)$ ,  $\Phi(\theta)$  admet  $f(\theta)$  pour dérivée spéciale à  $P$ , tout au moins en un ensemble de valeurs de  $\theta$  partout dense sur  $P$ .

Supposons  $|R(\theta, u)| < \sigma$ , quels que soient: 1°  $\theta$  sur  $P$ ; 2°  $|u|$  positif et par exemple inférieur à 2.

Soient quatre nombres  $x_1, x'_1; x, x'$  vérifiant la relation  $x' - x = 2(x'_1 - x_1) > 0$ . On a  $2x'_1 - x' = 2x_1 - x = \xi$ . Le point  $\xi$  est simultanément le symétrique de  $x$  par rapport à  $x_1$  et celui de  $x'$  par rapport à  $x'_1$ . Supposons que  $x_1$  et  $x'_1$  soient sur  $P$ . Désignons par  $2k$  la distance (positive) de  $x_1$  et de  $x'_1$ , et par  $l$  les différences égales  $\omega_1 - \xi$  et  $\omega - \omega_1$ , si  $\omega$  et  $\omega_1$  sont les milieux respectifs des intervalles  $(x, x')$  et  $(x_1, x'_1)$ . On a

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + l - k, & x'_1 &= \xi + l + k, \\ x &= \xi + 2l - 2k, & x' &= \xi + 2l + 2k. \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> V. questi Rendiconti, pagine 291 e 316.



Nous supposons que  $|l| + k$ , égal au plus grand des deux nombres  $|x - x_1|$  et  $|x' - x'_1|$ , est inférieur à 2.

$x_1$  et  $x'_1$  étant sur P, on a  $|R(x_1, u)| < \sigma$ ,  $|R(x'_1, u)| < \sigma$ , si  $0 < |u| < 2$ . Nous faisons dans la première relation  $u = x - x_1 = l - k$ , et dans la seconde  $u = x' - x'_1 = l + k$ . Il vient, en désignant par la lettre  $\delta$  diversement affectée d'accents et d'indices, des nombres dont les carrés sont inférieurs à 1,

$$F(x) + F(\xi) - 2F(x_1) = \delta_1 \sigma (l - k)^2$$

$$\text{et} \quad F(x') + F(\xi) - 2F(x'_1) = \delta'_1 \sigma (l + k)^2.$$

$$\text{D'où} \quad 2F(x'_1) - 2F(x_1) = F(x') - F(x) + 2\delta\sigma(l^2 + k^2),$$

et en divisant tout par  $x' - x = 4k$ ,

$$(1) \quad \frac{F(x'_1) - F(x_1)}{x'_1 - x_1} = \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} + \delta\sigma \frac{l^2 + k^2}{2k}.$$

Telle est la formule que nous allons utiliser.

Soit  $\theta$  un point quelconque de P. Sur le segment  $\theta - \frac{1}{2^n}$  à  $\theta + \frac{1}{2^n}$ , nous pouvons trouver (théorème V) deux points  $\theta_n$  et  $\theta'_n$  de P, tels que  $\theta'_n = \theta_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ . Appliquons la formule (1), en y faisant jouer les rôles de  $x$  et de  $x'$  respectivement à  $\theta_{n-1}$  et  $\theta'_{n-1}$ , ceux de  $x_1$  et de  $x'_1$  à  $\theta_n$  et  $\theta'_n$ .  $k$ , demi-distance de  $x_1$  et de  $x'_1$ , vaut  $\frac{1}{2^{n+2}}$ ;  $|l|$ , distance du milieu de

$(\theta_{n-1}, \theta'_{n-1})$  au milieu de  $(\theta_n, \theta'_n)$  est au plus égal à  $\frac{3}{4} \left( \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{9}{2^{n+2}}$ .

D'où  $\frac{l^2 + k^2}{2k} < \frac{41}{2^{n+2}}$ . Enfin, soit  $\frac{F(\theta'_n) - F(\theta_n)}{\theta'_n - \theta_n} = Q \left( \theta_n, \frac{1}{2^{n+1}} \right) = C_n$ . On a

$$(2) \quad C_n = C_{n-1} + 41 \frac{\delta_n \sigma}{2^{n+2}}.$$

En ajoutant membre à membre les  $n$  premières relations (2), il vient

$$C_n = C_0 + 41 \sigma \sum_1^n \frac{\delta_n}{2^{n+2}}.$$

Ceci montre que  $C_n$  tend vers une limite  $\Phi(\theta)$  quand  $n$  croît.

On a dès l'rs, en ajoutant membre à membre les relations (2) pour  $n + 1$ ,  $n + 2$ , ...  $n + p$ , et faisant croître  $p$ :

$$(3) \quad C_n = \Phi(\theta) + 41 \frac{\delta^{(n)} \sigma}{2^{n+2}}.$$

Soit maintenant  $h$  un nombre quelconque non nul, inférieur à 1 en valeur absolue. On a :

$$h = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \dots,$$

les  $a_i$  non nuls étant tous de même signe et égaux à 1 en valeur absolue. Posons

$$h_1 = h, \dots, h_n = \frac{a_n}{2^n} + \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \dots. \text{ On a } |h_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\text{Calculons } F(\theta + h_{n+1}) - F(\theta + h_n).$$

Si  $a_n = 0$ , cette différence est nulle.

Si  $|a_n| = 1$ , on peut, d'après  $|h_n - h_{n+1}| = \frac{1}{2^n} = 2(\theta'_n - \theta_n)$ , appliquer la formule (1).  $x_1$  et  $x'_1$  sont remplacés respectivement par  $\theta_n$  et par  $\theta'_n$ ,  $x$  et  $x'$  par  $\theta + h_{n+1}$  et  $\theta + h_n$  (ou l'inverse selon que  $h$  est positif ou négatif). On a  $k = \frac{1}{2}(\theta'_n - \theta_n) = \frac{1}{2^{n+2}}$ .  $|l|$  est la distance du milieu de  $(\theta_n, \theta'_n)$  au milieu de  $(\theta + h_n, \theta + h_{n+1})$  intervalle égal en longueur à  $\frac{1}{2^n}$  et dont l'extrémité  $\theta + h_{n+1}$  est distante de  $\theta$  de  $\frac{1}{2^n}$  au plus. Donc cette fois encore  $|l|$  est au plus égal à  $\frac{9}{2^{n+2}}$  et  $\frac{l^2 + k^2}{2k} \leq \frac{41}{2^{n+2}}$ . Donc,

$$\frac{F(\theta + h_n) - F(\theta + h_{n+1})}{h_n - h_{n+1}} = \frac{F(\theta'_n) - F(\theta_n)}{\theta'_n - \theta_n} + \delta'' \sigma \frac{41}{2^{n+2}} = \Phi(\theta) + 41 \frac{\delta_1^{(n)} \sigma}{2^{n+1}}$$

et dans tous les cas ( $a_n = 0$  ou  $a_n = \pm 1$ )

$$F(\theta + h_n) - F(\theta + h_{n+1}) = \frac{a_n}{2^n} \Phi(\theta) + \delta^{(n)} \frac{41}{2^{2n+1}} a_n \sigma.$$

D'où, en ajoutant de  $n=1$  à  $n$  infini, et en vertu de la continuité de  $F(\theta)$ .

$$(4) \quad F(\theta + h) - F(\theta) = h\Phi(\theta) + \frac{41}{2} \delta \sigma h^2$$

relation qui démontre que  $\Phi(\theta)$  est la dérivée de  $F$  au point  $\theta$  (première partie de l'énoncé).

Si  $\theta + h$  est sur  $P$ , nous pouvons ci-dessus remplacer le point  $\theta$  par le point  $\theta + h$ , et l'accroissement  $h$  par  $-h$ . On trouve alors

$$\left| \frac{\Phi(\theta + h) - \Phi(\theta)}{h} \right| < 41 \sigma,$$

ce qui démontre la seconde partie.

Pour démontrer la troisième partie, on utilise les raisonnements de Baire sur la discontinuité ponctuelle de  $f(\theta)$  sur  $P$ .

Si  $P$  présente le caractère (A) et si  $F(\theta)$  possède une dérivée seconde généralisée, toute portion  $P_1$  de  $P$  en contient une autre  $P_2$  où les conclusions du théorème VI sont exactes.

Il suffit que,  $\theta$  étant quelconque sur  $P_2$ ,  $|R(\theta, u)|$  soit borné moyennant  $0 < |u| < \eta$ ,  $\eta$  étant indépendant de  $\theta$ .

Des raisonnements analogues à la démonstration du théorème VI permettent de montrer que, si  $F(\theta)$  possède en tout point  $\theta$  une dérivée seconde généralisée  $f(\theta)$ , les points où  $\Phi(\theta)$ , dérivée de  $F(\theta)$ , ou bien n'existe pas, ou bien n'admet point  $f(\theta)$  pour dérivée approximative (ou exacte), ces points forment un ensemble de mesure nulle.

Quand  $f(\theta)$  est la somme d'une série trigonométrique partout convergente, les énoncés précédents relatifs à  $F(\theta)$  sont un peu plus précis. On pourra consulter sur ces questions mes deux notes des Comptes Rendus de l'Académie des sciences d'Amsterdam (fasc. de mai et juin 1920).

**Idrodinamica. — Circuitazione superficiale. I: Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione.** Nota di MARIO PASCAL, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

È ben noto come i problemi idrodinamici si studino d'ordinario nel piano, ammettendo l'ipotesi, contraddetta del resto dalla più elementare esperienza, che il moto del fluido avvenga per piani paralleli, e che quindi i risultati raggiunti per uno di tali piani valgano del pari per tutti gli altri. Se questo modo di considerare i problemi idrodinamici porta a grandi semplificazioni, specialmente in vista dell'ausilio che si può chiedere alla teoria delle funzioni di variabile complessa e della rappresentazione conforme, è ben evidente però che esso non può fornire che un'idea molto ristretta sull'effettivo moto del fluido nello spazio. Sarebbe perciò molto desiderabile che si riuscisse sempre a trasformare i teoremi del moto di una corrente fluida piana parallela, in teoremi del moto di una corrente nello spazio.

Appunto perseguendo un tale scopo nei riguardi del teorema della *forza sustentatrice*, dimostrato da N. Joukowski <sup>(1)</sup> nel caso di una corrente piana parallela, ci si è presentato il problema di estendere l'ordinario concetto di circuitazione lungo linee chiuse.

In questa Nota I noi definiremo pertanto la *circuitazione di un vettore lungo una superficie chiusa, o circuitazione superficiale*.

<sup>(1)</sup> N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki]. Paris. Gauthier Villars, 1916. V. anche: H. Lamb, *Hydrodynamics*; Cambridge, 1916, pag. 666.

È da rimarcare subito il fatto notevole che, mentre la circuitazione lungo linee chiuse è un *numero*, la circuitazione superficiale si presenta come un *vettore*. Questa differenza permette del resto di indagare più profondamente la natura dell'ordinaria circuitazione.

Nella Nota II infatti, dando l'espressione vettoriale della circuitazione superficiale, faremo vedere che, considerato il numero che rappresenta la ordinaria circuitazione come il modulo di un vettore, *tale vettore è precisamente quello al quale si riduce il vettore della circuitazione superficiale, quando la superficie che si considera tende a schiacciarsi su un piano*. Nella stessa Nota dimostreremo per la circuitazione superficiale teoremi tutt'affatto analoghi a quelli ben noti riguardanti la circuitazione lungo linee chiuse.

Infine nella Nota III faremo vedere come col nuovo concetto di circuitazione superficiale possa agevolmente estendersi al caso spaziale il *teorema della forza sostentatrice*.

1. Sia data una qualunque superficie chiusa  $\sigma$  esposta ad una corrente fluida: su questa non vogliamo per ora fare alcuna ipotesi. In ogni punto della superficie sia definito il vettore  $V$  della velocità. Supporremo, inoltre, per semplicità, che l'origine degli assi cartesiani ortogonali sia nell'interno della superficie.

Immaginando allora di sezionare la superficie data, mediante piani paralleli al piano  $xy$ , e vicini quanto si vuole l'uno all'altro, consideriamo per ogni punto della superficie la componente tangenziale <sup>(1)</sup> della proiezione della velocità su quello dei piani paralleli al piano  $xy$  che passa per il punto, e sia  $V_t^{xy}$ . Diremo allora *circuitazione delle velocità lungo la superficie chiusa  $\sigma$ , secondo la direzione dell'asse delle  $z$ , l'integrale doppio*

$$(1) \quad C^{xy} = \int_{\sigma} V_t^{xy} \sin \gamma \, d\sigma$$

essendo  $\gamma$  l'angolo che la normale interna alla superficie  $\sigma$  forma con l'asse  $z$ .

Possiamo trovare subito una espressione più significativa della (1).

La velocità  $V$  in un punto  $P$  della superficie abbia per componenti  $u, v, w$ ; siano  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli che la normale interna in  $P$  fa con gli assi; e  $\pi - \alpha', \pi - \beta', \gamma' = 90^\circ$  gli angoli che con gli assi forma la proiezione della normale interna sul piano parallelo al piano  $xy$  passante per  $P$ . Proiettando  $V$  su tale piano, in  $V^{xy}$ , ed osservando che le componenti di  $V^{xy}$  sono ancora  $u$  e  $v$ , si ottiene

$$(2) \quad V_t^{xy} = u \sin \alpha' - v \cos \alpha';$$

(1) Il senso dato alla tangente essendo contrario a quello della rotazione degli indici di un orologio volto verso il senso positivo dell'asse  $z$ .



dalle relazioni

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 \gamma &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \\ \operatorname{sen} \gamma &= -\cos \alpha \cos \alpha' - \cos \beta \operatorname{sen} \alpha'\end{aligned}$$

esistenti fra gli angoli  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha'$ , si ricava

$$(3) \quad \cos \alpha' = -\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}, \quad \operatorname{sen} \alpha' = -\frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

La (1) perciò — a meno del segno che del resto può variare a seconda del senso col quale si intende calcolato l'integrale doppio — può scriversi

$$(4) \quad C^{xy} = \int_{\sigma} \{ u \cos \beta - v \cos \alpha \} d\sigma.$$

Analogamente, immaginando di operare sezioni della superficie con piani vicini quanto si vuole l'uno all'altro e paralleli ai piani  $zx$  ed  $yz$ , e ripetendo il ragionamento fatto, si ottengono le espressioni

$$(5) \quad C^{zx} = \int_{\sigma} \{ w \cos \alpha - u \cos \gamma \} d\sigma$$

$$(6) \quad C^{yz} = \int_{\sigma} \{ v \cos \gamma - w \cos \beta \} d\sigma$$

che sono rispettivamente le *circuitazioni delle velocità lungo la superficie  $\sigma$  secondo le direzioni degli assi  $y$  e  $z$ , nel senso positivo che abbiamo già fissato.*

Ponendo l'equazione della superficie sotto la forma  $z = z(xy)$ , mediante formole note, e chiamando  $p$  e  $q$  le derivate di  $z$ , la (4) può anche scriversi

$$(7) \quad C^{xy} = \iint \{ uq - vp \} dx dy,$$

ed analoga forma possono evidentemente prendere anche le (5), (6).

2. Mostriamo ora che *la circuitazione lungo una superficie chiusa secondo una qualsiasi direzione, si può esprimere linearmente mediante  $C^{xy}, C^{zx}, C^{yz}$ .*

Sia  $\zeta$  una retta uscente dall'origine e che faccia con gli assi gli angoli  $a, b, c$ ; sezioniamo la superficie mediante piani perpendicolari a  $\zeta$ .

Siano inoltre  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  rispettivamente gli angoli con gli assi della normale interna in un punto  $P$ , e della tangente in  $P$  alla linea sezione della superficie con il piano passante per  $P$  e perpendicolare a  $\zeta$ .

Si hanno le relazioni

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 \cos \alpha + \cos \beta_1 \cos \beta + \cos \gamma_1 \cos \gamma &= 0 \\ \cos \alpha_1 \cos a + \cos \beta_1 \cos b + \cos \gamma_1 \cos c &= 0\end{aligned}$$

dalle quali si ricavano subito — a meno di un fattore  $q$  — i valori di  $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$ .

Se  $\gamma'_1$  è l'angolo che la normale interna fa con  $\zeta$ , si ha

$$C\zeta = \int_{\sigma} \varrho [u \{ \cos \beta \cos c - \cos \gamma \cos b \} + \\ + v \{ \cos \gamma \cos a - \cos \alpha \cos c \} + \\ + w \{ \cos \alpha \cos b - \cos \beta \cos a \} ] \operatorname{sen} \gamma'_1 d\sigma$$

ma, calcolando  $\varrho$ , si ha facilmente

$$\varrho = \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma'_1}$$

e quindi

$$(8) \quad C\zeta = C^{yz} \cos a + C^{zx} \cos b + C^{xy} \cos c.$$

La formola precedente dimostra l'assunto e ci fa vedere che  $C\zeta$  non è altro che la proiezione sulla direzione  $\zeta$  del vettore  $\mathbf{C}$  della circuitazione superficiale, le cui componenti sono  $C^{yz}$ ,  $C^{zx}$ ,  $C^{xy}$ .

**Matematica.** — *Su una superficie, del sesto ordine e della sesta classe, le cui asintotiche sono cubiche sghembe.* Nota di ALESSANDRO TERRACINI, presentata dal Socio C. SEGRE.

In una ricerca, che sto compiendo, delle superficie le cui asintotiche, dei due sistemi, sono cubiche sghembe, ho rilevato, tra le altre, una superficie di tal fatta, del sesto ordine e della sesta classe<sup>(1)</sup>, che si presenta in modo particolarmente semplice, e che non mi consta sia già stata osservata. A questa  $F^6$  si può giungere colle seguenti considerazioni.

1. Avremo ripetutamente a occuparci, nel seguito, di una particolare relazione di posizione tra una cubica sghemba  $C^3$  e una quadrica (non degenera)  $Q$ , relazione che, come osserveremo fra poco, fu già considerata, per quanto con una definizione un po' diversa. Diremo, per brevità, che una  $C^3$  sghemba e una quadrica  $Q$  sono in posizione  $\gamma$ , quando  $Q$  è la quadrica fondamentale della polarità (ordinaria) definita come prodotto della polarità nulla che trasforma i punti della  $C^3$  nei rispettivi piani osculatori per la involuzione biassiale di cui sono assi due tangenti della  $C^3$  (la polarità nulla e questa involuzione sono tra loro permutabili)<sup>(2)</sup>. Risulta

(1) Essa è ben distinta dalla  $F^6$ , di sesta classe, con asintotiche cubiche, che ammette  $\infty^2$  trasformazioni proiettive in sè (cfr. Enriques, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse*, e *Intorno alla Memoria: le superficie con infinite....*, Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere e Arti, serie VII, voll. IV-V).

(2) Cfr. p. es. Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, Bd. III (Leipzig 1909), pag. 233.

senz'altro dalla precedente definizione che vi sono  $\infty^2$  quadriche in posizione  $\gamma$  rispetto a una data  $C^3$  sghemba, e  $\infty^5$   $C^3$  sghembe in posizione  $\gamma$  rispetto a una data quadrica; che la relazione definita è autoduale; e che, infine, tutte le figure costituite da una  $C^3$  e da una quadrica in posizione  $\gamma$  sono tra loro proiettive.

In base a quest'ultima osservazione, potremo dedurre alcune proprietà che ci serviranno nel seguito, ragionando sulla  $C^3$  sghemba che, rispetto a un tetraedro di riferimento  $M_1 M_2 M_3 M_4$ , ha per equazioni parametriche

$$(1) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t^3 : t^2 : t : 1,$$

e assumendo come assi della involuzione sopra considerata le due tangenti  $M_1 M_2$ ,  $M_1 M_3$ , cosicchè la relativa quadrica  $Q$  ha per equazione (1)

$$(2) \quad x_1 x_4 - 3x_2 x_3 = 0.$$

Su queste equazioni riesce ovvia la verifica del fatto, noto, che una  $C^3$  e una quadrica in posizione  $\gamma$  si osculano in due punti; e precisamente, in ciascuno dei due punti distinti che esse hanno in comune, la quadrica contiene (come generatrici di uno stesso sistema) le tangenti in essi alla cubica, e tocca i corrispondenti piani osculatori. Questa proprietà, che segue anche in modo immediato dalla primitiva definizione geometrica, non è tuttavia caratteristica.

Ancora, gioverà tener presente per il seguito, ciò che si verifica senza difficoltà sulla rappresentazione analitica, che, date una  $C^3$  sghemba e una  $Q$  in posizione  $\gamma$ , se  $r$  e  $s$  sono rispettivamente una corda e un asse (intersezione di due piani osculatori) della  $C^3$ , mutuamente polari rispetto a  $Q$ , i punti di appoggio (di  $r$ ) e di osculazione (di  $s$ ), essendo tutti distinti, dette  $A_1, A_2$  e  $A_3, A_4$  rispettivamente le intersezioni di  $Q$  con  $r$  e con  $s$ , i due punti di osculazione della  $C^3$  e della  $Q$  cadono su due lati opposti del quadrilatero sghembo  $A_1 A_3 A_2 A_4$ ; e le generatrici della  $Q$  che, secondo quanto abbiamo già detto, toccano in essi la  $C^3$  appartengono alla schiera cui non appartengono quei due lati.

Sebbene ciò non sia necessario per il seguito, vogliamo anche osservare, omettendo la dimostrazione, che alla definizione iniziale di questo numero si può sostituire la seguente: *una  $C^3$  sghemba e una  $Q$  sono in posizione  $\gamma$ , quando sussistano simultaneamente le due seguenti proprietà:*

a) *esiste sulla  $C^3$  una involuzione (ordinaria)  $I$ , tale che punti di  $C^3$ , e anche piani osculatori di  $C^3$ , coniugati in  $I$  sono altresì coniugati rispetto a  $Q$ ;*

(1) Per altre espressioni geometriche del legame fra la cubica (1) e la quadrica (2) cfr. F. Meyer, *Apolarität und rationale Curven*. (Tübingen 1883), pag. 120 e segg.

b) la polarità rispetto a  $Q$  fa corrispondere alle singole corde della  $C^3$  che sono congiungenti di punti coniugati in  $I$  i singoli assi della  $C^3$  che sono intersezioni di piani osculatori coniugati, senza che i punti di osculazione di questi coincidano necessariamente coi punti di appoggio di quelle.

La condizione a), presa da sola, caratterizza poi le  $C^3$  sghembe e le  $Q$  che si osculano in due punti, in modo che fra i loro elementi in questi due punti intercedano quelle particolari relazioni che abbiamo più sopra specificate.

2. L'esistenza della  $F^6$ , cui abbiamo alluso da principio, si può ora stabilire col seguente teorema: *Siano  $H, K, \pi, \sigma$  rispettivamente due punti e due piani distinti coniugati rispetto a una quadrica (non degenera)  $Q$ , le due coppie separandosi armonicamente, e le due rette  $HK$  e  $\pi\sigma$  essendo mutuamente polari rispetto a  $Q$ . Le cubiche sghembe in posizione  $\gamma$  rispetto a  $Q$ , le quali passano per  $H, K$  ed osculano  $\pi, \sigma$ , si ripartiranno in due sistemi  $\infty^1$ , ricoprenti una medesima superficie del sesto ordine e della sesta classe, di cui esse sono le asintotiche.*

Per dimostrarlo, posto  $r \equiv HK$ , e  $s \equiv \pi\sigma$ , e denominate  $A_1, A_2$  e  $A_3, A_4$  le intersezioni di  $r$  e di  $s$  con  $Q$ . come al numero precedente, applicando una osservazione ivi fatta, rileviamo anzitutto che le eventuali  $C^3$  sghembe soddisfacenti alle condizioni enunciate nel precedente teorema devono avere i loro punti di osculazione con  $Q$  sulle due rette  $A_1A_3, A_2A_4$  oppure sulle due rette  $A_1A_4, A_2A_3$  (coll'ulteriore particolarità allora osservata). Viceversa, possiamo a stabilire che esistono  $\infty^1 C^3$  nelle condizioni richieste, i cui punti di osculazione con  $Q$  cadono, p. es., l'uno su  $A_1A_3$  e l'altro su  $A_2A_4$ . A tal fine, assumiamo un sistema di coordinate proiett. omog.  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , col tetraedro fondamentale  $A_1A_2A_3A_4$ , in modo da avere per i punti di  $Q$  la rappresentazione parametrica

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = u : v : uv : 1.$$

Chiamiamo poi  $S'$  la schiera di  $Q$  cui appartiene  $A_1A_3$ ,  $S$  l'altra schiera. Allora, se  $E, F$  sono due punti rispettivamente di  $A_1A_3, A_2A_4$ , aventi per coordinate  $1, 0, v_1, 0$  e  $0, v_2, 0, 1$ , ogni  $C^3$  sghemba che passi per  $E, F$ , vi tocchi le generatrici della schiera  $S$  uscenti da essi, e vi osculi i piani ivi tangenti alla  $Q$  si può rappresentare parametricamente colle

$$(3) \quad v_1x_4 - x_2 : v_1x_1 - x_3 : v_2x_4 - x_2 : v_2x_1 - x_3 = at^3 : bt^2 : ct : d.$$

Scrivendo che la  $C^3$  (3) deve contenere i punti  $H(\theta, 1, 0, 0)$  e  $K(-\theta, 1, 0, 0)$  e osculare i piani  $\pi(x_1 + i\theta x_2 = 0)$  e  $\sigma(x_1 - i\theta x_2 = 0)$ , si trova

$$(4) \quad \begin{cases} bc v_2 - ad v_1 = 0 & ; \quad 3ac v_1 v_2 \theta^2 = b^2; \\ bc - ad = \pm c\sqrt{ac}(v_2 - v_1)\theta & ; \quad 9ad v_2 = bc v_1. \end{cases}$$



Le (4) costituiscono un sistema di quattro equazioni omogenee di secondo grado in  $a, b, c, d$ : la condizione affinchè esse coesistano con  $a, b, c, d$  tutte diverse da zero è, come si trova subito

$$(5) \quad v_1 = 3v_2.$$

Allora, ulteriormente, si ricava

$$a : b : c : d = c^3 v_2^2 \theta^2 : 3c^3 v_2^2 \theta^2 : c : 1;$$

cosicchè le (3), scrivendo ora  $t$  in luogo di  $ct$ , divengono

$$(6) \quad \begin{aligned} 3v_2 x_4 - x_2 : 3v_2 x_1 - x_3 : v_2 x_4 - x_2 : v_2 x_1 - x_3 = \\ = v_2^2 \theta^2 t^3 : 3v_2^2 \theta^2 t^2 : t : 1. \end{aligned}$$

Orbene, che ciascuna delle  $\infty^1$  cubiche (6) sia effettivamente in posizione  $\gamma$  rispetto alla quadrica  $Q$  segue subito dal confronto delle (6) e della equazione di  $Q$  ( $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$ ) rispettivamente colle (1) e (2) del numero precedente. Le (6) equivalgono ovviamente alle

$$(7) \quad \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \\ = 3v_2^2 \theta^2 t^2 - 1 : v_2^2 \theta^2 t^3 - 3v_2 t : 3v_2^3 \theta^2 t^2 - 3v_2 : v_2^2 \theta^2 t^3 - t. \end{aligned}$$

Abbiamo così costruito un primo sistema  $\infty^1, \Sigma$ , di  $C^3$  che soddisfanno alle condizioni richieste. Un analogo sistema,  $\Sigma'$ , è formato dalle  $C^3$  analoghe a quelle ora trovate, i cui punti di osculazione colla  $Q$  stanno, rispettivamente, su  $A_2 A_3, A_1 A_4$ , nei punti  $(0, 1, u_1, 0)$  e  $(u_2, 0, 0, 1)$  con

$$(8) \quad u_1 = 3u_2.$$

Queste ultime  $C^3$  hanno per equazioni parametriche

$$(9) \quad \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \\ = u_2^3 t^3 - 3\theta^2 u_2 t : 3u_2^2 t^2 - \theta^2 : 3u_2^3 t^2 - 3\theta^2 u_2 : u_2^2 t^3 - \theta^2 t. \end{aligned}$$

Resta infine a dimostrare che le  $C^3$  (7) e (9) ricoprono una medesima superficie di cui sono asintotiche. Ora, per giustificare la prima affermazione, basta osservare che, se nelle (7) e (9) si scrive rispettivamente  $u$  e  $v$  in luogo di  $\frac{1}{t}$ , quelle cubiche appaiono risp. come curve  $v = v_2$  e  $u = u_2$  della superficie

$$(10) \quad \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \\ = 3nuv^2 - mu^3 : nv^3 - 3mu^2 v : 3uv(nv^2 - mu^2) : nv^2 - mu^2 \end{aligned}$$

dove si è scritto  $\frac{n}{m}$  al posto di  $\theta^2$ . Quanto alla seconda affermazione, basta

mostrare che, se  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  sono due  $C^3$ , risp. di  $\Sigma, \Sigma'$ , passanti per un punto  $P$ , dato dalle (10) per  $u = u_2, v = v_2$ , i piani osculatori in  $P$  a quelle due cubiche coincidono. Ora si osservi che  $P$  è allineato coi punti  $[u_2, 3v_2]$  <sup>(1)</sup>,  $[3u_2, v_2]$  della  $Q$ . e si trasformi questa relazione colle polarità nulle definite risp. da  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ , tenendo presente che, p. es., la prima è il prodotto della polarità rispetto a  $Q$  per la involuzione biassiale che ha per assi le rette  $v = v_2, v = 3v_2$  della schiera  $S$ : risulta che quei due piani osculatori contengono entrambi la retta dei punti  $[u_2, v_2], [3u_2, 3v_2]$  (i quali, per quanto precede, non sono allineati con  $P$ ) e quindi coincidono.

Che l'ordine della superficie costruita sia *sei* risulta dalle (10) che la rappresentano su un piano: se si assumono, su questo, coordinate proiett. omog.  $u, v, 1$ , alle sezioni piane della superficie corrispondono  $C^4$  per i 4 punti allineati — costituenti una quaterna armonica —  $T_1(1, 0, 0)$   $T_2(0, 1, 0)$   $T_3, T_4(\sqrt[4]{n}, \pm \sqrt[4]{m}, 0)$ , con un nodo in  $O(0, 0, 1)$ , in cui sono tangenti fisse (tripunte)  $OT_3, OT_4$ . E, poichè la definizione della  $F^6$  è autoduale, segue che anche la classe è *sei*: del resto le coordinate del piano tangente alla  $F^6$  nel punto (10) si calcolano subito, p. es., servendosi di una osservazione fatta poco fa, e si trova:

$$(11) \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \\ = nv^3 + 3mu^2v : 3nuv^2 + mu^3 : -(nv^2 + mu^2) : -3uv(nv^2 + mu^2).$$

Dalla rappresentazione piana risulta subito che la  $F^6$  possiede due diverse coppie di sistemi coniugati costituiti da cubiche piane razionali: l'uno è rappresentato sul piano dai fasci di rette  $T_3$  e  $T_4$ ; l'altro dai due fasci di coniche per  $T_1, T_2, O$ , con le rette  $OT_3$ , oppure  $OT_4$  tangenti in  $O$ : ogni cubica del primo [secondo] fascio sta in un piano con una (conveniente) cubica del terzo [quarto]. I due sistemi  $\infty^1$  di piani che in tal modo prendono origine, inviluppano i coni circoscritti, rispettivamente da  $H$  e da  $K$ , alla quadrica  $3x_1x_2 - 2x_3x_4 = 0$ .

L'eliminazione di  $u, v$  dalle (10) porta all'equazione

$$(12) \quad -27(mx_1^2 - nx_2^2)^2 x_1x_2 + (27m^2x_1^4 + 27n^2x_2^4 - 378mnx_1^2x_2^2)x_3x_4 + \\ + 576mnx_1x_2x_3^2x_4^2 - 256mnx_3^3x_4^3 = 0$$

della  $F^6$ . Su di essa è agevole riscontrare l'esistenza delle quattro coniche doppie

$$\begin{cases} \sqrt[4]{m}x_1 \pm \sqrt[4]{n}x_2 = 0 \\ 9x_1x_2 - 8x_3x_4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt[4]{m}x_1 \pm i\sqrt[4]{n}x_2 = 0 \\ 3x_1x_2 - 4x_3x_4 = 0 \end{cases}$$

concorrenti nei due punti tripli  $A_3$  e  $A_4$ . Sono, ulteriormente, doppi per

(1) Indichiamo col simbolo  $[u, v]$  quel punto della  $Q$ , i cui parametri sono  $u$  e  $v$ .

la  $F^6$  i punti H e K. E dualmente. La  $F^6$  è luogo di coniche, passanti per i due punti fissi  $A_3, A_4$  e quivi tangenti rispettivamente ai piani  $x_4 = 0, x_3 = 0$ , disposte a terne nei piani per  $A_3 A_4$ . Tra le asintotiche della  $F^6$  vi sono i lati del quadrilatero sghembo  $A_1 A_3 A_2 A_4$ .

Senza soffermarci su altre proprietà della  $F^6$ , p. es. sulle proiettività che la mutano in sè, il cui esame potrebbe farsi agevolmente in base alla generazione della superficie, notiamo piuttosto che al variare dei punti H, K sulla retta che li unisce (cioè al variare di  $\frac{m}{n}$ ) si ottengono  $\infty^1 F^6$  del tipo considerato, le quali costituiscono, secondo la (12), un sistema di indici (2, 2). Le loro asintotiche, dei due sistemi, costituiscono *due congruenze cubiche sghembe (tutte in posizione  $\gamma$  rispetto a' Q), di ordine e classe due, le quali sono dotate della proprietà che le  $\infty^3$  tangenti alle  $C^3$  di ciascuna congruenza segano Q in coppie di punti tali, che le generatrici di una schiera passanti per essi costituiscono coppie di una medesima proiettività (ciclica, del sesto ordine)*. Ciò si può verificare in modo diretto, e segue anche facilmente da considerazioni più generali che saranno svolte in altra occasione.

Batteriologia agraria. — *Ulteriori ricerche sui bacilli radicali della Diplotaxis erucoides* D. C. (1). Nota di R. PEROTTI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

In una precedente Nota (2) ho riferito come nell'esame di alcuni campioni di radici della *Diplotaxis erucoides* D. C. constatai la presenza di una forma bacillare non avente valore patologico, ma capace di attività proteolitica e di attacco dei carboidrati insolubili, sì da riuscire con ogni probabilità utile allo sviluppo della pianta ospite.

Riferisco nella Nota presente di avere proseguito lo studio dell'azione di detta forma sugli idrati di carbonio e di essere in possesso di alcuni nuovi dati di fatto che possono illuminarci sulla biologia e sul significato biologico del detto simbionte radicale.

I campioni di *Diplotaxis* formanti oggetto di studio provenivano dai colli Parioli e da un orto nei pressi del Campo Verano.

Dalle colture a piatto con agar-*Diplotaxis* vennero isolati tre bacilli, le cui colonie presentavano qualche diversità di aspetto. Predominava la forma di colonie già da me descritta; ma non poco numerose altre se ne svilup-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio batteriologico della R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Perotti R, *Su la presenza di una specie batterica nelle radici della Diplotaxis erucoides*. D. C. Rend. Acc. Lincei, vol. XXVIII, pag. 331.

parono con due differenti gradi di opacità che erano in relazione alla forma, in alcune più contratta e lenticolare rilevata, in altre maggiormente estesa, appiattita ed alquanto translucida.

Dei tre bacilli — che mi limito ad indicare qui semplicemente come differenti stipiti — fu eseguito lo studio comparativo negli stessi mezzi di nutrizione, dappoichè morfologicamente la diversità non era affatto apprezzabile, risultandone questi principali caratteri differenziali:

STIPITE *A* (originario). — Colonie grandi, rotonde, lenticolari depresse, di colore bianco-opaco, a consistenza gelatinosa.

In mezzi solidi la patina, leggermente lobata, è scolante nell'acqua di condensazione.

Le vecchie colture ingialliscono.

La gelatina è fluidificata alquanto rapidamente.

Mobilità pronunciata.

STIPITE *B*. — Colonie di maggiori dimensioni, appiattite alquanto irregolari nella forma, mucillaginose.

Colture su substrati solidi in forma di patina sottile, trasparente, poco lobata, rapidamente scolante nell'acqua di condensazione.

Nelle vecchie colture la patina ingiallisce.

La gelatina è energicamente fluidificata.

Mobilissimo.

STIPITE *C*. — Colonie più piccole, molto rilevate a lente, opache.

Colture su substrati solidi in forma di patina bianca, lobata, non scolante nell'acqua di condensazione.

Nelle vecchie colture non si ha ingiallimento della patina.

La gelatina presenta soltanto inizio di fluidificazione.

Debole mobilità.

La differenza tra la forma *A*, originaria, e la *B* non è notevole; mentre notevole è fra *A* e *C*: tuttavia l'interpretazione dei caratteri differenziali la volli riservare a dopo ottenuti i risultati dell'azione dei tre stipiti sugli idrati di carbonio.

Per evitare la gelificazione del substrato, già notata nella precedente serie delle mie ricerche, aggiunsi fecola di patate al brodo-*Diplotaxis* in minore proporzione e precisamente in quella dell'1 %, sterilizzando il substrato in corrente di vapore. Il fenomeno, difatti, questa volta non si verificò.

In una prima ricerca fu sperimentata soltanto la forma originaria; ed essa, che si sviluppò rigogliosamente, portò a questi risultati:

|                              | Controllo | Coltura attiva |
|------------------------------|-----------|----------------|
| Zuccheri riduttori . . . gr. | 0,26 %    | 0,06 %         |
| Saccarosio. . . . . "        | 1,74 "    | 0,00 "         |
| Fecola . . . . . "           | 0,90 "    | 0,25 "         |



Il microrganismo, adunque, utilizza glucosio e saccarosio presenti nel brodo-*Diploetaxis*, ma attacca e trasforma notevolmente la fecola e, cioè, nelle porzioni del 72,23 %.

Per meglio rendere evidente l'azione esercitata sulla fecola, escludendo ogni altra forma di carboidrato, decisi di rinnovare le colture nella seguente soluzione a composizione perfettamente controllabile: acqua gr. 1000, fosfato bipotassico 1, cloruro di calcio 0,1, solfato di magnesio 0,3, cloruro di sodio 0,1, cloruro ferrico 0,01, più asparagina nelle porzioni dell'1 % e fecola di patate parimenti all'1 %.

L'attacco della fecola, sebbene meno avanzato, fu anche in questo caso evidente per il rigoglioso sviluppo della forma, ottenendosi i seguenti reperti analitici:

|                            | Controllo | Coltura attiva |
|----------------------------|-----------|----------------|
| Zuccheri riduttori . . gr. | 0,00 %    | tracce %       |
| Fecola . . . . . "         | 0,80 "    | 0,43 "         |

Nelle identiche condizioni la ricerca fu ripetuta per gli stipiti *B* e *C* con i seguenti risultati:

|                          | Controllo | Stipite <i>B</i> | Stipite <i>C</i> |
|--------------------------|-----------|------------------|------------------|
| Zuccheri riduttori . gr. | 0,00 %    | tracce %         | tr. sens. %      |
| Fecola . . . . . "       | 0,80 "    | 0,74 "           | 0,66 "           |

L'attacco del carboidrato fu quindi debole per lo stipite *B*, non raggiungendo che il 7,5 % e notevolmente maggiore per lo stipite *C*, con il quale raggiunse il 17,50 %. Con lo stipite *A*, invece, si era raggiunta l'utilizzazione di circa il 50 % della fecola iniziale.

In ogni caso però i diversi stipiti si dimostrano capaci di segregare diastasi per cui sono solubilizzati i carboidrati insolubili ed utilizzati nella loro nutrizione.

Questa secrezione apparirebbe tuttavia relativamente tenue e lenta, regolata quasi al bisogno della forma, e tale da non disturbare il metabolismo dei tessuti che la ospitano. La formazione degli zuccheri riduttori è, difatti, appena sensibile nelle colture in proporzione di tracce; ed inoltre, allevando tutti e tre gli stipiti su blocchetti di patata, nonostante il rigoglioso sviluppo del microrganismo, i blocchetti hanno mantenuto per mesi la loro forma e la loro compagine organica.

Alle caratteristiche della forma, segnalate nella mia prima Nota, si deve quindi aggiungere la proprietà che essa presenta di attaccare moderatamente i carboidrati insolubili. Mentre queste circostanze — la seconda, forse, molto più della prima — contribuiscono allo sviluppo del microrganismo, non possono non avere il loro grande peso nella spiegazione dei rapporti di simbiosi *mutualistica* fra esso e la crucifera.

Per quanto si riferisce alla determinazione specifica dei tre stipiti, si rileva da tutto il suesposto come per la loro azione sui proteici e sui carboidrati il comportamento, sebbene non identico, è però analogo. Diversificano soltanto per l'intensità dell'attacco; maggiore in alcuni, minore in altri. Certo trattasi di microrganismi dello stesso tipo funzionale; non si potrebbe ben dire se originario od acquisito per adattamento a vivere nel singolare ambiente della radice.

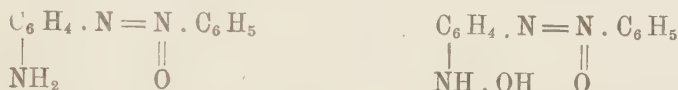
Le due forme, del cui studio riferii nella prima Nota, presentavano tra loro tali caratteri da permettere di asserire con sicurezza che trattavasi di due stipiti in differente grado di *attività*. Delle tre forme, di cui è oggetto la Nota presente, esiterei a dire che trattasi soltanto di differenze di attività di una stessa specie; ma deve piuttosto ritenersi che abbia a trattarsi di forme appartenenti ad almeno due specie differenti, le quali, venendo a trovarsi nelle identiche condizioni di vita, abbiano manifestato la stessa funzionalità, conservando tuttavia alcune delle differenze originarie di valore più o meno secondario.

Dagli stessi tubercoli radicali delle leguminose sono state isolate più forme che vennero spesso confuse con la specie tipica, causa dei tubercoli stessi e dei batteroidi. Ora, anche nel presente caso, la via dell'infezione non può essere preclusa a specie batteriche affini e capaci di tali adattamenti da resistere alle singolari condizioni di vita ad esse create dall'ambiente radicale.

Tanto nel caso che debbano ritenersi una specie unica, o nell'altro caso che debbano essere ascritte a specie differenti, l'essenziale è che venga affermato il possibile significato simbiotico di tutte, sebbene le prove colturali in corso — e delle quali a suo tempo riferirò — non abbiano fin qui dato risultati troppo incoraggianti per giungere alla conclusione che esse abbiano proprio lo stesso valore del simbionte radicale delle leguminose.

Chimica. — *Condensazioni intramolecolari per mezzo del gruppo ossiazoico* (1). Nota di GUIDO CUSMANO, presentata dal Socio A. ANGELI.

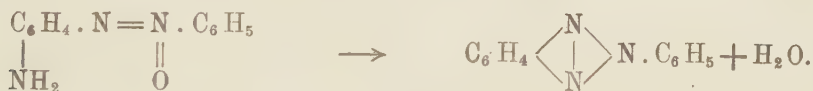
Alcune ricerche intorno all'*o*-ammino- e all'*o*-idrossilamminoazossibenzolo, che ho descritti di recente insieme con L. Della Nave (2),



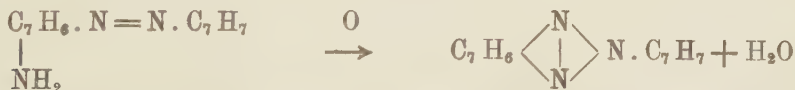
mi hanno dato modo d'osservare due eleganti casi di condensazione intramolecolare, cui prende parte il gruppo ossiazoico  $-\text{N}=\text{N}-$ , esplicando

quelle proprietà ossidanti, circa le quali sino ad oggi è noto soltanto il suo comportamento di fronte agli ordinarii riducenti e la tendenza a cedere l'ossigeno al nucleo aromatico nella cosiddetta trasposizione di Wallach degli azossicomposti.

I. L'*o*-amminoazossibenzolo, riscaldato in soluzione d'acido solforico concentrato nelle medesime condizioni in cui gli azossi- si cambiano in ossiazocomposti, elimina internamente una mol. d'acqua fra i due residui azotati e si trasforma in fenilazimidobenzolo:



Questa reazione può mettersi a lato di quell'altra da lungo nota, per la quale ossidando cautamente con acido cromico l'*o*-amminoazotoluolo, Zincke (3) ottenne un omologo del fenilazimidobenzolo:



salvo che nella prima, l'ossigeno, anzichè dall'esterno, vien fornito dal gruppo ossiazoico  $-\text{N}=\text{N}-$ .

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di studi superiori di Firenze.

(2) Gazz. ch. it., vol. L [1920].

(3) B. d. deut. chem. Ges. 18, 3143 (1885).

In base all'esperienza che descrivo più sotto, alla formazione del composto triazolico concorre oltre il 90 % dell'*o*-aminoazossibenzolo impiegato; solamente in piccola misura questo subisce la trasposizione di Wallach, dando *o*amino, *p'*-ossiazobenzolo non ancor noto:

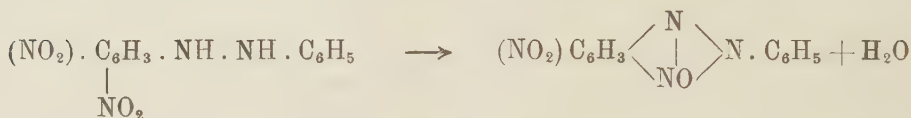


Proteggendo il gruppo aminico dell'*o*-aminoazossibenzolo con un acetile si può aumentare alquanto il rendimento del composto azoico; tuttavia qui pure prevale la formazione di fenilazimidobenzolo.

II. Anche nell'*o*-idrossilamminoazossibenzolo i due residui azotati possono eliminar acqua fra loro e allora si forma l'ossido del fenilazimidobenzolo, il cosiddetto aznitrosobenzolo:

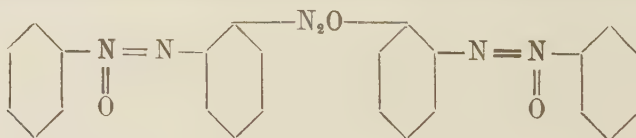


Ho effettuata la reazione, facendo agire tracce di NaOH sul derivato idrossilamminico in soluzione alcoolica, allo stesso modo, quindi, come Werner e Stiasny <sup>(1)</sup> ottennero nitroaznitrosobenzolo dall'*o*,*p*-dinitroidrazobenzolo:



Come si vede, nelle due nuove condensazioni intramolecolari che faccio conoscere, il gruppo ossiazoico —N=N—  
 $\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \end{array}$   
 agisce sull'amminico —NH<sub>2</sub> o sull'ossamminico —NH<sub>2</sub> come il gruppo nitrico —NO<sub>2</sub> agisce sull'idrazoico —NH—NH—.

Devo aggiungere che nelle condizioni sopradette una buona parte dell'*o*-idrossilamminoazossibenzolo, subendo un noto processo di trasformazione delle  $\beta$ -idrossilammine aromatiche, dà un triazossibenzolo, al quale, in base alla struttura assegnata alla sostanza madre <sup>(2)</sup>, spetta evidentemente la formola:



<sup>(1)</sup> B. d. deut. chem. Ges. 32, 3267.

<sup>(2)</sup> Cusmano e Della Nave, l. c.



AZIONE DELL'ACIDO SOLFORICO CONCENTRATO  
SULL' *o*-AMINOAZOSSIBENZOLO.

*Fenilazimidobenzolo.* — Si scioglie l'*o*-aminoazossibenzolo in alquanto acido solforico concentrato puro e si scalda la soluzione in un bagno d'acqua bollente; dopo un'ora si versa il liquido, che ha assunto un bel colore rosso, in molt'acqua determinando la precipitazione di una sostanza cristallina bianca, che si raccoglie su filtro e si lava bene con acqua. Dopo essiccamento fonde a circa  $115^{\circ}$ , ma purificata per cristallizzazione dall'alcool si ha in ciuffi di aghi sottili incolori con il p. f. a  $108^{\circ}$ . Si riconosce per fenilazimidobenzolo mediante il confronto con un campione di questa sostanza preparato riducendo con cloruro stannoso l'*o*-nitroazossibenzolo.

*o*-Ammino, *p'*-ossiazobenzolo. — La soluzione acquosa acida, dalla quale si è separato il fenilazimidobenzolo, si alcalinizza con carbonato sodico e allora precipita in fiocchi cristallini una piccola quantità di sostanza gialla che, come vedremo, è *o*-ammino *p'*-ossiazobenzolo. Purificata mediante cristallizzazione dal benzolo, in cui è poco solubile a freddo, fonde a  $159^{\circ}$ . Si forma in scarsa misura: difatti da gr. 0,62 di *o*-amminoazossibenzolo si ottennero gr. 0,50 di fenilazimidobenzolo, ciò che vuol dire che al più gr. 0,07 del primo subirono la trasposizione di Wallach.

Allo scopo di caratterizzare la suddetta sostanza, che non era nota, se ne è ripetuta la preparazione usando il derivato acetilico dell'*o*-amminoazossibenzolo, per conseguire un maggior rendimento. Difatti, procedendo come si è descritto or ora da gr. 0,82 di esso si è ricavato gr. 0,42 di fenilazimidobenzolo e gr. 0,13 del composto con il p. f. a  $159^{\circ}$ . Questo sottoposto all'analisi fornì i seguenti risultati:

Sost. gr. 0,0826; Ncc. 14,0 misurato a  $14^{\circ}$  e 749 mm. su KOH al 33 %; N trovato % 19,63, calcolato per  $C_{12}H_{11}N_2O$ , 19,72.

L'*o*-ammino *p'*-ossiazobenzolo con idrato di sodio concentrato forma un sale fenico poco solubile, di color giallo; con idrato di potassio un sale molto solubile di colore rosso sangue. Con gli acidi concentrati dà sali di colore rosso; con acidi di media concentrazione, sali di color verde.

Per determinarne la costituzione se ne è sciolto un decigr. in etere secco e si è agitata la soluzione, in cui era sospeso nero di platino, in un'atmosfera d'idrogeno fino a che questo non fu più assorbito. Poi si è separato il platino per filtrazione, e si è concentrata a b. m. la soluzione. Già a caldo si depositò una sostanza cristallina che si riconobbe come *p*-amminofenolo; e dalle madri, per lenta evaporazione, insieme con foglioline lucenti di questo composto, si separarono grossi cristalli di *o*-fenilendiammina.

Come si vede, con la riduzione catalitica a temperatura ordinaria si può

rompere il gruppo azoico; di più il processo si presta a un'agevole separazione dei prodotti risultanti e permette di lavorare con piccola quantità di materiale.

AZIONE DEGLI ALCALI SULL'*o*-IDROSSILAMMINOAZOSSIBENZOLO.

*Trisazossibenzolo.* — Ad una soluzione alcoolica satura a 50° del derivato idrossilamminico si aggiunge una goccia d'idrato sodico; dove essa incontra il liquido apparisce tosto un'intensa colorazione azzurra, che fa pensare alla formazione di un nitrosocomposto. Avvenuta la mescolanza, comincia entro breve tempo a deporsi una nuova sostanza ben cristallizzata, mentre la soluzione diviene color arancio. Dopo alcune ore, raccolto il precipitato relativamente abbondante, si concentra la soluzione, per raccogliere un'altra piccola quantità del medesimo prodotto. Esso si può cristallizzare dall'alcool o dall'etere; da quest'ultimo, per lenta evaporazione di una soluzione diluita si ha in cristalli tabulari a base di rombo, trasparenti e di leggiero color zolfo. Una determinazione d'azoto dette questi risultati:

Sost. gr. 0,0906; Ncc. 15.10 misurato a 18° e 758,4 mm. su una soluzione di KOH al 33 %; N trovato  $\frac{0}{100}$  19,16, calc. p.  $C_{24}H_{18}N_6O_3$ , 19,18.

*Aznitrosobenzolo.* — Le acque madri alcooliche, donde si è separato il trisazossibenzolo si addizionano con tanta acqua da determinare un leggiero intorbidamento; così si depone una sostanza oleosa colorata in rosso. Col tempo in essa si formano cristalli, che si possono liberare dall'olio stendendo la massa su piastra porosa. Aggiungendo di tempo in tempo altra acqua alle madri primitive si vanno formando cristalli del tutto simili a quelli avuti dall'olio rosso. Purificati per cristallizzazione dall'alcool fondono a 88°; la sostanza confrontata con aznitrosobenzolo, ottenuto riducendo con solfuro ammonico *o*-nitroazossibenzolo, risulta identica ad esso.

Da gr. 1,47 di *o*-idrossilamminoazossibenzolo si sono ottenuti gr. 0,82 di trisazossibenzolo, gr. 0,24 di aznitrosobenzolo, oltre a una piccola quantità della sostanza rossa sopra rammentata.

## MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

R. C. GALLETTI, *Il quadro scientifico della radiotelegrafia*. Pres. dai Soci CORBINO e PANTALEONI.

### PERSOMALE ACCADEMICO

Il Presidente VOLTERRA dà comunicazione di una lettera del prof. GAGLIO, il quale ringrazia l'Accademia per la sua nomina a Socio Corrispondente.

Lo stesso PRESIDENTE informa la Classe che la votazione per la elezione dell'Amministratore e dell'Amministratore aggiunto dell'Accademia. ha dato i risultati seguenti:

votanti 78 — maggioranza 40

Per Amministratore: Il Socio PIROTTA ebbe voti 72; LANCIANI 2; CASTELNUOVO 1; CERULLI 1; STRINGHER 1; voti nulli 1.

Per Amministratore aggiunto: Il Socio LANCIANI ebbe voti 72; PIROTTA 2; BRUGI 1; VOLTERRA 1; voti nulli 2.

Risultarono quindi eletti rispettivamente per Amministratore e Amministratore aggiunto, i Soci PIROTTA e LANCIANI.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CASTELNUOVO presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste numerosi lavori del Socio Corrispondente SACCO, e un ricco volume del Museo Johanneum.

Il Socio FOÀ fa omaggio dei volumi III, IV e V del suo *Trattato di Anatomia patologica*.

G. C.

---

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 5 dicembre 1920.*

- BOMAN E. — Cementerio indigena in Viluco (Mendoza) (Extr. de « Anales del Museo Nacional de historia natural de Buenos Aires », tomo XXX, pp. 501-559). Buenos Aires, 1920. 8°.
- BOMAN E. — Estatuitas de aspecto falico de la región Diaguita, que no representan falos (Extr. da la « Revista de la Sociedad Argentina de ciencias naturales », tomo II, pp. 448-456) Buenos Aires, 1916. 8°.
- BOMAN E. — Tres cartas de gobernadores del Tucuman sobre todos los santos de la Nueva Rioja y sobre el gran alzamiento (Extr. de la « Reviste de la Universidad nacional de Cordoba », ano V). Cordoba, 1918. 8°, pp. 1-44.
- BUHL A. — Géométrie et analyse des intégrales doubles (Scientia, n. 36). Paris, 1920. 8°, pp. 1-66.
- DE TONI G. B. — Marco Cermenati per Leonardo. Ricordi ed appunti. Roma, 1920. 8°, pp. 1-53.
- FERMI C. — Sugli anofeli e sulla malaria in relazione ai risanamenti antianofeli-malarici. Roma, 1920. 8°, pp. 1-155.
- FOÀ P. — Trattato di Anatomia patologica, disp. III-V. Torino, 1920. 8°.
- GRANDI G. — Contributo alla conoscenza degli Agaonini (*Hymenoptera Chalcididae*) dell'America (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XIII). Portici, 1919. 8°, pp. 1-56.
- GRANDI G. — Studio morfologico e biologico della *Blastophaga psenes* (L.) (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola d'agricoltura in Portici », vol. XIV, pp. 63-204). Portici, 1920. 8°.
- MELL A. — Das Steiermärkische Landesmuseum Joanneum und seine Sammlungen, 1811-1911. Graz, 1911. 4°, pp. I-XI, 1-520.
- PEYRONEL B. — Micromiceti di Val Germanasca (Estr. dal « Giornale botanico italiano », vol. XXV, pp. 405-468). Rocca S. Casciano, 1920. 8°.
- RONCHETTI V. — Ascaridiasi epatica (Estr. dagli « Atti della Società Lombarda di Scienze mediche e biologiche », volume IX, fasc. 1-2). Milano, 1919. 8°, pp. 1-9.
- SACCO F. — I serbatoi montani (Estr. dalla « Rivista delle industrie ferroviarie e dei lavori pubblici », fasc. II, III e IV). Roma, 1919. 4°, pp. 1-11.
- SACCO F. — Il Finalese (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LV) Torino, 1920. 8°, pp. 1-24.
- SACCO F. — Il glacialismo antico e moderno nelle alte valli di Ayas (Evançon) e di Gressoney (Lys) (Valle d'Aosta) (Estr. dal « Bollettino del R. Comitato geologico d'Italia », vol. XLVII, pp. 145-226). Roma, 1920. 8°.
- SACCO F. — Il glacialismo nel gruppo del monte Emilius (Valle d'Aosta) (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XXXIX, pp. 111-131). Roma, 1920. 8°.
- SACCO F. — L'età della terra (Estr. dalla « Rivista di Scienze naturali 'Natura' », vol. X). Pavia, 1919. 8°, pp. 1-14.
- SACCO F. — La formazione geologica dell'Italia (Estr. dal « Bollettino della R. Società geologica italiana », fascicolo V-VI). Roma, 1919. 8°, pp. 1-10.
- SACCO F. — La glaciation dans les vallons de Saint-Barthélemy ed de Torgnon (Extr. de « Augusta Praetoria », 1920, pp. 236-243). Aosta, 1920. 8°.
- SACCO F. — Le oscillazioni glaciali (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LV). Torino, 1920. 8°, pp. 1-18.
- SACCO F. — Le pulsazioni della crosta terrestre (Estr. dalla « Rivista di Scienze naturali 'Natura' », vol. XI). Pavia, 1920. 8°, pp. 1-18.
- SACCO F. — Progetto di canale navigabile dal Mar Ligure al Lago Maggiore (Estr. dalla « Rivista industrie ferroviarie e lavori pubblici », anno II). Roma, 1920. 4°, pp. 1-8.
- SACCO F. — Ritorniamo alla sorgente... alla natura (Estr. da « La Sorgente », 1919). Milano, 1919. 8°, pp. 1-7.
- SACCO F. — Una tromba marina (Estr. dai « Saggi di astronomia popolare », anno IX). Torino, 1920. 8°, pp. 1-7.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 19 dicembre 1920.*

F. D'OVIDIO, Presidente.

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Fisica matematica. — *Sulla propagazione delle onde di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI.**

In una interessante Nota, inserita negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino <sup>(1)</sup>, il Socio prof. Somigliana perviene alla conclusione che una quantità, funzione della posizione di un punto dello spazio, e del tempo, che soddisfa l'equazione di d'Alembert, non può propagarsi altrimenti che per onde piane, sferiche o cilindriche. Quella essendo un'equazione fondamentale che soddisfanno le quantità (vettori o scalari) la cui propagazione per onde traduce, in un mezzo isotropo, la propagazione della luce, secondo i principii dell'ottica fisica, tale conclusione introduce un divario fra cotesta e l'ottica geometrica, che il Somigliana chiaramente avverte, e accenna come non altrimenti atto ad essere composto che invocando i potenziali ritardati o le lunghezze d'onda estremamente piccole. Difatti, già nel caso semplicissimo di raggi formanti una stella (propria), incidenti sopra una superficie piana, che separa due mezzi, aventi indice di rifrazione diverso, le superficie parallele normali alla congruenza dei raggi rifratti — onde rifratte corrispondenti a onde sferiche incidenti, secondo l'ottica geo-

<sup>(1)</sup> *Sulla relazione fra il principio di Huyghens e l'ottica geometrica.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIV. (giugno, 1919).

metrica — comprendono un iperboloide a due falde di rotazione, o, a seconda del caso, un ellissoide di rotazione <sup>(1)</sup>. Così, il divario si affaccia alla prima applicazione della duplice teoria, e s'intende l'interesse di conciliare la propagazione della luce per onde di forma qualsivoglia, che l'otti a geometrica costruisce, mediante il principio delle onde elementari, coll'adempimento dell'equazione di d'Alembert, che, agli elementi che traducono la luce, prescrive l'ottica fisica.

A tal fine, io rilevo che la rigorosa conclusione del Somigliana si fonda sul presupposto che la quantità che si propaga per onde sia rappresentata da una funzione del tempo e del parametro che individua le singole onde — la misura del segmento di normale compreso fra l'onda generica e un'onda assunta come base. Ora, nell'ottica fisica, le quantità che si reputano propagarsi per onde, in un mezzo isotropo, sono, di regola, rappresentate dal prodotto di un fattore composto nel suddetto modo e di un fattore semplice funzione del punto del mezzo, cioè funzione, in generale, delle tre coordinate, comunque stabilite, del punto medesimo: e la quantità a cui si prescrive di soddisfare l'equazione di d'Alembert, è, di regola, rappresentata, alla sua volta, dalla somma di più termini così formati. Anche per questo basta invocare le più semplici applicazioni: la propagazione per onde sferiche di un vettore incompressionale, quali sono i vettori che traducono la luce (§ 1). Questa circostanza vale a rimuovere l'accennata difficoltà. Ed è quanto, colla presente Nota, mi propongo principalmente di dimostrare.

§ 1. Un vettore che, come i vettori che traducono la luce, soddisfa all'equazione di d'Alembert

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi,$$

e alla condizione di incompressibilità

$$(2) \quad \operatorname{div} \varphi = 0,$$

dove i simboli hanno il noto significato, è notoriamente

$$(3) \quad \varphi = \operatorname{rot} \frac{\mathbf{f}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{r},$$

dove  $\mathbf{f}$ , come  $\varphi$ , è simbolo di vettore, e  $r$  indica la grandezza del raggio vettore descritto da un punto (polo), O, al punto, P, a cui si riferisce  $\varphi$ .

Sotto altra forma si ha

$$(4) \quad \varphi = \mathbf{r}_1 \wedge \left( \frac{\dot{\mathbf{f}}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{ar} - \frac{\mathbf{f}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{r^2} \right),$$

(1) Cfr. Jamin-Bouty, *Cours de Physique de l'École Polytechnique* (Paris, Gauthier-Villars, 1887), t. III, 2<sup>e</sup> fascicule, p. 73; dove però è da correggere l'affermazione che siano quadriche tutte le superficie parallele alla quadrica costruita.

dove  $\mathbf{r}_1$  indica il vettore avente l'orientazione del suddetto raggio vettore, e grandezza 1, e il punto indica derivata rispetto all'argomento.

Il vettore  $\boldsymbol{\varphi}$  ne risulta composto dei due vettori

$$\mathbf{r}_1 \wedge \frac{\dot{\mathbf{f}}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{ar} \quad \text{e} \quad -\mathbf{r}_1 \wedge \frac{\mathbf{f}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{r^2},$$

perpendicolari a  $\mathbf{r}_1$ , cioè al raggio vettore descritto da O al punto P.

Questi vettori si dicono propagarsi per onde sferiche, col centro nel polo O, con velocità di propagazione di grandezza  $a$ : e la loro direzione, ad ogni istante, risulta perpendicolare al « raggio » — la retta descritta dal centro al punto considerato — la quale è pure una proprietà caratteristica dei vettori che traducono la luce.

Il vettore  $\mathbf{f}$  è arbitrario. Facciamo l'ipotesi che abbia una direzione invariabile, con che la stessa direzione invariabile avrà  $\dot{\mathbf{f}}$ . Allora attribuiamo questa direzione all'asse delle  $z$ , e indichiamo con  $f$  e con  $\dot{f}$  le misure dei due vettori relative a questo asse. La (4) si traduce nelle equazioni scalari, dove  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  indicano le componenti di  $\boldsymbol{\varphi}$  secondo la supposta terna di assi cartesiani ortogonali,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_x = \frac{y}{ar^2} \dot{f} \left( \frac{r}{a} - t \right) - \frac{y}{r^3} f \left( \frac{r}{a} - t \right), \\ \varphi_y = -\frac{x}{ar^2} \dot{f} \left( \frac{r}{a} - t \right) + \frac{x}{r^3} f \left( \frac{r}{a} - t \right), \\ \varphi_z = 0. \end{array} \right.$$

Il vettore  $\boldsymbol{\varphi}$  risulta avere, in ogni punto della superficie dell'onda, la direzione della tangente al parallelo relativo al diametro avente la direzione del vettore  $\mathbf{f}$ .

Gli scalari che formano i due termini dei secondi membri delle (5), come i vettori che hanno per componenti i termini in colonna delle stesse equazioni, si dicono propagarsi per le indicate onde sferiche, colla indicata velocità di propagazione di grandezza  $a$ : sono ciascuno il prodotto di una funzione dell'argomento  $\frac{r}{a} - t$  per una funzione delle coordinate del relativo punto; infine, la somma delle quantità omologhe, come appartenenti ad uno stesso componente di  $\boldsymbol{\varphi}$ , e la somma dei due vettori, soddisfa l'equazione di d'Alembert.

§ 2. Immaginata una serie di superficie parallele di forma qualsivoglia, e indicata con  $r$  la misura del segmento di normali comuni, compreso fra una particolare superficie della serie, « base », e la superficie generica (parametro individuante questa superficie, e la base con  $r=0$ ), una quantità che si dice propagarsi per l'indicata serie di onde, con velocità di propa-

gazione di grandezza  $a$ , ha, alla stregua delle applicazioni, in generale, la forma

$$\varphi_1(P) \varphi_2\left(\frac{r}{a} - t\right),$$

dove  $\varphi_2$  è simbolo di scalare, e  $\varphi_1(P)$  (scalare o vettore) indica una funzione del punto,  $P$ , a cui si riferisce la quantità.

Notiamo che la presenza del fattore  $\varphi_1(P)$  non modifica questa circostanza caratteristica della propagazione per onde, colla indicata velocità, la quale è un'immediata conseguenza della forma del secondo fattore. Se, ad un istante, i valori diversi da 0 della quantità sono confinati entro uno strato limitato da due superficie d'onda, allora, sopra ogni superficie d'onda, i valori diversi da 0 non si mantengono che per un tempo eguale a quello che impiega la propagazione ad attraversare il suddetto strato.

§ 3. Poniamo ora, riferendoci a superficie parallele di forma qualsivoglia, individuate dal parametרו  $r$  (§ 2),

$$(1) \quad \psi(P, t) = f_1(P) \cos \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right) + f_2(P) \sin \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right),$$

dove  $\psi(P, t)$ ,  $f_1(P)$ ,  $f_2(P)$  indicano, pel momento, funzioni scalari, e procuriamo di trovare le condizioni necessarie e sufficienti, a cui debbono soddisfare  $f_1(P)$ ,  $f_2(P)$  (o brevemente  $f_1, f_2$ ) perchè  $\psi(P, t)$  (o brevemente  $\psi$ ) soddisfaccia l'equazione di d'Alembert

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \psi.$$

Si ha, in primo luogo,

$$\Delta_2 \psi = \Delta_2 \left[ f_1 \cos \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right) \right] + \Delta_2 \left[ f_2 \sin \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right) \right]:$$

in secondo luogo, indicando con  $u, v$  due funzioni regolari qualsivogliano del punto  $P$ ,

$$\Delta_2(uv) = v \Delta_2 u + 2 \nabla(uv) + u \Delta_2 v:$$

in terzo luogo, supposta  $u$  funzione delle coordinate del punto  $P$ , composta col parametro  $r$ , relativo alle supposte superficie parallele (§ 2),

$$\nabla_2(uv) = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r}:$$

infine, nella stessa ipotesi,

$$\Delta_2 u = \left( \frac{1}{R+r} + \frac{1}{S+r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

dove  $R$  e  $S$  indicano i raggi di curvatura principali, nel punto della super-



ficie base (§ 2), intersezione della medesima colla normale alla superficie  $r = \text{cost.}$ , nel punto P (1).

Colle quali formole, calcolando il suddetto  $\Delta_2 \psi$ , e valendosi di

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\alpha^2 \left( f_1 \cos \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right) + f_2 \sin \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right) \right),$$

si trova

$$\begin{aligned} & a^2 \Delta_2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ &= a \left[ a \Delta_2 f_1 + 2\alpha \frac{\partial f_2}{\partial r} + \alpha \left( \frac{1}{R+r} + \frac{1}{S+r} \right) f_2 \right] \cos \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right) \\ &+ a \left[ a \Delta_2 f_2 - 2\alpha \frac{\partial f_1}{\partial r} - \alpha \left( \frac{1}{R+r} + \frac{1}{S+r} \right) f_1 \right] \sin \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right). \end{aligned}$$

Donde si conclude che condizioni necessarie e sufficienti perchè  $\psi$ , rappresentato dalla (1), soddisfaccia (2), sono che  $f_1, f_2$  soddisfacciano le due equazioni

$$(3) \quad \begin{cases} a \Delta_2 f_1 + 2\alpha \frac{\partial f_2}{\partial r} + \alpha \left( \frac{1}{R+r} + \frac{1}{S+r} \right) f_2 = 0, \\ a \Delta_2 f_2 - 2\alpha \frac{\partial f_1}{\partial r} - \alpha \left( \frac{1}{R+r} + \frac{1}{S+r} \right) f_1 = 0. \end{cases}$$

Supposto

$$R = S = \infty,$$

cioè le onde piane, queste equazioni diventano, inteso il piano  $xy$  parallelo alle onde,

$$a \Delta_2 f_1 + 2\alpha \frac{\partial f_2}{\partial r} = 0 \quad , \quad a \Delta_2 f_2 - 2\alpha \frac{\partial f_1}{\partial r} = 0,$$

soddisfatte da  $f_1, f_2$  costanti.

Supposto

$$R = S = 0,$$

cioè le onde sferiche, le equazioni diventano, assunto per polo dei raggi  $r$  il centro comune delle sfere,

$$(5) \quad a \Delta_2 f_1 + 2\alpha \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{2\alpha}{r} f_2 = 0 \quad , \quad a \Delta_2 f_2 - 2\alpha \frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{2\alpha}{r} f_1 = 0.$$

(1) Con semplice calcolo si trova

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial r},$$

dove  $X, Y, Z$  indicano i coseni di direzione della normale alla superficie  $r = \text{cost.}$ , nel punto P, e, per una nota relazione,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{R_r} + \frac{1}{S_r},$$

dove  $R_r = R + r$ ,  $S_r = S + r$  indicano i raggi di curvatura principali nello stesso punto P,

Si verifica facilmente che queste equazioni sono soddisfatte da

$$(6) \quad f_1 = -\frac{y}{r^3}, \quad f_2 = \frac{\alpha}{a} \frac{y}{r^2} \quad \text{e} \quad f_1 = \frac{x}{r^3}, \quad f_2 = -\frac{\alpha}{a} \frac{x}{r^2},$$

conformemente alle (5) del § 2, dove si faccia

$$f(u) = \cos \alpha u, \quad \dot{f}(u) = -\alpha \sin \alpha u.$$

§ 4. Le equazioni (3) del paragrafo precedente potranno formare oggetto di particolare ricerca. Limitiamoci qua a rilevare che l'ipotesi che una soluzione sia univocamente determinata, coll'assegnare sul contorno del campo considerato, per ogni valore del tempo, i valori delle funzioni  $f_1(P)$ ,  $f_2(P)$ , collima col noto fatto che una soluzione dell'equazione di d'Alembert [(2) del paragrafo precedente] è univocamente determinata, coll'assegnare, per ogni valore del tempo, sul contorno del campo, i valori della funzione  $\psi$ , e, per un valore del tempo, i valori della funzione  $\dot{\psi}$  e della sua derivata rispetto al tempo, in ogni punto del campo. Difatti, da quella ipotesi segue che, colla prescritta forma della soluzione dell'equazione di d'Alembert, questa soluzione è univocamente determinata. Ora, con questo, è assegnato sul contorno, per ogni valore del tempo, il valore della funzione  $\psi(P, t)$ , conformemente alla (1) del paragrafo precedente. D'altra parte, da questa espressione e da quella che se ne ricava per la derivata rispetto al tempo, cioè da

$$\begin{aligned} \psi(P, t) &= f_1(P) \cos \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right) + f_2(P) \sin \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right), \\ \frac{\partial \psi(P, t)}{\partial t} &= \alpha \left[ f_1(P) \sin \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right) - f_2(P) \cos \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right) \right], \end{aligned}$$

si deduce immediatamente che, note  $f_1(P)$ ,  $f_2(P)$ , per ogni punto del campo, sono noti, per gli stessi punti, i valori per  $t = 0$  di  $\psi$  e della sua derivata rispetto al tempo  $t$ , e viceversa. Per modo che l'ipotesi che siano assegnati sul contorno i valori delle  $f_1(P)$ ,  $f_2(P)$  congloba le circostanze determinatrici suddette della soluzione dell'equazione di d'Alembert (1).

§ 5. Poniamo

$$\psi(P, t) = \mathbf{f}_1(P) \cos \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right) + \mathbf{f}_2(P) \sin \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right),$$

dove  $\psi$ ,  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  sono simboli di vettori, e intendiamo che  $\mathbf{f}_1(P)$ ,  $\mathbf{f}_2(P)$  soddisfacciano (posti per  $f_1, f_2$ ) le equazioni (3) del § 3. Il vettore  $\psi(P, t)$  soddisfarà l'equazione di d'Alembert [(1) del § 1].

Poniamo poi

$$\varphi(P, t) = \text{rot } \psi(P, t).$$

(1) Analoghe conclusioni si ricavano dalle condizioni determinatrici che siano dati, sul contorno, per ogni valore del tempo, i valori della derivata di  $\psi$  secondo la normale interna, o questi su parte del contorno, e i valori di  $\psi$  sulla parte complementare.

Il vettore  $\varphi(P, t)$  soddisfarà anche la condizione di incompressibilità [soddisfarà (1) e (2) del § 1].

Si trova immediatamente, indicando con  $g(r)$  uno scalare, funzione del parametro  $r$ ,

$$\operatorname{rot}(\mathbf{f}(P) g(r)) = g(r) \operatorname{rot} \mathbf{f}(P) + \dot{g}(r) \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}(P),$$

dove  $\mathbf{r}_1$  indica un vettore avente la direzione della normale alla superficie  $r = \text{cost.}$  nel punto  $P$ , e per grandezza l'unità. Ne viene

$$(1) \quad \varphi(P, t) = \mathbf{F}_1(P) \cos \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right) + \mathbf{F}_2(P) \sin \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right)$$

dove

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{F}_1(P) = \operatorname{rot} \mathbf{f}_1(P) + \frac{\alpha}{a} \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}_2(P), \\ \mathbf{F}_2(P) = \operatorname{rot} \mathbf{f}_2(P) - \frac{\alpha}{a} \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}_1(P). \end{cases}$$

Poichè  $\varphi(P, t)$  soddisfa l'equazione di d'Alembert [(1) del § 1],  $\mathbf{F}_1(P)$ ,  $\mathbf{F}_2(P)$  dovranno soddisfare le (3) del § 3.

Si trova poi facilmente, in base a (1),

$$(3) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \varphi = & \left( \operatorname{div} \mathbf{F}_1 + \frac{\alpha}{a} \mathbf{F}_2 \times \mathbf{r}_1 \right) \cos \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right) + \\ & + \left( \operatorname{div} \mathbf{F}_2 - \frac{\alpha}{a} \mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1 \right) \sin \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right). \end{aligned}$$

Per cui, soddisfacendo  $\varphi(P, t)$  la condizione di incompressibilità [(2) del § 1],  $\mathbf{F}_1(P)$ ,  $\mathbf{F}_2(P)$  debbono ancora soddisfare le equazioni

$$(4) \quad \operatorname{div} \mathbf{F}_1 + \frac{\alpha}{a} \mathbf{F}_2 \times \mathbf{r}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{F}_2 - \frac{\alpha}{a} \mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1 = 0,$$

che si verifica facilmente come scaturiscano dalle (2), qualunque siano  $\mathbf{f}_1(P)$ ,  $\mathbf{f}_2(P)$ .

Nell'ipotesi, di cui al § 4 abbiamo rilevato il significato, che una soluzione delle (3) del § 3 sia univocamente determinata dai valori delle funzioni  $\mathbf{f}_1(P)$ ,  $\mathbf{f}_2(P)$  sul contorno del campo, il vettore in discorso  $\varphi(P, t)$  sarà univocamente determinato nel campo, dati sul contorno i valori delle due funzioni  $\mathbf{F}_1(P)$ ,  $\mathbf{F}_2(P)$ , colla condizione che questi valori soddisfacciano le (4), applicate ai punti del contorno.

Naturalmente, resta impregiudicata la questione dell'esistenza della soluzione del duplice sistema di equazioni alle derivate parziali.

La condizione che il vettore  $\varphi(P, t)$  sia parallelo al pian tangente in  $P$  alla superficie  $r = \text{cost.}$  si traduce, per (1), in

$$(5) \quad \mathbf{F}_1(P) \times \mathbf{r}_1 = 0, \quad \mathbf{F}_2(P) \times \mathbf{r}_1 = 0,$$

con che le (4) si riducono a

$$(6) \quad \operatorname{div} \mathbf{F}_1 = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{F}_2 = 0.$$

Per le superficie sferiche concentriche (assunto il centro comune per polo dei raggi  $r$ ) il doppio sistema di equazioni alle derivate parziali, di cui il secondo è rappresentato dalle (6), è soddisfatto, conformemente alle (5) del § 1, dove si faccia  $f(u) = \cos \alpha u$ ,  $\dot{f}(u) = -\alpha \sin \alpha u$ , da

$$\mathbf{F}_1(P) = -\frac{y}{r^3} \mathbf{i} + \frac{x}{r^3} \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{F}_2(P) = \frac{\alpha}{a} \frac{y}{r^2} \mathbf{i} - \frac{\alpha}{a} \frac{x}{r^2} \mathbf{j}.$$

Si verifica, come abbiamo detto (§ 3), che i coefficienti omologhi soddisfanno le (3) del § 3, e si trova anche subito che sono soddisfatte

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{i,x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_{i,y}}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

relazioni che traducono le suddette (6).

§ 6. Tornerebbe acconcio, come conclusione, di applicare i precedenti risultati allo studio della formazione delle onde riflesse e delle onde rifratte dal piano  $z=0$ , concepito come superficie di separazione di due distinti mezzi isotropi, corrispondenti a onde incidenti, rappresentate dalle (5) del § 1, procurando di ricondurre le condizioni, atte a determinare le soluzioni delle equazioni differenziali, all'eguaglianza, sulle due pagine del piano  $z=0$ , delle componenti, secondo gli assi delle  $x$  e delle  $y$ , del vettore elettrico e del vettore magnetico. Al qual proposito, osserviamo che, contando  $r$  dal centro delle onde incidenti, per queste onde, dal punto simmetrico ad esso, rispetto al piano  $z=0$ , per le onde riflesse, e dalla quadrica accennata nell'introduzione, per le onde rifratte, il rapporto  $\frac{r}{a}$  avrà il medesimo valore, in ogni punto del piano  $z=0$ , per le tre specie di onde: per modo che la suddetta equazione si tradurrà in eguaglianza di coefficienti di  $\cos \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right)$  e di  $\sin \alpha \left( \frac{r}{a} - t \right)$ , in ogni punto. P. delle due pagine del piano  $z=0$ . Ma vuolsi tener presente che i suddetti vettori non soddisfanno l'equazione di d'Alembert che in quanto soddisfanno le equazioni di Hertz, le quali, tra l'altro, stabiliscono una relazione *a priori* fra le due specie di vettori. Per cui codesto studio potrà meglio formare oggetto di una ricerca, dove, sotto il precedente aspetto, siano considerate le equazioni di Hertz, da far seguire alla presente, della quale, a malgrado delle circostanze, attinenti a questioni generali dell'Analisi, che restano da esaminare, mi sembra abbastanza conseguito lo scopo.



Paleontologia — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale*. Nota del Socio CARLO DE STEFANI (<sup>1</sup>).

III.

*Infralias?* (di San Martino).

A S. Martino nel bacino del Verde fluente alla Polcevera, sopra i *Grezzoni* ed i Calcari giallastri con scisti lucenti bruni e scisti quarzosi verdognoli del Trias superiore, è un Calcare breccioso grigio molto silicifero sperso in altro Calcare terroso, compatto, giallastro, che specialmente nella parte superiore è insieme a frammenti di Arenaria o Quarzite. Calcare ed Arenaria sono in parte costituiti da una o più silicospongie; li attribui all'*Infralias* più che altro per affinità litologiche e per la situazione stratigrafica fra Trias ed Eocene, poichè i fossili non darebbero autorità ad una determinazione precisa.

I. Il Calcare è in taluni frammenti prevalentemente selcifero con sottili incrinature di Calcite e Dolomite: contiene, oltre questi due componenti, microscopici cristalli di Limonite pseudomorfa di Pirite, pulviscolo carbonioso, rari cristalli di Quarzo e Silice colloide spesso poco trasparente, costituente tuttora in parte perfetti residui di reticolo *hexactinico*; mentre molta parte di questo fu convertita in Calcare. Doveva essere una *Hexactinellide* come p. e. gli *Onchotocus*, *Lychniscosa* della Creta, per lo meno con base massiccia constatabile anche all'esterno sulle superfici più o meno a lungo esposte alle intemperie. L'intreccio dictyonale ha compagine minutissima con 3 o 4 ordini di *Hexactiniae* formanti maglie disposte regolarmente in ogni senso longitudinale, radiale e circolare, però, sotto forti ingrandimenti, irregolari, anche triangolari e circolari. Sembrano a volte fornite di minuti aculei, forse per rottura dei più fini intrecci centrali e sono provvedute apparentemente di *Lychnische*, le quali danno luogo qualche volta, forse nelle parti dermali, ad un sottile espandimento siliceo, il quale restringe l'apertura delle maglie.

Fra i parenchimali notansi *Hexactiniae*, *Echinhexactiniae* e forse rari *Hexaster*. Mai vidi *Uncini*, *Scopulae* e *Clavulae*.

Una delle superfici ripulite per naturale denudazione dalla roccia inglobante presenta sporgenze e ripiegamenti separati da solchi e cavità, e vi sono bassi e piccoli tubi sporgenti, crederei di *Aporhise* o Canali exalanti,

(<sup>1</sup>) Questi Rendiconti, pag. 237.

almeno parzialmente in serie, cinti da ingrossamenti campeggianti sulla irregolare superficie.

I detti tubi somigliano a quelli dei *Colathiscus* Giuresi ed un poco a quelli dei *Phalacrus* Cretacei, generi ambedue *Lychniscosa*; ma specialmente alle Cretacee e viventi *Periphragella* (che non hanno *Epi* nè *Aporhize*) e *Ptychodesia* (piatte, con spicule aculeate), ambedue senza *Lychnische*. Nell'interno, nella selce meno trasparente vedonsi piccole plaghe silicee più chiare rispondenti probabilmente ai canali acquiferi, crederei ad *Epirhize* inalanti disposti in serie ed aventi forma di losanga, per schiacciamento.

Si tratta di una *Triaxonia Hexasterophora* della tribù *Lychniscosa*, forse di specie nuova; ma non è permessa una determinazione precisa. Forse questa di San Martino è l'unica località nella quale potrà aversi qualche esemplare meno mal conservato.

Vi si accompagna qualche *Tetracloone* di *Tetractinellidae* ed in certi tratti *Rhabdocloni* di *Megamorphinae*.

II. La Silicospongia che, sebbene mal conservata, si trova nella dura roccia silicea simile ad Arenaria o Quarzite, specialmente nella parte superiore a contatto dell'Eocene, mi sembrerebbe in sostanza la medesima del Calcare siliceo e può aiutare a renderne meno scompleto l'accento. Compongono la roccia abbondanti, minutissimi grani di Quarzo con inclusi anche di Zircone. Silice colloide. Pirite e Limonite diffusa che spartisce sottilmente la roccia dando alla materia silicea interposta una regolarissima apparenza lentiforme, Sericite e Biotite in minutissime lamine, nebulosità carboniose, Rutilo, e rarissimi grani di Plagioclasio con piani di geminazione ondulati.

Sono questi probabilmente in gran parte i residui delle minute sabbie che riempivano le cavità dello Spongiario. Manca il Carbonato calcico. La schistosità secondante la stratificazione invade anche lo spongiario.

Le megasclere formano un intreccio a maglie, per brevi tratti regolari, quadrate o parallelogramme, ma ordinariamente irregolari, anche triangolari e curve, con spine brevi per lo più ottuse, con *Lychnische*. Nell'interno l'intreccio delle Microsclere di almeno due ordini è, come suole, di *Hexactiniae* semplici, e si vede bene particolarmente in alcuni tratti scuri per Limonite: vi sono delle maglie con Spicole lunghe nella parte distale come nei *Phalacrus* e nelle *Bolitesidae*, che sono pure *Lychniscosa*. Talora Limonite, Quarzo, la stessa Sericite occupano e distinguono l'interno delle maglie che sono formate dalla Silice alquanto ferruginosa. Fra i parenchimali notansi *Oxyhexactiniae* e qualche *Diactinia* e *Pentactinia* dermale. Ordinariamente i parenchimali delle *Lychniscosa* non si conoscono. Le *Lychnische* presentano spesso sottili espansioni silicee che trasformano le maglie in fori rotondi e qualche rara placca probabilmente dermale presenta grossi fori con altri assai più piccoli e con *Hexactiniae*. Nelle sezioni, ma anche alla superficie, specialmente in

costa agli strati vedonsi aperture di canali acquiferi, *Epirhize* trasversalmente ovali p. e. come nel genere cretaceo *Sporodoscinia* Schrammen, chiuse da un reticolato a losanga, forse per compressione del fossile. Le *Aporhize* sono rotonde, tubiformi, disposte a quinconce con le *Epirhize*, cinte con reticolato radiale ed in parte circolare. Vi sono pure piccole *ostia* puntiformi.

Trattando lastre parallele agli strati con potassa caustica, sciolta la Silice colloide, meglio traspariscono l'intreccio costituito da Limonite, già solfuro di ferro, che sembra trovarsi di preferenza all'intorno dei canali acquiferi. Le *Epirhize* appaiono alquanto serpeggianti parallelamente alla superficie, mentre le *Aporhize*, con *ostia* altrettanto grandi, le sono normali e si vedono spesso finire ceche in un intreccio limonitico a qualche profondità. Una soluzione di *orange* colora in *bleu* la Silice di alcune Macroscelere lychniscose ed altre Microscelere ed isola meglio le spicole limonitiche: così pure l'*Eosina*, la quale imbeve talora solo alcune parti delle Spicole, ma specialmente le Microscelere, essendone le altre parti convertite in Quarzo.

Questa *Dictyonina lychniscosa* non è sufficiente a determinare l'età geologica. Le *Dictyonina*, come si disse, mancano nel Paleozoico. Le *Lychniscosa*, già notate nel Trias, sono abbastanza frequenti nel Giura, ed abbondano nella Creta. La massima parte degli Spongiari noti dopo il Giura appartengono ad *Hecisterophora Dictyonina*, e di questi la metà fra quelli della Creta sono *Lychniscosa*. Unico genere vivente fornito di Lychnische è l'*Aulocystis* Schulze rappresentato da due specie (*A. Gruyi* Marshall e *A. Zitteli* Marshall).

D'altra parte la specie di S. Martino qui descritta ha molta analogia con le *Lychniscosa* che indicherò nell'Eocene, dalle quali differisce per le *Aphorizie* tubiformi e per qualche altro carattere come le macroscelere apparentemente spinose, e l'intreccio alquanto diverso, caratteri però sempre alquanto incerti per via della mala conservazione. *A priori* si potrebbero attribuire questi terreni di S. Martino alla Creta; ma le circostanze stratigrafiche e litologiche non vietano di conservarlo nell'Infralias.

Entro la compagine dello Spongiario notai inclusa qualche rara *Rubdo* di *Rhizomorina*.

**Matematica.** — *I teoremi di unicità per le equazioni differenziali del 3° ordine paraboliche lineari.* Nota II del dott. E. DEL VECCHIO, presentata dal Corrisp. GUIDO FUBINI.

*Teoremi di unicità per:*

$$(II) \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + d \frac{\partial z}{\partial x} + fz + g = 0.$$

Alcune modificazioni si devono apportare al procedimento e al risultato della Nota I per esprimere il teorema di unicità per l'equazione (II), che delle derivate in  $y$  contiene solo  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

**TEOREMA DI UNICITÀ.** *Se il campo C soddisfa a tutte le condizioni della Nota I; se i coefficienti  $c(x, y)$ ,  $a(x, y)$ ,  $d(x, y)$ ,  $f(x, y)$  sono finiti e continui in C insieme con le rispettive derivate  $\frac{\partial c}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$ ;  $\frac{\partial a}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial d}{\partial x}$  e di più  $c(x, y)$  è sempre di uno stesso segno,*

*non possono esistere in detto campo due soluzioni distinte della (II) le quali soddisfanno alle condizioni:*

$h') \quad z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}$  siano finite e continue in C;

$h'') \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  siano integrabili in C, e di più si abbia:

$$\int \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi(y); \quad \int \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy = \frac{\partial z}{\partial y} + \chi(x);$$

*assumano sul contorno  $c$  di C gli stessi valori arbitrariamente dati e sieno tali che le loro prime derivate in  $x$  assumano gli stessi valori, pure arbitrariamente dati, su  $s_0$ , in cui  $dy < 0$ , quando il coefficiente  $c(x, y)$  di  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  è positivo in C; su  $s_1$ , in cui  $dy > 0$ , quando  $c(x, y)$  è negativo in C <sup>(1)</sup>.*

(1) S'intende di percorrere  $s_0$  e  $s_1$  nel verso prefissato pel contorno. Contrariamente a quanto facemmo nella Nota I per l'equazione (I), dobbiamo distinguere  $s_0$  da  $s_1$ . Ciò è in relazione al fatto che, mutando segno a  $x$  e  $y$ , in C si scambiano tra loro  $s_0$  e  $s_1$ , e la (II), diversamente a quanto accade per la (I), si muta in un'altra dello stesso tipo, ma avente di segno contrario il coefficiente della derivata in  $y$ .



Per le stesse ragioni della Nota I poniamo:  $\xi = \xi(x)$ ;  $\eta = \eta(y)$ , con la quale trasformazione la (II) si muta nell'altra:

$$(II_1) \quad \frac{\partial^3 z}{\partial \xi^3} + p_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + q_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + r_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + s_1 \frac{\partial z}{\partial \eta} + t_1 z + u_1 = 0$$

con

$$p_1 = \frac{c \left( \frac{d\eta}{dy} \right)^2}{\left( \frac{d\xi}{dx} \right)^3}; \quad q_1 = \frac{3 \frac{d^2 \xi}{dx^2} + a \frac{d\xi}{dx}}{\left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2}; \quad r_1 = \frac{\frac{d^3 \xi}{dx^3} + a \frac{d^2 \xi}{dx^2} + d \frac{d\xi}{dx}}{\left( \frac{d\xi}{dx} \right)^3};$$

$$s_1 = \frac{c \frac{d^2 \eta}{dy^2}}{\left( \frac{d\xi}{dx} \right)^3}; \quad t_1 = \frac{f}{\left( \frac{d\xi}{dx} \right)^3}; \quad u_1 = \frac{g}{\left( \frac{d\xi}{dx} \right)^3}.$$

Se la trasformazione conserva le proprietà dei coefficienti dell'equazione, valgono le formole che si ottengono ponendo nelle (3) della Nota I  $s_1, q_1, r_1$  invece di  $p, q, r$ ; inoltre si ha:

$$\int \int_{C'} p_1 z \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} d\xi d\eta = - \int_{C'} p_1 z \frac{\partial z}{\partial \eta} d\xi + \frac{1}{2} \int_{C'} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} z^2 d\xi -$$

$$- \int \int_{C'} p_1 \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 d\xi d\eta + \frac{1}{2} \int_{C'} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \eta^2} z^2 d\xi d\eta.$$

Cosicchè, se  $z_1$  e  $z_2$  sono due soluzioni della (II<sub>1</sub>) soddisfacenti alle condizioni indicate, per  $v = z_1 - z_2$  si ha:

$$\int \int_{C'} v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} + p_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + q_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + r_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + s_1 \frac{\partial v}{\partial \eta} + t_1 v \right) d\xi d\eta = 0$$

da cui, applicando le predette formole e tenendo conto delle proprietà al contorno della  $v$ , ricaviamo:

$$(4_1) \quad - \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 d\eta - \int \int_{C'} q_1 \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\eta - \int \int_{C'} p_1 \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 d\xi d\eta -$$

$$+ \int \int_{C'} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial r_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial s_1}{\partial \eta} + t_1 \right] v^2 d\xi d\eta = 0;$$

il primo integrale va esteso a  $s'_1$  o  $s'_0$  secondochè  $c(x, y)$  è positivo o negativo in C.

$c(x, y)$  è positivo in C. Il primo integrale della (4<sub>1</sub>) è non positivo; il teorema pertanto resterà dimostrato se determineremo una trasformazione per la quale risulti:

$$\text{in } C' \quad q_1 > 0, \quad p_1 > 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial r_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial s_1}{\partial \eta} + t_1 < 0;$$

inoltre  $\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dy}$  positivi in tutto C (cosicchè questo viene trasformato in C' dello stesso tipo, di cui  $s'_0$  e  $s'_1$  hanno rispettivamente  $d\eta < 0, d\eta > 0$ ); per la quale da ultimo sono mantenute le proprietà dei coefficienti.

La prima disuguaglianza equivale a:  $3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a \frac{d\xi}{dx} > 0$ , che è soddisfatta insieme con l'equazione  $3 \frac{d^2 \xi}{dx^2} + m_1 \frac{d\xi}{dx} = F_1(x)$ , se  $\frac{d\xi}{dx} > 0$  e se  $m_1$  è il minimo di  $a(x, y)$  e  $F_1(x)$  una funzione arbitraria, positiva in C e soddisfacente a determinate condizioni. Ricaviamo:

$$\xi = \int \left\{ e_i^{-\frac{m_1 x}{3}} \left[ \frac{1}{3} \int F_1(x) e_i^{\frac{m_1 x}{3}} dx + H_1 \right] \right\} dx + K_1,$$

di cui  $\frac{d\xi}{dx}$  può suppersi positiva.

La seconda disuguaglianza, che è espressa da  $\frac{c \left( \frac{d\eta}{dy} \right)^2}{\left( \frac{d\xi}{dx} \right)^3} > 0$ , è sempre sod-

disfatta.

L'ultima disuguaglianza equivale all'altra:

$$c \frac{d^3 \eta}{dy^3} + 2 \frac{\partial c}{\partial y} \frac{d^2 \eta}{dy^2} + \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \psi_1(x, y) \right] \frac{d\eta}{dy} < 0.$$

cui si giunge eseguendo i calcoli e facendo alcune trasformazioni, ed in cui

$$\psi_1(x, y) = 2 \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^3 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial r_1}{\partial \xi} + t_1 \right].$$

Se indichiamo con  $m_1^2$  il minimo (positivo) di  $c(x, y)$  in C e inoltre con  $M_1^2, n_1^2$  numeri positivi tali che:  $2 \frac{\partial c}{\partial y} < M_1^2$ ;  $\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \psi_1(x, y) < n_1^2$ , la precedente disuguaglianza sarà soddisfatta insieme con l'equazione:

$$m_1^2 \frac{d^3 \eta}{dy^3} + M_1^2 \frac{d^2 \eta}{dy^2} + n_1^2 \frac{d\eta}{dy} = 0,$$

se  $\frac{d\eta}{dy}$  e  $\frac{d^2 \eta}{dy^2}$  sono positive e  $\frac{d^3 \eta}{dy^3}$  negativa. Perciò possiamo prendere

$\frac{d\eta}{dy} = P e_i^{\alpha y} + Q e_i^{\beta y}$ , in cui P e Q sono costanti arbitrarie e  $\alpha$  e  $\beta$  sono soluzioni dell'equazione:  $m_1^2 x^2 + M_1^2 x + n_1^2 = 0$ , da cui il valore di  $\eta$ . Se si prende, come è lecito,  $M_1^2$  abbastanza grande le soluzioni  $\alpha, \beta$  sono reali e negative. Pertanto, imponendo le relative condizioni, si scorge abbastanza facilmente che si possono determinare P e Q di segni opposti e

tali che  $\frac{d\eta}{dy}$  e  $\frac{d^2\eta}{dy^2}$  risultino positive e quindi, come risulta subito dall'equazione differenziale,  $\frac{d^3\eta}{dy^3}$  negativa.

Analogo procedimento, con opportune modificazioni, vale se  $c(x, y)$  è negativo.

*Il teorema di unicità resta così dimostrato.*

*I teoremi di unicità per l'equazione (I) della Nota I, e per l'equazione (II), possono estendersi a campi estendentisi all'infinito, purchè la soluzione dell'equazione, nei punti all' $\infty$ , sia infinitesima di un certo ordine.*

**Fisica.** — *Potenziale di eccitazione per gli elettroni nella miscela di vapori di potassio e sodio* <sup>(1)</sup>. Nota del prof. A. CAMPETTI, presentata dal Socio A. NACCARI.

1°) Sono ben note le esperienze di Frank ed Hertz <sup>(2)</sup> relative alla eccitazione ed ionizzazione in un gas o vapore per opera degli elettroni (generalmente emessi da un filo incandescente), accelerati da un'opportuna caduta di potenziale: i detti A, sperimentando col vapore di mercurio, trovarono che, colla caduta di potenziale di circa 4,9 Volt, l'energia ceduta dagli elettroni agli atomi è emessa, almeno in parte, come radiazione monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 2536,72$  u. Å, radiazione di cui la frequenza  $\nu$  soddisfa alla nota relazione della teoria dei quanti  $h\nu = eV$ .

L'interpretazione data da Franck ed Hertz alle loro esperienze fu in parte modificata in successivi lavori, tra cui conviene specialmente ricordare quelli di Mac Lennann e Henderson <sup>(3)</sup>, Goucher <sup>(4)</sup>, Tate e Foote <sup>(5)</sup>, ecc. Dall'insieme di queste esperienze apparirebbe dimostrato che per molti vapori metallici vi sono due potenziali critici di eccitazione; il primo (*potenziale di prima eccitazione o di risonanza senza ionizzazione*) soddisfa alla relazione  $h\nu = eV$ , essendo  $\nu$  la frequenza dell'unica radiazione eccitata; il secondo (*potenziale di eccitazione completa o di ionizzazione*) soddisfa pure alla relazione  $h\nu = eV$ , quando al posto di  $V$  si ponga la *frequenza limite* della serie eccitata.

2°) Nel presente lavoro ho voluto iniziare l'esame del comportamento di miscugli di vapori: per ora mi sono limitato alla miscela di vapore di

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Torino.

<sup>(2)</sup> Franck ed Hertz, Verh. der D. Phys. Geselt., 16, 1914.

<sup>(3)</sup> Proc. Roy. Soc., 91, 1915; 92, 1916.

<sup>(4)</sup> Phys. Rev., 8, 1916; 10, 1917.

<sup>(5)</sup> Phys. Rev., 10, 1917; Wash. Acad. Sciences, 1917; Bureau of Standards, 14, 1918.

sodio e potassio. L'apparecchio adoperato, analogo a quello adoperato da Franck ed Hertz, Tate e Foote ecc., consiste in un largo tubo (diametro circa 4 cm.) lungo circa 50 cm., disposto verticalmente e circondato per circa metà della sua lunghezza da un tubo di rame riscaldato mediante una stufa elettrica a due sezioni, in guisa da poter avere una differenza di temperatura nelle varie parti della zona riscaldata. Un tappo di fibra, fissato con mastice all'apertura inferiore del tubo, porta sei grossi fili che sostengono il cilindro, la rete e il filamento di tungsteno della solita camera di ionizzazione; dalla parte superiore, mediante giunto a smeriglio, si stabilisce la comunicazione colla pompa di Gaede e si introduce un vasetto cilindrico di nichel, nel quale si pone il metallo da ridurre in vapore; la camera di ionizzazione è a temperatura più alta della zona ove si trova il metallo, di cui il vapore va poi a condensarsi sulle pareti fredde del tubo emergente.

La determinazione dei due potenziali critici si fa segnando le curve che danno, in funzione del potenziale stabilito tra il filamento e la rete, la intensità della corrente che raggiunge il cilindro esterno, malgrado un campo ritardatore (in queste esperienze in generale corrispondente a un Volt) applicato tra la rete e il filamento. La seconda di queste curve presenta allora parecchi massimi e minimi successivi; l'ascissa del primo massimo rappresenta il potenziale di prima eccitazione o di risonanza più il potenziale corrispondente alla velocità iniziale degli elettroni emessi dal filamento incandescente; l'ascissa del secondo massimo il doppio del potenziale di risonanza più il potenziale iniziale: per conseguenza la differenza fra le ascisse di due massimi consecutivi dà il potenziale di risonanza.

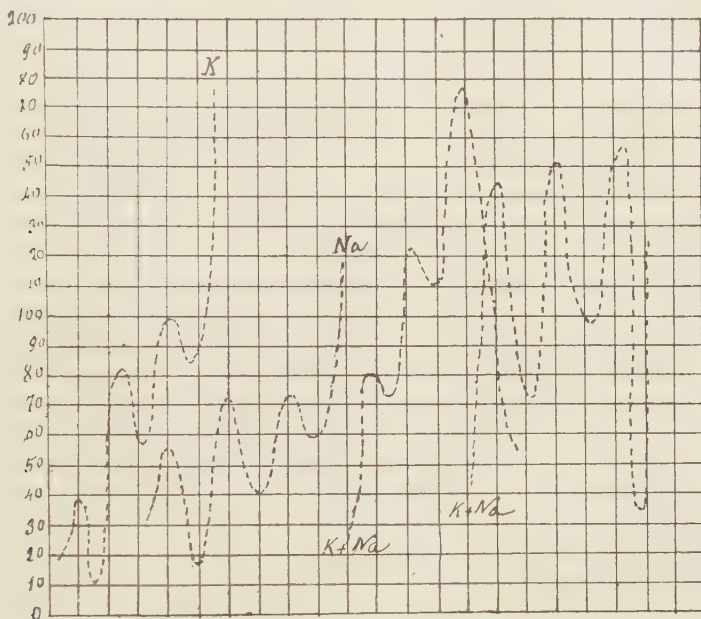
Il potenziale di ionizzazione può essere poi ricavato pure dalla stessa curva, osservando quando in essa si ha un cambiamento brusco di andamento, cioè l'ordinata sale rapidamente senza più massimi e minimi: ovvero può essere determinato mediante l'ascissa del punto in cui la curva che rappresenta la corrente totale del filamento ha un subito aumento nell'ordinata (sempre tenuto conto della velocità iniziale).

3°) Per quanto le esperienze con vapori di sodio e potassio isolatamente fossero già eseguite da Tate e Foote, era opportuno ripeterle, sia per controllo, sia per stabilire le eventuali differenze rispetto alle esperienze con miscela dei due vapori. Nelle esperienze sotto riferite ed eseguite con sodio e potassio purificati coi soliti procedimenti, si avevano risultati molto precisi pel potenziale di risonanza (con errore non superiore a 2 centesimi di Volt), meno esatti pel potenziale di ionizzazione, verisimilmente perchè il vuoto non era così elevato, come quello che si può raggiungere colla pompa di Langmuir.

Le due tabelle che seguono si riferiscono: la prima alle esperienze con potassio e sodio puri; la seconda alle esperienze con miscela dei due vapori. In esse  $s$  rappresenta la sostanza adoperata,  $t$  la temperatura della espe-



rienza;  $p_r$  e  $p_i$  i potenziali di risonanza e di ionizzazione osservati: i potenziali corrispondenti calcolati in base alla teoria dei quanti sarebbero per il sodio 2,10 e 5,13 Volt e pel potassio 1,60 e 4,30 Volt. I risultati dalle esperienze I, IV, VII e X sono rappresentati in modo più evidente dalle curve della figura, nella quale le ascisse corrispondono ai potenziali in Volt,



le ordinate rappresentano le intensità di corrente, in unità arbitrarie, tra rete e cilindro esterno.

TABELLA 1<sup>a</sup>.

|     | $s$ | $t$ | $p_r$ | $p_i$ |
|-----|-----|-----|-------|-------|
| I   | K   | 332 | 1,54  | 4,40  |
| II  | "   | 318 | 1,55  | —     |
| III | "   | 328 | 1,55  | 4,43  |
| IV  | Na  | 419 | 2,13  | 5,14  |
| V   | "   | 437 | 2,12  | —     |
| VI  | "   | 425 | 2,13  | 5,2   |

TABELLA 2<sup>a</sup>.

|      | $s$    | $t$ | $p_r$ |
|------|--------|-----|-------|
| VII  | K + Na | 299 | 1,61  |
| VIII | "      | 329 | 1,61  |
| IX   | "      | 379 | 1,59  |
| X    | "      | 416 | 2,19  |
| XI   | "      | 336 | 1,61  |
| XII  | "      | 380 | 2,19  |

Le esperienze VII, VIII, IX, X furono eseguite con lega liquida di potassio e sodio a pesi circa uguali, le XI e XII con sodio e potassio tenuti separati.

Convien notare che, data la disposizione necessariamente adottata per le esperienze, per cui il sodio e il potassio erano riscaldati alla stessa tem-

peratura, da principio si ottiene una curva con massimi *circa* corrispondenti a quelli del potassio (che ha tensione di vapore più elevata); poi, riscaldando a temperatura più alta, quando cioè nel vapore è presente poco potassio e molto sodio, appare una curva con *massimi* circa corrispondenti per distanza a quelli del sodio.

È però da notare che la distanza fra i massimi, cioè il rispettivo potenziale di risonanza, è di poco, ma in modo non dubbio aumentata di fronte al corrispondente pel metallo puro. Poco si può per ora concludere circa il potenziale di ionizzazione, del quale tuttavia (come appare dalla forma delle curve) la modificazione, per effetto della miscela, sembra dover essere più profonda.

4°) Queste esperienze, da considerare come preliminari, dovranno essere proseguite ed estese in migliori condizioni. Un difetto della disposizione adottato è questo che, essendo il sodio e potassio vaporizzati a pari temperatura e la tensione di vapore del potassio assai superiore a quella del sodio, accade che nella camera di ionizzazione è in grande prevalenza, a seconda della temperatura, uno dei due vapori. A questo inconveniente si potrà ovviare stabilendo due camere di riscaldamento a diversa temperatura, in guisa che nella camera di ionizzazione i vapori delle due sostanze figurino con concentrazioni dello stesso ordine. Questo mi propongo di fare in prossime esperienze.

**Meccanica celeste. — Sopra le perturbazioni secolari dell'inclinazione del pianetino Hungaria.** Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. È noto che Leverrier <sup>(1)</sup> studiando le perturbazioni secolari dell'inclinazione dei piccoli pianeti, in funzione della loro distanza dal Sole, ha indicato l'esistenza di una *distanza critica*, uguale a circa 1,95. Essa differisce pochissimo da quella del pianetino *Hungaria*; ed infatti se noi calcoliamo le perturbazioni secolari della sua inclinazione facendo uso delle equazioni lineari di Lagrange, troviamo che esse raggiungono l'enorme valore di *cinquantatre gradi* <sup>(2)</sup>, cosa veramente eccezionale nella Meccanica celeste.

2. Recentemente il prof. Charlier <sup>(3)</sup> ha ripreso lo studio delle perturbazioni secolari di *Hungaria* tenendo conto anche dei termini di terzo ordine nella funzione perturbatrice.

(1) Cfr. Annales de l'Observatoire.

(2) Charlier, *Mechanik des Himmels*, vol. I, pag. 435.

(3) Op. cit., pag. 427 e Bulletin Astronomique 1900.

Ponendo

$$(1) \quad x = \operatorname{tg} I \sin \Omega$$

$$(2) \quad y = \operatorname{tg} I \cos \Omega$$

dove l'inclinazione  $I$  ed il nodo  $\Omega$  sono riferiti al piano invariabile, e tenendo conto soltanto dell'azione di Giove, egli giunge alle equazioni

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} + y [b - c(x^2 + y^2)] = A \cos(\sigma t + \delta)$$

$$\frac{dy}{dt} - x [b - c(x^2 + y^2)] = -A \sin(\sigma t + \delta)$$

in cui  $A, b, c, \sigma, \delta$  sono costanti. Il prof. Charlier dichiara <sup>(1)</sup> di non aver potuto integrare queste equazioni, e le studia servendosi di un integrale particolare <sup>(2)</sup> corrispondente ad un'inclinazione costante. Con ragionamenti approssimati <sup>(3)</sup> conclude poi che l'inclinazione di *Hungaria* è sempre compresa tra  $9^{\circ}.0$  e  $26^{\circ}.6$  ciò che riduce l'oscillazione a soli *diciassette gradi*, di fronte ai  $53^{\circ}$  di Leverrier.

3. Ora, con alcune semplici trasformazioni, io sono giunto ad integrare esattamente le equazioni (3) del prof. Charlier, ciò che m'ha permesso di discutere il problema in modo più completo ed esauriente. Dopo l'integrazione rigorosa, ho eseguito il calcolo numerico, e con mia soddisfazione ho trovato che l'inclinazione di *Hungaria* ha in realtà un'oscillazione di circa *tre gradi e mezzo*; rimangono così eliminati i dubbi di gravi anomalie che continuavano ancora a sussistere non ostante le ricerche moderne del prof. Charlier.

La brevità dello spazio concessomi, non mi permette di riportare per intero la mia discussione; mi limiterò quindi in ciò che segue alle sole cose essenziali.

4. Poniamo per semplicità

$$(4) \quad \operatorname{tg} I = \xi$$

$$(5) \quad u = \Omega - \sigma t - \delta.$$

Moltiplichiamo quindi le (3) rispettivamente per  $x$  e per  $y$  e sommiamo; poi moltiplichiamole ancora per  $-y$  e per  $x$  e sommiamo. Con alcune riduzioni, avremo:

$$(6) \quad \frac{d\xi}{dt} = A \sin u$$

$$(7) \quad \frac{du}{dt} = \frac{A}{\xi} \cos u + c\xi^2 - b - \sigma$$

<sup>(1)</sup> Bulletin Astronomique, 1900, pag. 213.

<sup>(2)</sup> Cfr. *Mechanik des Himmels*, vol. I, pag. 428 e segg.

<sup>(3)</sup> Op. cit., vol. I, pag. 434 e segg.

dalle quali eliminando la  $u$  otteniamo

$$(8) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{A^2 - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2}{\xi} + (c\xi^2 - b - \sigma) \sqrt{A^2 - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2}.$$

La (8) può essere facilmente abbassata di ordine giacchè non contiene esplicitamente il tempo  $t$ . Prendendo  $\xi$  come variabile indipendente e ponendo  $\frac{d\xi}{dt} = \eta$  avremo con alcuni calcoli

$$(9) \quad \eta \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A^2 - \eta^2}{\xi} + (c\xi^2 - b - \sigma) \sqrt{A^2 - \eta^2}$$

equazione differenziale di primo ordine tra  $\xi$  ed  $\eta$ , la quale se poniamo  $A^2 - \eta^2 = z^2$  si trasforma in

$$(10) \quad \frac{dz}{d\xi} = b + \sigma - c\xi^2 - \frac{z}{\xi}$$

equazione differenziale lineare. Integrandola con le regole del calcolo e ponendo  $\operatorname{tg}^2 I = \xi^2 = s$ , otterremo con alcune riduzioni

$$(11) \quad t = t_0 + \frac{2}{c} \times \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{-s^4 + 4 \frac{b+\sigma}{c} s^3 + \left[ \frac{8\gamma}{c} - \frac{4(b+\sigma)^2}{c^2} \right] s^2 + \left[ \frac{A^2}{c^2} - \gamma \frac{b+\sigma}{c^2} \right] 16s - \frac{16\gamma^2}{c^2}}},$$

dove  $\gamma$  è una costante arbitraria <sup>(1)</sup>, ed  $s_0$  il valore assunto da  $s$  nell'istante iniziale  $t_0$ .

5. Sarebbe ora facile di eseguire la quadratura con le funzioni ellittiche di Weierstrass o di Jacobi; ma ciò non è necessario per il nostro scopo che consiste solo nel cercare i limiti tra cui varia l'inclinazione  $I$ .

A tal fine prendiamo per origine dei tempi l'anno 1850,0 a cui si riferiscono i risultati di Stockwell <sup>(2)</sup> sulle perturbazioni secolari degli otto

<sup>(1)</sup> Dalle posizioni fatte risulterebbe  $z = \pm A \cos u$ ; sostituendo in (10) e tenendo presenti le (6) e (7) si vedrebbe poi che il segno da adottarsi è quello positivo. Ciò posto indicando con  $u_0$  ed  $I_0$  i valori di  $u$  e di  $I$  nell'istante iniziale  $t_0$ , la costante arbitraria  $\gamma$  viene data dalla formula:

$$\gamma = A \operatorname{tg} I_0 \cos u_0 - \frac{b+\sigma}{2} \operatorname{tg}^2 I_0 + \frac{c}{4} \operatorname{tg}^4 I_0 = 0'',1554.$$

Notiamo poi che Charlier nella sua integrazione approssimata aumenta  $\delta$  di  $180^\circ$  ma cambia il segno di  $A$ .

<sup>(2)</sup> Cfr. *Smithsonian Contributions to Knowledge*, vol. XVIII; oppure Charlier, op. cit., pag. 385 e segg.



grandi pianeti. Avremo allora  $\sigma = -25'',934$  e  $\delta = 306^\circ 19' 21''$ ; nell'anno 1900,0 (cioè per  $t_0 = 50$ ) si ha poi, secondo le tavole di Psilander <sup>(1)</sup>,  $I_0 = 22^\circ,01$  ed  $\Omega_0 = 178^\circ,29$ . Infine, essendo Hungaria alla distanza media 1,9467, abbiamo dalle tavole del Raab  $A = 0'',135$ ;  $b = 25'',834$ ;  $c = 27'',14$ . Il polinomio sotto il segno di radice nella (11) diviene allora, dopo avere eseguito tutti i calcoli,

$$(12) \quad P(s) = -s^4 - 0,01474s^3 - 0,04576s^2 + 0,0007335s - 0,0005247,$$

ed ammette due radici complesse coniugate e due reali positive date dai seguenti valori:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0,155 - 0,027i & s_3 &= 0,123 \\ s_2 &= -0,155 + 0,027i & s_4 &= 0,173. \end{aligned}$$

Di più  $P(s)$  si conserva positivo per  $s_3 < s < s_4$ . Da un teorema generale sulla Meccanica dei sistemi sappiamo allora che  $s$  andrà oscillando tra il valore  $s_3 = 0,123$  ed il valore  $s_4 = 0,173$ . Ma si ha  $s = \text{tg}^2 I$ , e quindi l'angolo  $I$  oscillerà tra un minimo uguale a  $19^\circ,3$  ed un massimo uguale a  $22^\circ,6$ . Contrariamente dunque a quanto si era fin qui creduto, fondandosi nelle limitazioni indicate nei lavori di Charlier, le perturbazioni secolari dell'inclinazione di Hungaria sono dello stesso ordine di grandezza di quelle degli altri pianetini.

**Fisiologia.** — *Contributo alla conoscenza degli enzimi.* V: *La resistenza della ptialina all'azione di HCl in presenza di amido* <sup>(2)</sup>.  
Nota di D. MAESTRINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Nelle esperienze sugli enzimi dell'orzo germogliato <sup>(3)</sup> si vide che, mentre il titolo acido ottimo per l'azione *amilolitica* era di 0,3 % in g. di HCl, l'ottimo, per l'azione *proteolitica* e *lipolitica*, era di 0,4 % in g. di HCl.

La prima però si svolgeva nell'estratto filtrato, le altre nell'estratto, sotto forma di sospensione, cioè in presenza di *amido* e di *proteine vegetali*.

Ciò mi fece pensare che l'acidità diversa richiesta, per ottenere il massimo risultato, più che dalle diverse proprietà degli enzimi, potesse dipendere dalla presenza di sostrato (amido e proteine vegetali). Nelle ricerche,

<sup>(1)</sup> Queste tavole danno gli elementi dei pianetini riferiti al piano invariabile. Esse, insieme con quelle del Raab, si trovano nell'appendice del trattato del prof. Charlier, e riescono veramente utili per il calcolo dei piccoli pianeti.

<sup>(2)</sup> Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. Baglioni.

<sup>(3)</sup> Acc. Med. di Roma, adunanza del 27 giugno 1920 e Bull. R. Accad. Medica, anno XLVI, 1920, fasc. I.

che feci poi fare sulla ptialina (<sup>1</sup>), i dati ottenuti parvero avvalorare la mia ipotesi, che la ptialina, in presenza di amido, potesse resistere a titoli acidi più elevati.

Con speciali ricerche, in seguito, mi son proposto di stabilire, se l'amido avesse un'azione protettiva sulla ptialina, e di qual grado essa fosse.

In un matraccio (matraccio 1°) versavo cc. 0,5-1 di saliva mista umana, attiva, neutralizzata, e filtrata; cc. 25 di salda di amido (3 ‰), neutralizzata, e, dopo avere agitato, cc. 25 di HCl (soluzione a vari titoli); in un secondo (matraccio 2°) versavo uguale quantità di salda di amido, di saliva mista umana, neutralizzata, filtrata e bollita, e di acido; in un terzo matraccio versavo la stessa quantità di HCl, allo stesso titolo, la stessa quantità di saliva filtrata attiva, e 25 cc., di H<sub>2</sub>O distillata, neutra. Avevo in tal modo 3 matracci, in cui era lo stesso volume di liquido, alla stessa concentrazione acida.

I matracci erano tenuti tutti in termostato, a 30°-35° C., da 3 sino a 16-18 ore. Alla fine di questo soggiorno in termostato, i liquidi erano neutralizzati con KOH N/10, a la scorta di carta di tornasole; si aggiungevano al terzo matraccio cc. 25 di salda di amido (3 ‰), si portavano tutti i matracci allo stesso volume (cc. 120-150) aggiungendo H<sub>2</sub>O distillata neutra, indi si riportavano in termostato, e d'ora in ora si saggiava il potere amilolitico, secondo il metodo del Lintner, modificato (<sup>2</sup>).

Quando il soggiorno in termostato era stato di poche ore (3-6 ore) anche se le miscele avevano, prima della neutralizzazione, titoli acidi abbastanza elevati (g. 0,4-0,6 ‰ di HCl), ritenuti sinora distruttori dell'enzima, era possibile, dopo 3-12 ore dalla neutralizzazione, osservare, nel matraccio, contenente saliva attiva ad amido (matraccio 1°), una discreta quantità di zuccheri riducenti, mentre durante le prime ore non se ne potevano rivelare tracce; ma dopo un soggiorno in termostato, avanti la neutralizzazione, alla stessa concentrazione acida, di oltre 14 ore, il potere amilolitico si ripristinava, in parte, soltanto dopo molto tempo dalla neutralizzazione (due-quattro giorni).

Il liquido del matraccio 2° (con saliva bollita) e l'altro (3°), nel quale la saliva attiva era stata, prima della neutralizzazione, a contatto di solo acido, servivano da termini di confronto, per giudicare sull'attività amilolitica del liquido, ove la saliva, in ambiente acido, era stata a contatto di amido, cioè per giudicare sulla importanza della presenza dell'amido, a determinate concentrazioni acide.

Quando poi si usavano concentrazioni acide molto elevate (g. 1-1,5 ‰) e si prolungava oltre 14 ore la dimora in termostato, avanti la neutralizzazione, i saggi prelevati dal matraccio 1° non davano, dopo neutralizzazione, segni di presenza di amilolisi, per lungo tempo (8-10 giorni), tanto da credere l'enzima distrutto; ma se si aspettava e si prolungava ancora la dimora in termostato, si osservava, sebbene molto attenuata, sempre ride-

(<sup>1</sup>) Atti R. Acc. dei Lincei, vol. XXIX, fasc. 7°-8°, pag. 271; ed Archiv. farmac. Scienze affini, vol. XXX.

(<sup>2</sup>) D. Maestrini, Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXVIII, fasc. 10°, 1919,

starsi un'azione amilolitica; se la dimora in termostato era di poche ore (2-4 ore), l'azione amilolitica si ripristinava assai prima (dopo 2-4 giorni).

I controlli (amido e saliva bollita, e saliva attiva, rimasta prima della neutralizzazione, in soluzione acida) toglievano ogni dubbio sulla realtà del fenomeno.

L'attività da principio debole, va poi abbastanza celermente aumentando.

5-XI-1920.

Matraccio 1°. — Saliva mista umana, neutralizzata, filtrata, attiva cc. 1 + cc. 25 di salda di amido (3%) neutra + cc. 25 di HCl (cc. 0,3%) + toluolo: la miscela resta in termostato (30°-35° C) per 4 ore. Il titolo acido della miscela, controllato con KOH N/10, fu trovato = 0,6‰ in gr. di HCl.

Dopo la neutralizzazione con KOH N/10, si porta al volume di 130 cc. con aggiunta di H<sub>2</sub>O distillata neutra, indi si riporta in termostato (30°-35°).

|                |                         |                                                                             |     |     |  |     |
|----------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----|-----|--|-----|
| Dopo un'ora    | dalla neutralizzazione, | potere riducente di 1 cc. di miscela, espresso in mg. di zuccheri riducanti |     |     |  | 0 - |
| Dopo due       | h.                      | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 0 - |
| " tre          | "                       | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 0 - |
| " quattro      | "                       | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 0,5 |
| " cinque       | "                       | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 0,8 |
| " sei          | "                       | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 1,0 |
| " sette        | "                       | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 1,2 |
| " otto         | "                       | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 1,4 |
| " nove         | "                       | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 1,7 |
| " ventiquattro | "                       | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 2,0 |
| " quarantotto  | "                       | Id.                                                                         | Id. | Id. |  | 3,1 |

Matraccio 2°. — Saliva mista umana, neutralizzata, filtrata, bollita cc. 1 + 25 cc. di salda di amido (3%) neutralizzata + cc. 25 di HCl (cc. 0,3%) + toluolo; controllato il titolo acido della miscela con KOH N/10, mediante prelevamento di un campione, fu trovato = 0,6‰ in g. di HCl: la miscela resta in termostato (30°-35° C.) per 4 ore.

Dopo neutralizzazione, mediante KOH N/10, si porta al volume di 130 cc. con aggiunta di acqua distillata, perfettamente neutra, indi si riporta in termostato (30°-35° C.).

Nelle singole analisi fatte, non si è mai potuto rilevare alcun potere riducente.

Matraccio 3°. — Saliva mista umana, neutralizzata, filtrata attiva cc. 1 + cc. 25 di H<sub>2</sub>O distillata, neutra, + 25 cc. di HCl (cc. 0,3%) + toluolo: controllato il titolo acido della miscela con KOH N/10, fu trovato = 0,6‰ in g. di HCl; la miscela resta in termostato (30°-35° C.) per 4 ore.

Dopo neutralizzazione, mediante KOH N/10, si aggiungono cc. 25 di salda di amido (3%), neutra, e H<sub>2</sub>O distillata, neutra, sino al volume di cc. 130, indi si riporta in termostato (30°-35° C.).

Nelle singole analisi fatte, durante le prime 12 ore di soggiorno, in termostato, dopo neutralizzazione, non si trovò alcun potere riducente; ma nelle ore successive, un leggero potere riducente è pure apparso in questa prova.

Ogni matraccio, prima di aggiungere acido cloridrico, era agitato.

## CONCLUSIONI.

1) la salda di amido protegge la saliva mista umana dall'azione dannosa di HCl; nell'esempio suddetto, mentre dopo 4 ore, dalla neutralizzazione, nel matraccio N. 1, era evidente un'azione amilolitica, nei matracci N. 2 e N. 3 era assolutamente assente;

2) quest'azione protettiva si esercita anche, sebbene meno marcata, contro concentrazioni acide molte elevate (1-1,3 in g. di HCl);

3) la massima concentrazione acida, sopportata, *in vitro*, dalla saliva mista umana, per 3 ore, in presenza di amido, è di 1,6‰, in g. di HCl; sotto l'azione di titoli acidi più elevati, l'azione amilolitica non si ripristina.

*Il fatto descritto mette in evidenza l'importanza del sostrato per la conservazione dell'attività enzimatica della saliva umana, ma non ne è agevole, per ora, la spiegazione.*

Potrebbe immaginarsi che ciò si verificasse per fenomeni fisico-chimici (di adsorbimento) tra acido e sostrato, ma potrebbe anche supporre che la ptialina potesse difendersi dall'ambiente acido troppo elevato, per i rapporti che essa contrae col sostrato. Ulteriori studi, diretti ad approfondire la questione, potranno forse portare un po' di luce.

Intanto le osservazioni fatte ci suggeriscono di modificare alquanto le nostre opinioni sul destino della ptialina nel tubo gastro-enterico dell'uomo. Questo enzima non si distruggerebbe nello stomaco; e, giunto nell'intestino, trovando un ambiente favorevole alla sua azione, in grazia della neutralizzazione del succo gastrico, per opera del succo enterico e della bile, può cooperare alla scissione dei polisaccarici.

**Biologia.** — *Sulla topografia vertebro-midollare nello chimpanzè.* Nota I del dott. SERGIO SERGI <sup>(1)</sup>, presentata dal Socio B. GRASSI.

Presento qui i risultati di alcune osservazioni che ho potuto compiere sul cadavere di un giovane *Anthropopithecus troglodytes* (Flower e Lydekker = *Pan chimpanse* dell'Elliot) ♀ <sup>(2)</sup>.

Il metodo seguito in queste osservazioni concorda in gran parte con quello del Pfitzner <sup>(3)</sup> che parecchi anni or sono compì una ricerca analoga nell'uomo. Per le misure, come il Pfitzner, ho scelto quali punti di riferimento nella colonna vertebrale i centri dei forami intervertebrali e nel midollo spinale ho considerato solamente le radici posteriori: però a differenza di questo A. ho preferito di riferirmi al punto più craniale della loro area di penetrazione nel midollo spinale (tab. II), o al punto più caudale della medesima (tab. I) e non al centro di detta area. La numerazione dei fori intervertebrali differisce da quella del Pfitzner, perchè questi dà loro lo stesso numero delle radici con le quali prendono rapporto, mentre io li indico con

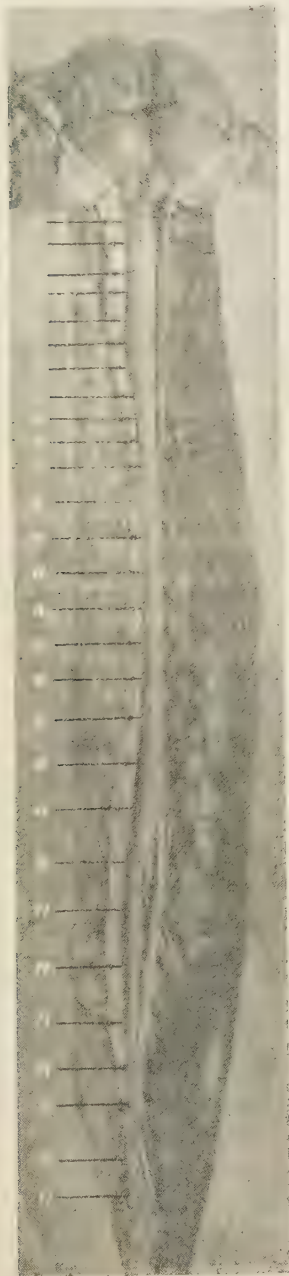
<sup>(1)</sup> Dall'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

<sup>(2)</sup> Morta al Circo Bisini di Roma il 22 giugno 1920. Peso del corpo gr. 11,800: lunghezza mm. 900. Al termine del secondo periodo dentale di Magiot.

<sup>(3)</sup> Wilhelm Pfitzner, *Ueber Wachstumsbeziehungen zwischen Rückenmark und Wirbelkanal*. Morph. Jahrb., IX, Bd. 1884.



quel numero che loro spetta, perchè il primo vero forame di coniugazione è quello compreso tra la prima e la seconda vertebra e questa è in rapporto con la 2<sup>a</sup> rad. spinale, mentre la 1<sup>a</sup> rad. è compresa tra l'atlante e l'occipitale. Le misure delle altre tabelline (distanza tra i centri dei forami intervertebrali e tra i dischi intervertebrali) servono ad integrare le misure precedenti e forniscono nuovi elementi comparativi per il saggio topografico.



## MIDOLLO SPINALE

### DI *ANTHROPOPITHECUS TROGLODYTES* ♀

(Fotografia = 1/3 circa della grandezza naturale).

La cavità vertebrale è stata aperta largamente dal lato dorsale fino a livello del 27° forame di coniugazione (per questa ragione le misure riportate nelle tabelle si fermano a questo punto). Il sacco della dura madre fu inciso longitudinalmente lungo una linea laterale destra, così da ottenere a sinistra un lembo della dura madre alquanto ampio. Questo lembo fu rovesciato in fuori e fissato con tante spille quanti sono i forami di coniugazione. Le spille furono infisse nel centro dei forami di coniugazione. Quindi fu presa la fotografia e in questa, a livello delle teste delle spille, furono tracciate le linee numerate, le quali pertanto indicano i piani trasversali per i quali passano i centri dei singoli forami. Le distanze tra le linee sono le distanze in proiezione tra i forami intervertebrali. La linea indicata con *a* segna un piano trasversale, nel quale cade il punto centrale dello spazio tra occipitale ed atlante e per il quale passa la 1<sup>a</sup> radice spinale. Nel caso speciale la 1<sup>a</sup> radice spinale manca, anomalia che si incontra anche nell'uomo (vedi Sterzi). Le radici che formano la coda equina sono state alquanto divaricate per mettere allo scoperto il cono midollare ed il filo terminale. Nella figura si vedono anche nettamente le origini apparenti delle radici posteriori.

TABELLA I.

Topografia delle aree di penetrazione delle radici posteriori nel midollo spinale  
relativamente alla posizione dei canali intervertebrali

(misure a sinistra).

L'estremità caudale dell'area di penetrazione delle radici posteriori (cioè il  
punto più caudale della loro origine apparente) cade in un piano trasversale  
del midollo spinale, che si trova:

Posizione delle aree  
delle radici posteriori

per la 2<sup>a</sup> rad. post. 4 mm. sopra il 1° foro di coniugazione (atlanto-epistrofeo)

|      |       |      |
|------|-------|------|
| " 3  | " 9   | " 2  |
| " 4  | " 6   | " 3  |
| " 5  | " 8   | " 4  |
| " 6  | " 7   | " 5  |
| " 7  | " 9   | " 6  |
| " 8  | " 15  | " 7  |
| " 9  | " 17  | " 8  |
| " 10 | " 24  | " 9  |
| " 11 | " 21  | " 10 |
| " 12 | " 26  | " 11 |
| " 13 | " 30  | " 12 |
| " 14 | " 28  | " 13 |
| " 15 | " 25  | " 14 |
| " 16 | " 26  | " 15 |
| " 17 | " 26  | " 16 |
| " 18 | " 28  | " 17 |
| " 19 | " 31  | " 18 |
| " 20 | " 36  | " 19 |
| " 21 | " 43  | " 20 |
| " 22 | " 53  | " 21 |
| " 23 | " 69  | " 22 |
| " 24 | " 81  | " 23 |
| " 25 | " 98  | " 24 |
| " 26 | " 105 | " 25 |
| " 27 | " 118 | " 26 |
| " 28 | " 128 | " 27 |

di cui 4 mm. sopra il 6° foro di coniug.

|                        |      |
|------------------------|------|
| " 6                    | " 7  |
| " 14                   | " 8  |
| " 3                    | " 7  |
| " 11                   | " 9  |
| " 1                    | " 8  |
| " 12                   | " 10 |
| " 2                    | " 9  |
| " 15                   | " 11 |
| " 1                    | " 10 |
| " 15                   | " 12 |
| a livello del 11       |      |
| " 12 mm. sopra il 13   |      |
| quasi a livello del 12 |      |
| " 13 mm. sopra il 14   |      |
| a livello del 13       |      |
| " 14 mm. sopra il 15   |      |
| " 1                    | " 14 |
| " 15                   | " 16 |
| " 3                    | " 15 |
| " 15                   | " 17 |
| " 2                    | " 16 |
| " 19                   | " 18 |
| " 3                    | " 17 |
| " 23                   | " 19 |
| " 6                    | " 18 |
| " 35                   | " 20 |
| " 15                   | " 19 |
| " 47                   | " 21 |
| " 29                   | " 20 |
| " 9                    | " 19 |
| " 60                   | " 22 |
| " 38                   | " 21 |
| " 20                   | " 20 |
| " 3                    | " 19 |
| " 79                   | " 23 |
| " 58                   | " 22 |
| " 36                   | " 21 |
| " 18                   | " 20 |
| " 88                   | " 24 |
| " 69                   | " 23 |
| " 48                   | " 22 |
| " 26                   | " 21 |
| " 8                    | " 20 |
| " 98                   | " 25 |
| " 81                   | " 24 |
| " 62                   | " 23 |
| " 41                   | " 22 |
| " 19                   | " 21 |
| " 1                    | " 20 |
| " 112                  | " 26 |
| " 92                   | " 25 |
| " 75                   | " 24 |
| " 56                   | " 23 |
| " 35                   | " 22 |
| " 13                   | " 21 |

area della 2<sup>a</sup> rad.

|      |                    |
|------|--------------------|
| " 3  | " tra 1° e 2° foro |
| " 4  | " 2 e 3            |
| " 5  | " 3 e 4            |
| " 6  | " 4 e 5            |
| " 7  | " 5 e 6            |
| " 8  | " 5 e 6            |
| " 9  | " 6 e 7            |
| " 10 | " 6 e 7            |
| " 11 | " 7 e 8            |
| " 12 | " 8 e 9            |
| " 13 | " 9 e 10           |
| " 14 | " 10 e 11          |
| " 15 | " 11 e 12          |
| " 16 | " 12 e 13          |
| " 17 | " 13 e 14          |
| " 18 | " 14 e 15          |
| " 19 | " 15 e 16          |
| " 20 | " 16 e 17          |
| " 21 | " 17 e 18          |
| " 22 | " 17 e 18          |
| " 23 | " 18 e 19          |
| " 24 | " 18 e 19          |
| " 25 | " 19 e 20          |
| " 26 | " 19 e 20          |
| " 27 | " 19 e 20          |
| " 28 | " 20 e 21          |

TABELLA II.

Lunghezza del percorso intravertebrale delle singole radici posteriori dal punto più craniale della loro origine apparente (penetrazione delle radici posteriori nel midollo spinale) alla parte media del rispettivo foro di coniugazione.

| rad. post. | 1 <sup>a</sup> manca<br>mm. | differenza<br>tra il valore<br>della radice<br>soprastante<br>e quella<br>immediatamente<br>sottostante | Confronto<br>con i valori del Sottile<br>sull'uomo |                                                    |
|------------|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
|            |                             |                                                                                                         | differenze<br>con i valori<br>minimi<br>dell'uomo  | differenze<br>con i valori<br>massimi<br>dell'uomo |
| "          | 2                           | 13                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 3                           | 17                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 4                           | 17                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 5                           | 18                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 6                           | 17                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 7                           | 19                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 8                           | 22                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 9                           | 23                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 10                          | 26                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 11                          | 29                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 12                          | 32                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 13                          | 36                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 14                          | 41                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 15                          | 37                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 16                          | 40                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 17                          | 35                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 18                          | 38                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 19                          | 42                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 20                          | 45                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 21                          | 53                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 22                          | 62                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 23                          | 76                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 24                          | 88                                                                                                      | +                                                  | +                                                  |
| "          | 25                          | 101                                                                                                     | +                                                  | +                                                  |
| "          | 26                          | 108                                                                                                     | +                                                  | +                                                  |
| "          | 27                          | 123                                                                                                     | +                                                  | +                                                  |
| "          | 28                          | 133                                                                                                     | +                                                  | +                                                  |

TABELLA III.

Distanza in proiezione tra i centri dei forami di coniugazione a sinistra.

(I numeri romani indicano le vertebre).

| occlp-atlante | mm. | foro 1 <sup>o</sup> | mm. | foro 14 <sup>o</sup> | mm. |
|---------------|-----|---------------------|-----|----------------------|-----|
| 1             | 9   | foro 1 <sup>o</sup> | 13  | XV                   | 13  |
| 2             | 10  | "                   | 15  | "                    | 15  |
| III           | 8   | "                   | 16  | XVI                  | 12  |
| 3             | 10  | "                   | 17  | XVII                 | 13  |
| 4             | 8   | "                   | 18  | XVIII                | 16  |
| 5             | 10  | "                   | 19  | XIX                  | 17  |
| 6             | 11  | "                   | 20  | XX                   | 20  |
| 7             | 11  | "                   | 21  | XXI                  | 18  |
| 8             | 10  | "                   | 22  | XXII                 | 22  |
| 9             | 10  | "                   | 23  | XXIII                | 21  |
| 10            | 14  | "                   | 24  | XXIV                 | 19  |
| 11            | 15  | "                   | 25  | XXV                  | 17  |
| 12            | 13  | "                   | 26  | XXVI                 | 20  |
| 13            | 13  | "                   | 27  | XXVII                | 16  |
| 14            | 13  | "                   | 27  |                      |     |

TABELLA IV.

Distanza tra i centri delle facce posteriori dei singoli dischi intervertebrali.

(I numeri romani indicano le vertebre).

| apice apofisi<br>odontoidi | mm. | disco 11 <sup>o</sup> | mm.   |
|----------------------------|-----|-----------------------|-------|
| I + II                     | 16  | " 12                  | XIII  |
| disco 1 <sup>o</sup>       | 9   | " 13                  | XIV   |
| " 2                        | 8   | " 14                  | XV    |
| " 3                        | 10  | " 15                  | XVI   |
| " 4                        | 10  | " 16                  | XVII  |
| " 5                        | 11  | " 17                  | XVIII |
| " 6                        | 11  | " 18                  | XIX   |
| " 7                        | 12  | " 19                  | XX    |
| " 8                        | 12  | " 20                  | XXI   |
| " 9                        | 12  | " 21                  | XXII  |
| " 10                       | 12  | " 22                  | XXIII |
| " 11                       | 12  | " 23                  | XXIV  |

**Matematica.** — *Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie.* III: *Sistema dei covarianti di dato grado, e teorema di Sylvester.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI.

7. In questa Nota mi propongo di approfondire l'interpretazione geometrica dei covarianti d'una forma binaria stabilita nelle precedenti, collegandola alla considerazione dei sistemi lineari di ipersuperficie di  $S_n$  uniti per le trasformazioni del gruppo  $\Gamma$ , e traendone una visione d'assieme del sistema dei covarianti di dato grado, che mi sembra atta a gettar luce sull'impostazione di alcuni problemi generali.

Lo strumento di cui principalmente mi giovo è un importante risultato di Fano (contenuto nella Memoria già citata) sulla struttura dei gruppi continui  $\infty^3$ , non integrabili, di trasformazioni proiettive d'uno spazio lineare  $S_d$ , i cui dettagli verranno precisati man mano che lo richiederà la trattazione.

8. Sia dapprima  $\Phi$  un covariante di grado  $l$  ed ordine  $m$  della forma binaria  $f$ ,  $\Sigma$  il sistema delle relative  $\mathcal{A}_P$ . Il minimo sistema lineare  $L$  di ipersuperficie d'ordine  $l$  di  $S_n$  contenente totalmente  $\Sigma$ , è evidentemente quello a cui appartengono le ipersuperficie ottenute eguagliando a zero gli  $m+1$  coefficienti di  $\Phi$ , e quindi la sua dimensione  $d$  è  $\leq m$ . In virtù della sua stessa definizione,  $L$  è mutato in sè da tutte le trasformazioni di  $\Gamma$ .

Considerando le ipersuperficie di  $L$  come elementi o punti di uno spazio  $S_d$ , il gruppo  $\Gamma$  vi induce un gruppo  $\infty^3$ ,  $G$  di proiettività, che mutano in sè la curva  $C$  i cui punti corrispondono alle  $\mathcal{A}_P$  di  $\Sigma$ , curva che chiameremo *image* del covariante  $\Phi$ . Essa è d'ordine  $m$ , giacchè, come risulta dalla definizione di  $\Sigma$  data al n. 3, un sistema lineare  $\infty^{d-1}$  contenuto in  $L$  ha  $m$  ipersuperficie comuni con  $\Sigma$ .

Poichè le trasformazioni di  $G$  subordinano sulla curva razionale  $C$  il gruppo  $\infty^3$  delle relative trasformazioni birazionali, così, se fosse  $m > d$ , quel gruppo dovrebbe mutare in sè la  $g_m^d$  delle sezioni iperpiane di  $C$ , mentre è noto che sopra un ente razionale non esistono serie lineari (incomplete) invarianti.

Sarà dunque  $d = m$ , e quindi la  $C$  sarà una  $C^m$  razionale normale; in altre parole gli  $m+1$  coefficienti di  $\Phi$  sono linearmente indipendenti.

9. Anzichè partirci, come al n. prec. dal covariante  $\Phi$ , prendiamo ora le mosse da un sistema  $L, \infty^d$ , d'ipersuperficie d'ordine  $l$  di  $S_n$  unito in  $\Gamma$ ,



e poniamo come prima gli elementi di  $L$  in corrispondenza biunivoca coi punti di un  $S_d$ . Il gruppo  $G$  di trasformazioni proiettive *indotto* ivi da  $\Gamma$ , sarà anch'esso  $\infty^3$ , giacchè se l'isomorfismo tra  $G$  e  $\Gamma$  non fosse oloedrico, all'identità in  $G$ , corrisponderebbe entro  $\Gamma$ , un sottogruppo invariante, mentre  $\Gamma$ , come il gruppo  $\infty^3$  delle proiettività di  $r$  a cui è isomorfo, è *semplice* cioè non contiene sottogruppi invarianti <sup>(1)</sup>. Inoltre per l'identità di struttura tra  $G$  e  $\Gamma$ , risulterà semplice anche  $G$ .

Sia ora  $C$  una curva di  $S_d$  unita in  $G$ . Un suo punto qualunque  $D$  risulterà unito per le  $\infty^2$  trasformazioni d'un sottogruppo  $g$  di  $G$ ; e pertanto l'ipersuperficie  $\mathcal{A}$  di  $S_n$  corrispondente a  $D$  sarà pure unita per le trasformazioni d'un sottogruppo  $\infty^2, \gamma$ , di  $\Gamma$ , cioè per le trasformazioni di  $\Gamma$  che lascian fisso un certo punto  $P$  di  $C^n$ . Al variare di  $D$  su  $C$ , l'ipersuperficie  $\mathcal{A}$  descrive dunque un sistema  $\Sigma$ , cioè  $C$  è *immagine d'un covariante  $\Phi$  di  $f$*  che si dirà *appartenente* al sistema  $L$ .

La ricerca di tutti i covarianti appartenenti ad  $L$  è dunque ricondotta a quella delle curve (razionali normali) di  $S_d$  unite in  $G$ .

10. Ricorriamo ora ai risultati di Fano. Anzitutto teniamo conto che ogni gruppo proiettivo *semplice*  $\infty^3$  di uno spazio  $S_d$  trasforma in sé un certo numero di curve razionali normali di ordine  $\leq d$  che appartengono a spazi fra di loro indipendenti e i cui ordini aumentati ciascuno di un'unità danno per somma  $d + 1$ .

Dette  $C^{h_1}, C^{h_2}, \dots, C^{h_t}$  quelle curve, appartenenti agli spazi  $S_{h_1}, S_{h_2}, \dots, S_{h_t}$ , potremo, per quanto precede, associare ad esse altrettanti covarianti  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_t$  appartenenti al sistema  $L$ , e di ordini rispettivi  $h_1, h_2, \dots, h_t$  tali che  $\sum_{i=1}^t (h_i + 1) = d + 1$ . Non è escluso che qualcuna delle  $h_i$  possa annullarsi, cioè che la corrispondente curva si riduca ad un punto; ognuno di tali punti è immagine di un covariante d'ordine zero, cioè di un invariante di  $f$ .

Ci proponiamo ora di provare che i covarianti predetti costituiscono *un sistema linearmente* <sup>(2)</sup> *completo di covarianti appartenenti al sistema lineare  $L$* , cioè che ogni altro covariante appartenente ad  $L$  è una combinazione lineare a coefficienti costanti di covarianti (dello stesso ordine) estratti dal gruppo considerato.

11. Sia difatti  $\Psi$  un covariante, d'ordine  $h$ , appartenente ad  $L$ , e distinto da  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_t$ . La sua immagine in  $S_d$  sarà una curva razionale normale  $C^h$ , unita in  $G$ , e distinta da  $C^{h_1}, C^{h_2}, \dots, C^{h_t}$ ; e questa circo-

<sup>(1)</sup> Cfr. Fano, loc. cit., pag. 189.

<sup>(2)</sup> L'aggettivo *linearmente* si aggiunge per evitare equivoci dipendenti dal significato che la locuzione *sistema completo* di forme invariantive ha nella teoria classica.

stanza, come ha dimostrato il Fano <sup>(1)</sup>, può verificarsi soltanto se due o più fra i numeri  $h_i$  sono eguali tra di loro e ad  $h$ .

Supponiamo per semplicità che sia  $h_1 = h_2 = h$ , le altre  $h_i$  essendo diverse da  $h$ , e diciamo corrispondenti sulle due curve  $C^{h_1}, C^{h_2}$  due punti  $P_1, P_2$  quando sono uniti per lo stesso sottogruppo  $\infty^2, g$  di  $G$ , cioè quando sono immagini di due ipersuperficie  $\mathcal{A}'_P, \mathcal{A}''_P$  relative ai covarianti  $\Phi_1, \Phi_2$  e allo stesso punto  $P$  di  $C^n$ .

Allora, in virtù delle conclusioni di Fano, gli unici punti dello  $S_{2h+1}$  individuato da  $S_{h_1}, S_{h_2}$  uniti per tutte le operazioni di  $g$ , son quelli della retta  $P_1 P_2$ ; e ognuno di essi individua una  $C^h$  razionale normale unita in  $G$ . Queste  $C^h$  sono direttrici della rigata  $R$  generata dalle rette congiungenti punti corrispondenti di  $C^{h_1}, C^{h_2}$ , e di esse ne passa una sola per ogni punto di  $R$ ; inoltre all'infuori di esse non vi sono in  $S_d$  altre curve d'ordine  $l$  mutate in sè dalle operazioni di  $G$ . Al sistema di queste  $C_h$  appartiene dunque anche l'immagine del covariante  $\Psi$ .

D'altra parte poichè  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  hanno lo stesso ordine, ogni forma

$$\lambda \Phi_1 + \mu \Phi_2,$$

è un covariante di  $f$ ; e la relativa immagine in  $S_d$  è quindi una  $C^h$  razionale normale, variabile in un sistema continuo  $\infty^1$ . Questo non potrà esser distinto dal sistema predetto, e quindi per convenienti valori di  $\lambda, \mu$  si avrà:

$$\Psi \equiv \lambda \Phi_1 + \mu \Phi_2 \qquad \text{c. d. d.}$$

12. Supponiamo ora che  $L$  sia il sistema di tutte le forme d'ordine  $l$  dello  $S_n$  che è evidentemente unito per le operazioni del gruppo  $\Gamma$ . Sarà  $d = \binom{l+n}{n} - 1$  e quindi potremo concludere col seguente teorema di Sylvester <sup>(2)</sup>:

*La somma degli ordini dei covarianti linearmente indipendenti, di dato grado  $l$ , relativi ad una forma binaria d'ordine  $n$  aumentati ciascuno di un'unità, è eguale ad  $\binom{l+n}{n}$ .*

In altre parole il numero complessivo dei coefficienti d'un sistema linearmente completo di covarianti di grado  $l$ , relativi ad una forma d'ordine  $n$  è  $\binom{l+n}{n}$ ; ed inoltre, come risulta dalle considerazioni precedenti, a quei

<sup>(1)</sup> Loc. cit., n. 16.

<sup>(2)</sup> Sylvester, *Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées* [Journal für Mathematik, Bd. 84 (1878) pp. 89-114] pag. 109. Cfr. anche Stroh, *Zur Theorie der Combinanten* [Math. Annalen, Bd. 22 (1883) pp. 393-405] pag. 405. Il teorema è stato esteso a più forme binarie da Study, *Methoden zur Theorie der ternären Formen* [Leipzig, Teubner (1889)] pag. 100.

coefficienti corrispondono, nello  $S_d$  rappresentativo di tutte le forme d'ordine  $l$  di  $S_n$ ,  $d + 1$  punti linearmente indipendenti. Sicchè dal teorema predetto si desume la proprietà seguente:

*Ogni forma d'ordine  $l$  in  $n + 1$  variabili  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , può esprimersi come combinazione lineare dei coefficienti d'un sistema linearmente completo di covarianti dello stesso grado, relativi ad una forma binaria  $a_x^n$  d'ordine  $n$ .*

G. C.







# INDICE DEL VOLUME XXIX, SERIE 5<sup>a</sup>. — RENDICONTI

1920 — 2° SEMESTRE.

## INDICE PER AUTORI

### A

- ADINOLFI. « Sui centri di assorbimento delle soluzioni colorate » n. 38.  
— « Influenza della dissociazione sull'assorbimento del permanganato di potassio » n. 87.  
AMBROSETTI. « Determinazione proiettiva di una congruenza W. » n. 121.  
ARMELLINI. « Osservazioni sopra le comete secolari » n. 183.  
— « Nuova determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio » n. 241; 262.  
— « Sopra le perturbazioni secolari dell'inclinazione del pianetino Hungaria » n. 388.  
ARTINI. « Cassiterite e titanite di Baveno » n. 13.  
— « Sulla presenza del crisoberillo nella dolomia di Campolongo (Canton Ticino) » n. 77.  
ARTOM. « Nuovi fatti e nuovi problemi sulla biologia e sulla sistematica del genere *Artemia* » n. 65.  
ASCOLI e IZAR. « Azione del siero di gravida su estratti placentari » n. 275.

### B

- BAMBACIONI. « Sulle strutture fibrillari del Némec » n. 62.

BECCARI. « Sul modo di agire dell'adrenalina sul cuore » n. 159.

BIANCHI. « Osservazioni circa il carattere quadratico dei numeri in un corpo quadratico » n. 223.

BOLDRINI. « Differenze sessuali nei pesi del corpo e degli organi umani » n. 71; 98; 166.

BORDONI. « Sulle trasformazioni isentro-  
piche di certi sistemi univarianti » n. 124.

BOTTAZZI. « Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi: XIII. Contrattura da freddo nei muscoli striati » n. 105.

### C

CAMPETTI. « Potenziale di eccitazione per gli elettroni nella miscela di vapori di potassio e sodio » n. 385.

CANNERI. « Sul nitrito tallico » n. 142.

CANTONE. « Forze elastiche molecolari e vibrazioni che ne risultano » n. 249.

CARANO. « Studio cito-embriologico sul genere *Erigeron* » n. 157.

CASTELNUOVO (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono. 302; segnala fra queste numerosi lavori del Corrisp. *Sacco* e un volume del Museo *Johanneum*. 369.

- CIUSA. « Sopra alcuni sali a struttura p-, o- e m-chinoide » n. 146.
- e VECCHIOTTI. « Nitroderivati e nitro-idrazoni » n. 42.
- CLEMENTI. « Una nuova ipotesi sul significato fisiologico delle protamine e degli istoni rispetto al ricambio nucleare » n. 298.
- « Sui rapporti tra l'attività peptidolitica dell'erepsina intestinale e la costituzione chimica del substrato » n. 327.
- CLERICI. « Nuova giacitura di minerali presso Roma » n. 318.
- COMESSATTI. « Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie: I. Idee direttive e loro prime conseguenze » n. 313.
- « II. Teorema di Bruno. Covarianti canonici » n. 344.
- « III. Sistema dei covarianti di dato grado e teorema di Sylvester » n. 398.
- COMUCCI. « Sulle metamorfosi di contatto fra calcari e porfido granitico nel giacimento metallifero di Orroli (Sardegna) » n. 202.
- CONTARDI. « Alcune trasformazioni del triossimetilene » n. 321.
- CORBINO. « La teoria elettronica della conducibilità dei metalli nel campo magnetico » n. 282.
- « L'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère e la teoria elettronica dei metalli » n. 335.
- CRUDELI. « Sulle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie (seconda approssimazione) » n. 265.
- CUSMANO. « Riduzione catalitica dell'onnitroazossibenzolo » n. 93.
- « Condensazioni intramolecolari per mezzo del gruppo ossiazoico » n. 365.
- CUTTICA. « L'analisi termica del sistema nitrato di tallio-nitrito di tallio- » n. 89.

## D

- DE ANGELIS. « Della forma cristallina della nitro-di-bromo-acetanilide
- $$\text{C}_6\text{H}_2 \cdot \text{NO}_2 \cdot \underset{1}{\text{Br}} \cdot \underset{2}{\text{Br}} \cdot \underset{5}{\text{NH}}(\text{C}_2\text{H}_5\text{O})$$
- n. 47.
- DE ANGELIS D'OSSAT. « Calcare e viti americane » n. 58.

- DEL VECCHIO. « I teoremi di unicità per le equazioni differenziali del 3° ordine paraboliche lineari » n. 346; 382.
- DENJOY. « Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus » n. 291.
- « Sur les ensembles parfaits présentant le caractère (A) » n. 316.
- « Les rapports des ensembles parfaits présentant le caractère (A) et des fonctions admettant une dérivée seconde généralisée » n. 350.
- DE STEFANI. « Silicospongie fossili della Liguria occidentale » n. 16; 237; 379.

## E

- EISENHART. « Sulle congruenze di sfere di Ribaucour che ammettono una deformazione finita » n. 31.

## F

- FANO. « Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti di trasformazioni birazionali » n. 113; 175; 231.
- FEDERICI. « Sulla lotta naturale contro le larve di Anopheles per mezzo degli insetti acquatici » n. 170; 219; 244.
- FOÀ. Fa omaggio di tre volumi del suo « Trattato di anatomia patologica » n. 369.
- FUBINI. « Nuove ricerche di geometria proiettivo-differenziale » n. 9.
- « Differenziali controvarianti » n. 118.

## G

- GALLETTI. Invia in esame la sua Memoria: « Il quadro scientifico della radiotelegrafia » n. 369.
- GALOTTI. « Ricerche sul manicotto glandulare (stomaco larvale) della Rana esculenta » n. 269.
- GORTANI. « Permocarbone e permiano nella catena del Caracorum » n. 53.
- GRASSI. « Osservazioni sulla vita degli anofeli » n. 307; 339.

## I

- IUCCI. « Sulla differenziazione delle caste nella società dei termitidi: i neotenicici » n. 68; 95.
- IZAR. Ved. Ascoli.

L

LONGO. « Ricerche sul Melo ' senza fiori  
(*Pyrus apetala* Münchh.) » n. 290.

M

MAESTRINI. « Contributo alla conoscenza  
degli enzimi: IV. Emulsina, citasi,  
ereptasi ed ureasi nell'orzo germe  
gliato » n. 164.

— « V. La resistenza della ptialina all'azione di HCl in presenza di amido » n. 391.

MAGGI. « Sulla propagazione delle onde  
di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi » n. 371.

MARLETTA. « Di alcune varietà abeliane » n. 19; 80.

MAZZETTI. « Sistemi doppio-ternari con  
lacuna di miscibilità allo stato liquido  
ed allo stato solido » n. 150; 194.

MILLOSEVICH. « Paternoite: un nuovo minerale nel giacimento salifero di Monte Sambuco in territorio di Calascibetta (Sicilia) » n. 286.

MUNERATI. « L'influenza delle basse temperature sulla germinazione del frumento appena raccolto e dei semi così detti freschi » n. 273.

N

NALLI. « Sopra una equazione funzionale » n. 23; 84.

NOVARESE. « Il Cambriano dell'Iglesiente » n. 56.

O

ONICESCU. « Spazi che ammettono una traslazione infinitesima lungo le linee di lunghezza nulla » n. 294.

P

PADOA. « Studi sui calori specifici » n. 198.

PASCAL. « Forze di pressione su un montante di aeroplano » n. 26.

— « Circuitazione superficiale: I. Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione » n. 253.

PASTORE. « Azione della saliva sull'amido in presenza di succo gastrico e di succo pancreatico » n. 271.

PEROTTI. « Ulteriori ricerche sui bacilli radicali della *Diplotaxis erucoides* D. C. » n. 361.

PEYRONEL. « La forma ascofora della *Rhacodiella castaneae*, agente del nerume delle castagne » n. 324.

PINCHERLE. « Sulla funzione iterata di una razionale intera » n. 3.

— « Sopra alcune equazioni funzionali » n. 279.

Q

QUAGLIARIELLO. « L'azoto proteico e l'azoto residuale nel siero di sangue di vari animali (vertebrati e invertebrati) » n. 213.

R

ROVERETO. « I fenomeni erosivi di modellamento regionale considerati nel loro svolgimento continuato e non secondo cicli ripetuti » n. 154.

S

SERGI. « I muscoli intercostali e la differenza sessuale del tipo di respirazione nello cimpanzé » n. 208.

— « Sulla topografia vertebro-midollare nello cimpanzé » n. 394.

SERINI. « Teoria del condensatore elettrico a piatti circolari » n. 34; 257.

SOLI. « Sul potere battericida della mucosa intestinale » n. 330.

STIPA. « Le superficie proiettivamente applicabili » n. 127.

T

TERRACINI. « Sulla varietà degli spazi tangenti a una data varietà » n. 130; 186.

— « Su una superficie del 6° ordine e della 6ª classe, le cui asintotiche sono cubiche sghembe » n. 356.

TRICOMI. « Sviluppo degli integrali di un'equazione differenziale in serie di integrali definiti » n. 134.

V

VECCHIOTTI. Ved. *Ciusa*.

VOLTERRA (Vice Presidente). Ringrazia per la sua nomina a Vice Presidente, e parla delle condizioni scientifiche ed economiche dell'Accademia. 301.

— Commemora i Soci morti durante le ferie accademiche, e comunica i ringraziamenti degli accademici recentemente eletti. 302.

— Presenta varî pieghi suggellati inviati dai signori *Bruni, Clemens, Galletti, Menghi, Pastori, Romani*. 302.

VOLTERRA. Comunica i ringraziamenti del prof. *Gaglio* per la sua nomina a Corrispondente dell'Accademia. 369.

— Informa la Classe che sono stati eletti rispettivamente ad Amministratore e Amministratore aggiunto i Soci *Piotta* e *Lanciani*. 369.

W

WASHINGTON DEL REGNO. « Sulle variazioni residue della resistenza elettrica prodotte da processi termici negli acciai al nichel ». 138; 192.



## INDICE PER MATERIE

---

### A

AGRONOMIA. « Calcare e viti americane ». *G. De Angelis d'Ossat*. 58.

ANALISI. « Sulla funzione iterata di una razionale intera ». *S. Pincherle*. 3.

— « Sopra alcune equazioni funzionali ». *Id.* 279.

ANALISI MATEMATICA. « Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus ». *A. Denjoy*. 291.

— « Sur les ensembles parfaits présentant le caractère (A) ». *Id.* 316.

— « Les rapports des ensembles parfaits présentant le caractère (A) et des fonctions admettant une dérivée seconde généralisée ». *Id.* 350.

ANATOMIA PATOLOGICA. « Sul potere battericida della mucosa intestinale ». *U. Soli*. 330.

ASTRONOMIA. « Nuova determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio ». *G. Armellini*. 241; 262.

### B

BATTERIOLOGIA AGRARIA. « Ulteriori ricerche sui bacilli radicali della *Diplo-taxis erucoides* D. C. ». *R. Perrotti*. 361.

BIOLOGIA. « Nuovi fatti e nuovi problemi sulla biologia e sulla sistematica del genere *Artemia* ». *C. Artom*. 65.

— « Differenze sessuali nei pesi del corpo e degli organi umani ». *M. Boldrini*. 71; 98; 166.

— « Sulla lotta naturale contro le larve di *Anopheles* per mezzo degli insetti acquatici ». *E. Federici*. 170; 219; 244.

BIOLOGIA. « Ricerche sul manicotto glandulare (stomaco larvale) della *Rana esculenta* ». *I. Galotti*. 269.

— « Sulla differenziazione delle caste nella società dei termitidi: i neotenici ». *C. Jucci*. 68; 95.

— « I muscoli intercostali e la differenza sessuale del tipo di respirazione nello cimpanzé ». *S. Sergi*. 208.

— « Sulla topografia vertebro-midollare nello cimpanzé ». *Id.* 394.

BIOLOGIA VEGETALE. « Ricerche sul Melo 'senza fiori' (*Pyrus apetala* Münchh.) ». *B. Longo*. 290.

BOTANICA. « Sulle strutture fibrillari del Nèmec ». *V. Bambacioni*. 62.

BOLLETTINO BIBLIOGRAFICO. 303; 370.

### C

CHIMICA. « Sul nitrito tallico ». *G. Canneri*. 142.

— « Sopra alcuni sali a struttura p-, o- e m- chinoide ». *R. Ciusa*. 146.

— « Alcune trasformazioni del triossimetilene ». *A. Contardi*. 321.

— « Riduzione catalitica dell'o-nitroazossibenzolo ». *G. Cusmano*. 93.

— « Condensazioni intramolecolari per mezzo del gruppo ossiazoico ». *Id.* 365.

— « L'analisi termica del sistema nitrato di tallio-nitrito di tallio- ». *V. Cuttica*. 89.

— « Sistemi doppio-ternari con lacuna di miscibilità allo stato liquido ed allo stato solido ». *C. Mazzetti*. 150; 194.

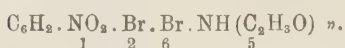
— « Nitroderivati e nitroidrazoni ». *R. Ciusa e L. Vecchiotti*. 42.

CHIMICA FISICA. « Studi sui calori specifici ». *M. Padoa*. 198.

CHIMICA FISIOLOGICA. « Sui rapporti tra l'attività peptidolitica dell'epsina intestinale e la costituzione chimica del substrato ». *A. Clementi*. 327.

— « L'azoto proteico e l'azoto residuale nel siero di sangue di vari animali (vertabrati e invertebrati) ». *G. Quagliarillo*. 213.

CRISTALLOGRAFIA. « Della forma cristallina della nitro-di-bromo-acetanilide



*M. De Angelis*. 47.

## E

ELEZIONI. Sono eletti a Soci nazionali i signori *Cerulli, De Marchi, Leonardi-Cattolica, Bottazzi, Beccari, Chiarrugi*; a Soci corrispondenti i signori *Galio, Longo, Raffaele*. 302; 334.

— Elezione dei Soci *Pirotta* ad Amministratore, e *Lanciani* ad Amministratore aggiunto. 369.

EMBRIOLOGIA VEGETALE. « Studio citologico sul genere 'Erigeron' ». *E. Carano*. 157.

## F

FISICA. « Sui cerchi di assorbimento delle soluzioni colorate ». *E. Adinolfi*. 38.

— « Influenza della dissociazione sull'assorbimento del permanganato di potassio ». *Id.* 87.

— « Forze elastiche molecolari e vibrazioni che ne risultano ». *M. Cantone*. 249.

— « Potenziale di eccitazione per gli elettroni nella miscela di vapori di potassio e sodio ». *A. Campetti*. 385.

— « La teoria elettronica della conducibilità dei metalli nel campo magnetico ». *O. M. Corbino*. 282.

— « L'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère e la teoria elettronica dei metalli ». *Id.* 335.

— « Sulle variazioni residue della resistenza elettrica prodotte da processi

termici negli acciai al nichel ». *Washington Del Regno*. 138; 192.

FISICA MATEMATICA. « Sulla propagazione delle onde di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi ». *G. A. Maggi*. 371.

— « Teoria del condensatore elettrico a piatti circolari ». *R. Serini*. 34; 257.

FISIOLOGIA. « Sul modo di agire dell'adrenalina sul cuore ». *L. Beccari*. 159.

— « Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeoterme: XIII. Contrattura da freddo nei muscoli striati ». *F. Bottazzi*. 105.

— « Una nuova ipotesi sul significato fisiologico delle protamine e degli istoni rispetto al ricambio nucleare ». *A. Clementi*. 298.

— « Contributo alla conoscenza degli enzimi: IV. Emulsina, citasi, ereptasi ed ureasi nell'orzo germogliato ». *D. Maestrini*. 164.

— « V. La resistenza della ptialina all'azione di HCl in presenza di amido ». *Id.* 391.

— « Azione della saliva sull'amido in presenza di succo gastrico e di succo pancreatico ». *S. Pastore*. 271.

FISIOLOGIA VEGETALE. « L'influenza delle basse temperature sulla germinazione del frumento appena raccolto e dei semi cosiddetti freschi ». *O. Munerati*. 273.

## G

GEOLOGIA. « Permocarboneo e permiano nella catena del Caracorum ». *M. Gortani*. 53.

— « Il Cambriano dell'Iglesiente ». *V. Novarese*. 56.

GEOMETRIA. « Determinazione proiettiva di una congruenza W ». *M. T. Ambrosetti*. 121.

— « Le superficie proiettivamente applicabili ». *L. Stipa*. 127.

GEOMORFOLOGIA. « I fenomeni erosivi di modellamento regionale considerati nel loro svolgimento continuato, e non secondo cicli ripetuti ». *G. Rovereto*. 154.

I

IDRODINAMICA. « Circuitazione superficiale: I. Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione » *M. Pascal*. 353.

M

- MATEMATICA. « Osservazioni circa il carattere quadratico dei numeri in un corpo quadratico » *L. Bianchi*. 223.
- « Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie: I. Idee direttive e loro prime conseguenze » *A. Comessatti*. 313.
  - « II. Teorema di Bruno. Covarianti conici » *Id.* 344.
  - « III. Sistema dei covarianti di dato grado, e teorema di Sylvester » *Id.* 398.
  - « I teoremi di unicità per le equazioni differenziali del 3° ordine paraboliche lineari » *E. Del Vecchio*. 346; 382.
  - « Sulle congruenze di sfere di Ribaucour che ammettono una deformazione finita » *L. P. Eisenhart*. 31.
  - « Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali » *G. Fano*. 113; 175; 231.
  - « Nuove ricerche di geometria proiettivo-differenziale » *G. Fubini*. 9.
  - « Differenziali controvarianti » *Id.* 118.
  - « Di alcune varietà abeliane » *G. Marletta*. 19; 80.
  - « Sopra una equazione funzionale » *P. Nalli*. 23; 84.
  - « Spazi che ammettono una traslazione infinitesima lungo le linee di lunghezza nulla » *O. Onicescu*. 294.
  - « Sulla varietà degli spazi tangenti di una data varietà » *A. Terracini*. 130; 186.
  - « Su una superficie del 6° ordine e della 6° classe, le cui asintotiche sono cubiche sghembe » *Id.* 356.
  - « Sviluppo degli integrali di un'equazione differenziale in serie di integrali definiti » *F. Tricomi*. 134.
- MECCANICA. « Sulle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie (seconda approssimazione) » *U. Crudele*. 265.

MECCANICA. « Forze di pressione su un montante di aeroplano » *M. Pascal*. 26.

MECCANICA CELESTE. « Osservazioni sopra le comete secolari » *G. Armellini*. 183.

- « Sopra le perturbazioni secolari dell'inclinazione del pianetino Hungaria » *Id.* 388.

MINERALOGIA. « Cassiterite e titanite di Baveno » *E. Artini*. 13.

- « Sulla presenza del crisoberillo nella dolomia di Campolongo (Canton Ticino) » *Id.* 77.
- « Nuova giacitura di minerali presso Roma » *E. Clerici*. 318.
- « Sulle metamorfosi di contatto fra calcari e porfido granitico nel giacimento metallifero di Orroli (Sardegna). » *P. Comucci*. 202.
- « Paternoite: un nuovo minerale del giacimento salifero di Monte Sambuco in territorio di Calascibetta (Sicilia) » *F. Millosevich*. 286.

N

NECROLOGIE. Annuncio della morte dei Socî *Righi, Celoria, Cuboni, Beccari, Rajna, Giglioli* e dei Socî stranieri *Norman Lockyer, Gautier, Schwendener e Voigt*. 302.

P

PALEONTOLOGIA. « Silicospoglie fossili della Liguria occidentale » *C. De Stefani*. 16; 237; 379.

PATOLOGIA. Azione del siero di gravida su estratti placentari » *M. Ascoli e G. Izar*. 275.

PATOLOGIA VEGETALE. « La forma ascofora della *Rhacodiella castaneae*, agente del nerume delle castagne » *B. Peyronel*. 324.

T

TERMODINAMICA. « Sulle trasformazioni isentropiche di certi sistemi univarianti » *U. Bordoni*. 124.

Z

ZOOLOGIA. « Osservazioni sulla vita degli Anofeli » *B. Grassi*. 307; 339.



ERRATA CORRIGE

---

Pag. 241. linea 34 invece di  $0'',5671$ , leggasi  $0'',5675$ .

---





